





3-OE

GROSSMANN



DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

mit Hinweis auf die

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen

einer neuen wissenschaftlichen Errungenschaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik; mit neuen Fundamenten für die Zinseszins- und Rentenrechnung und di[e] Finanzwissenschaft im Allgemeinen

für Lehrkräfte aller Mittelschulen, sowie auch höherer Bidungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

DR. LUDWIG GROSSMANN

Inhaber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle"

Erste Lieferung.

WIEN 1886.

Im Selbstverlage des Verfassers

III. Sofienbrückengasse Nr. 5.

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

VORREDE.

Die grossen Gelehrten vergangener Zeitepochen liebten es, sich selbst al Sprossen einer Leiter zu betrachten, an welcher der menschliche Geist zu den Geheimnissen der Natur emporzuklimmen im Stande wäre.

Diese Männer waren selbstlos bemüht, der Wissenschaft eine breitere, sicher Basis zu suchen, auf welcher sie sodann ruhig zu neuen Forschungen schreiten könnten, ohne einen Zusammenbruch derselben in Folge eines Trugschlusse fürchten zu müssen.

Je weitere Bahnen sich dem forschenden Geiste auf dem Gebiete de Wissenschaft jedoch eröffneten, desto schwerer wurde es, dieselben zurückzu legen; um wie viel grössere Ansprüche mussten daher an die Expansion des Geiste herantreten, um diese Bahnen noch zu erweitern, die Wissenschaft durch neu Forschungen zu bereichern. Eine die menschlichen Sinne am meisten absorbirend Wissenschaft ist die Mathematik und Schritt für Schritt muss hier der Forsche sich den Weg zu ebnen suchen, hier gilt's nicht nur, über Stock und Stei vorwärts kommen, der Weg muss ein passirbarer, ununterbrochener, geebnete sein. Die Mathematik ist die Wissenschaft der Ueberzeugung und ist di Forschung auf ihrem Gebiete eine desto schwierigere, als diese Ueberzeugun nicht nur für den Forscher selbst gilt, sondern auch auf andere übertrage werden muss.

Ich habe es versucht, dieser in ihren Umrissen so grossen Wissenscha auf das Gebiet der Nationalökonomie zu folgen und gelang es mir mittelst eine neuen wissenschaftlichen Errungenschaft, nämlich der „Theorie und Lösung de irreductibelen transcendenten Gleichungen", einige neue Fundamente aufzustellen die geeignet sind, den Gesichtskreis in dieser Beziehung um ein Bedeutende zu erweitern und Probleme, die bis heute theils sehr schwer zugänglich, theil gänzlich unbekannt waren, einer leichtfasslichen Lösung zuzuführen.

Wenn ich im ersten Theile meines Werkes dem rein theoretischen Theil mehr Raum gebe, so geschieht es, um dem Leser eine grössere wissenschaftlich Basis für eine weitere, successive in's Praktische einschlagende Methode zu geben Auch hoffe ich, späterhin den Anforderungen in Betreff einer populäreren Fassun Rechnung tragen zu können.

Wien, im April 1886.

Der Verfasser.

INHALT.

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

I.

Transcendente Gleichungen im Allgemeinen.

1. Unter dem Collectivnamen der transcendenten Gleichungen fasst man meistens alle diejenigen Gleichungen zusammen, welche weder zu den rationalen, noch zu den irrationalen gehören. Durch passende Umformungen lassen sich manche dieser Gleichungen auf eine algebraische Form zurückführen und man muss daher zwei Arten: reductibele und irreductibele unterscheiden, falls man es nicht vorzieht, nur die irreductibelen als die eigentlich transcendenten anzusehen. Wir wollen uns daher ausschliesslich mit den irreductibelen befassen und die reductibelen als nicht in diese Kategorie gehörend betrachten und schicken somit Folgendes voraus: Die transcendenten Gleichungen an und für sich können wir eigentlich als Ungleichungen betrachten, denen die Form von Gleichungen gegeben wurde, da es absolut unmöglich ist, dass eine irrationale Function einer rationalen gleich werden könnte. Diese beiden werden vielleicht in ihren Werthen einander nahezu gleichkommen, aber nie gleich sein.

Betrachten wir zu besserem Verständniss die Gleichung:

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo $f(x)$ eine irrationale Function, y dagegen eine rationale Grösse bedeutet. Es wird in diesem Falle, wenn wir für x irgend welchen rationalen Werth einsetzen, die Gleichung ein irrationales y ergeben, und umgekehrt; für y ein rationaler Werth eingesetzt, ergibt für x einen rationalen oder irrationalen. Die Wurzeln der transcendenten Gleichungen werden aber nur in sehr seltenen Fällen rational sein, was auch schon an sich selbst die Voraussetzung zulässt, dass dieselben numerisch zwar auf eine beliebige Anzahl von Decimalstellen, aber nie vollkommen genau berechnet werden können.

Die Anzahl von Wurzeln hängt im ersten Falle von der Anzahl der Glieder oder Summanden ab, aus welchen die betreffende transcendente Gleichung besteht; und zwar können die Glieder sowohl rationale als auch irrationale sein, und eventuell auch demgemäss bezeichnet werden müssen.

Wir sind nämlich gewöhnt, eine Gleichung von zwei Unbekannten — denn auf diese wollen wir jetzt unser Augenmerk richten — durch den Ausdruck $F(x, y) = 0$ darzustellen, ohne auf die Rationalität der einzelnen Glieder zu achten. Bei den transcendenten Gleichungen aber werden wir die Irrationalität der einzelnen Glieder scharf beobachten müssen, da diese, wie schon bemerkt, die Individualität derselben bedingt.

Um dieser Anforderung Genüge zu leisten, werden wir die rationalen und irrationalen Glieder auch im Allgemeinen unterschiedlich bezeichnen, und zwar indem wir die Functionszeichen der rationalen Glieder durch f^r und die irrationalen

durch einfachen f ausdrücken. Demgemäss wird die allgemeine transcendente Gleichung folgende Form besitzen:

$$y = \mathfrak{F}[f(x), \varphi(x), \psi(x) \ldots f'(x), \varphi'(x), \psi'(x) \ldots] \quad \ldots \quad (2)$$

Wenn wir nur diese Gleichung genau betrachten, so finden wir, dass y durch eine Function einer zweiten Unbekannten x ausgedrückt erscheint; nicht so aber lässt sich diese Unbekannte durch eine Function von y ausdrücken, was eine der prägnantesten Eigenschaften dieser Gleichungen ist. Und eben jenes ist es, was die Lösung der transcendenten Gleichungen so erschwert, da erst durch die Darstellung des x durch eine Function von y die Gleichung gelöst ist.

Wie ersichtlich, ist also die Lösung derselben auf directem Wege unmöglich, sie kann aber auf indirectem Wege durch Anwendung besonderer mathematischer Formen so weit erreicht werden, als es eben die Individualität dieser Gleichungen zulässt.

Zu diesem Behufe drücken wir die Unbekannte x durch eine Function von x und y aus, also:

$$x = f(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Es wird offenbar hier nur der Zweck verfolgt, einen Näherungswerth für x zu erreichen, welcher zwar dem wahren Werthe sehr nahe, aber nie gleichkommen kann.

Ferner sei $\mathfrak{f}$ die reciproke Function von $\mathfrak{F}$ und F diejenige von f. Durch diese Manipulation ist es uns möglich, folgende Gleichung mit Rücksicht auf die Irrationalität der einzelnen Glieder, von denen eines zu diesem Behufe benützt wird, aufzustellen. Aus der Gleichung (2) ergibt sich daher die Gleichung:

$$\mathfrak{f}(y) = f(x), \varphi(x), \psi(x) \ldots f'(x), \varphi'(x), \psi'(x) \ldots \quad (4)$$

worin eine der irrationalen Functionen, durch die übrigen ausgedrückt, die Gleichung

$$f(x) = \mathfrak{f}(y), \varphi(x), \psi(x) \ldots f'(x), \varphi'(x), \psi'(x) \quad \ldots \ldots (5)$$

als Resultat ergibt und demgemäss die nach (3) sich ergebende Schlussgleichung

$$x = F[\mathfrak{f}(y), \varphi(x), \psi(x) \ldots f'(x), \varphi'(x), \psi'(x) \ldots] \quad \ldots \quad (6)$$

entspringt, welche auch unseren bisherigen Anforderungen entsprechen muss. Aus dieser Gleichung erhalten wir successive einen immer genaueren Näherungswerth, wenn wir anstatt x in dieselbe einen bis jetzt noch nicht näher bestimmten Werth m einsetzen. Dieser Werth sei ein minder genauer Näherungswerth von x, demzufolge auch y einen anderen Werth annehmen wird, welcher dem des x, mit Rücksicht auf die Gleichung, entsprechen wird. Nennen wir ihn y_1, und so erhalten wir die Gleichung

$$m_1 = F[\mathfrak{f}(y_1), \varphi(m), \psi(m) \ldots f'(m), \varphi'(m), \psi'(m)] \quad \ldots \quad (7)$$

wobei selbstverständlich das x auf der linken Seite der Gleichung in m_1 übergeht, welches von m insofern unterschiedlich sein muss, als dem Werthe des y_1 an Genauigkeit gebricht.

Setzen wir nun die Procedur fort und betrachten m_1 als jenen Näherungswerth, indem wir denselben wie das frühere m in die Gleichung (6) anstatt x einsetzen, so erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung einen neuen Werth m_2, welcher abermals von dem früheren Werthe m_1 unterschiedlich ist, dem wahren Werthe des x aber desto näher steht. Ferner übergeht auch y_1 hierdurch in y_2 und wir erhalten die Gleichung:

$$m_2 = F[\mathbf{f}(y_2), \varphi(m_1), \psi(m_1) \ldots f^r(m_1), \varphi^r(m_1), \psi^r(m_1) \ldots] \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Auf ähnliche Art entstehen dann die Gleichungen:

$$m_3 = F[\mathbf{f}(y_3), \varphi(m_2), \psi(m_2) \ldots f^r(m_2), \varphi^r(m_2), \psi^r(m_2) \ldots]$$

$$m_4 = F[\mathbf{f}(y_4), \varphi(m_3), \psi(m_3) \ldots f^r(m_3), \varphi^r(m_3), \psi^r(m_3) \ldots] \text{ u. s. f.}$$

$$m_n = F[\mathbf{f}(y_n), \varphi(m_{n-1}) \psi(m_{n-1}) \ldots f^r(m_{n-1}), \psi^r(m_{n-1}) \psi^r(m_{n-1} \ldots]$$

$$m_{n+1} = F[\mathbf{f}(y_{n+1}), \varphi(m_n), \psi(m_n) \ldots f^r(m_n), \varphi^r(m_n), \psi^r(m_n) \ldots]$$

Substituiren wir nun umgekehrt den Werth für m_n in die Gleichung von m_{n+1}, den Werth von m_{n-1} in die Gleichung von m_n u. s. f., so erhalten wir den Näherungswerth m_{n+1} ausgedrückt durch Functionen von $y, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n, y_{n+1}$ und den allerersten Näherungswerth m. Die Gleichung wird daher folgende Form besitzen:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} m_{n+1} = F[\mathbf{f}(y_{n+1}), \varphi(F[\mathbf{f}(y_n), \varphi(F[\mathbf{f}(y_{n-1}), \varphi(F[\mathbf{f}(y_{n-2}), \ldots \varphi(F[\mathbf{f}(y_2), \\ \quad \varphi(F[\mathbf{f}(y_1), \varphi(m) \psi(m) \ldots f^r(m), \varphi^r(m), \psi^r(m) \ldots])])]) \ldots])] \\ \qquad \psi(F[\mathbf{f}(y_n), \psi(F[\mathbf{f}(y_{n-1}), \psi F[\mathbf{f}(y_{n-2}), \ldots \psi(F[\mathbf{f}(y_2), \\ \psi(F[\mathbf{f}(y_1), \varphi(m), \psi(m) \ldots f^r(m), \varphi^r(m), \psi^r(m) \ldots])])]) \ldots])] \ldots \\ \qquad f^r(F[\mathbf{f}(y_n), f^r(F[f(y_{n-1}), [f^r(F[\mathbf{f}(y_{n-2}), \ldots f^r(F[\mathbf{f}(y_2), \\ \quad f^r(F[\mathbf{f}(y_1), \varphi(m), \psi(m) \ldots f^r(m), \varphi^r(m), \psi^r(m) \ldots])])]) \ldots])] \\ \qquad \varphi^r(F[\mathbf{f}(y_n), \varphi^r(F[\mathbf{f}(y_{n-1}), \varphi^r(F[\mathbf{f}(y_{n-2}), \ldots \varphi^r(F[\mathbf{f}(y_2) \\ \varphi^r(F[\mathbf{f}(y_1), \varphi(m), \psi(m) \ldots f^r(m) \varphi^r(m), \psi^r(m) \ldots])])]) \ldots])]) \text{ u. s. f.} \end{array} \right.$$

Wenn wir nun hierin $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ in y übergehen lassen, so wird auch demzufolge $m, m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}, m_n, m_{n+1}$ in x übergehen; und da wir es aber in der letzten Gleichung blos mit m_{n+1} und m zu thun haben, wobei das letztere auf die Gleichung einen sehr geringen Einfluss übt, so ergibt sich durch diese Procedur ein genauer Näherungswerth für x, wobei diese Gleichung mit der Gleichung (6) identisch wird.

Um diese Beweisführung begreiflicher zu machen, erläutern wir dieselbe durch ein Beispiel. Es sei die transcendente Gleichung:

$$y = x - l(x) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gegeben, an welcher dieses Verfahren angewendet werden soll. Zuförderst müssen wir also die Unbekannte x durch eine Function von x und y ausdrücken, demnach erhalten wir:

$$x = y + lx \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

als gesuchte Gleichung. Ferner wird für x auf der rechten Seite derselben ein Näherungswerth m eingesetzt, wodurch y in y_1 übergeht und das x auf der linken Seite in m_1, somit das Resultat:

$$m_1 = y_1 + l\,m \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Und diese Procedur nach oben angeführter Art fortgesetzt, ergibt:

$$m_2 = y_2 + l\,m_1, \qquad m_3 = y_3 + l\,m_2$$

Die Gleichungen:

$$m_1 = y_1 + l\,m_0$$
$$\vdots$$
$$m_n = y_n + l\,m_{n-1}$$
$$m_{n+1} = y_{n+1} + l\,m_n$$

Aus diesen erhalten wir durch Substitution der Werthe die Gleichungen:

$$m_2 = y_2 + l\,(y_1 + l\,m)$$
$$m_3 = y_3 + l\,[y_2 + l\,(y_1 + l\,m)]$$
$$m_4 = y_4 + l[y_3 + l\,(y_2 + l\,[y_1 + l\,m)])$$

und

$$m_n = y_n + l\,[y_{n-1} + l\,(y_{n-2} + l\,[y_{n-3} + \ldots + l\,(y_2 + l\,[y_1 + l\,m]) \ldots])])$$

und endlich (13)

$$m_{n+1} = y_{n+1} + l\,[y_n + l\,(y_{n-1} + l\,(y_{n-2} + l\,(y_{n-3} + \ldots + l\,(y_2 + l\,[y_1 + l\,m]) \ldots)])]$$

Setzen wir hierin $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \ldots = y_{n-1} = y_n = y_{n+1} = y$, so ergibt sich hieraus auch $m_{n+1} = m_n = m_{n-1} = \ldots = m_1 = m = x$.

Die Gleichungen (10) und (13) werden demnach identisch sein und demgemäss muss die Gleichung für den genauesten Näherungswerth von x folgende sein: $x = y + l[y + l(y + l[y + \ldots + l(y + l[y + l\,m]) \ldots])])] \ldots$ (14) denn, setzen wir in dieser Gleichung für m den Werth x, so übergeht dieselbe in die ursprüngliche Gleichung (10).

Wir wollen nun jenen bis ins Unendliche versetzten Werth m betrachten und untersuchen, inwieweit er im Stande ist, auf den Resultatswerth des x einen Einfluss auszuüben.

Zu diesem Behufe werden wir die letzte Gleichung etwas genauer in Augenschein nehmen, und es wird uns sogleich klar werden, dass die letzteren Glieder blos noch einen äusserst geringen Einfluss auf den Werth des x ausüben, und je mehr sich die Reihenfolge derselben dem Unendlichen nähert, desto mehr nähert sich der Einfluss dem Werthe 0. Da nun aber das m blos im unendlichsten Gliede vorhanden ist, und demnach der Einfluss desselben 0 ist, so kann man für m einen beliebigen Werth einsetzen und ein jeder der Resultatswerthe wird sich endlich doch nur zum Näherungswerthe des x qualificiren; weshalb es auch sein könnte, dass wir das letzte Glied $f\,(m)$ gänzlich weglassen, oder anders gesagt, wir könnten $f\,(m) = 0$ setzen.

Nicht jede transcendente Gleichung wird aber diesen Bedingungen entsprechen, und wir werden eine bedeutende Anzahl von Verschiedenheiten, welche bei mannigfachen Gleichungen vorkommen werden, in Betracht zu ziehen haben und es wird daher gerathen sein, jede Art derselben für sich zu untersuchen und die Modalitäten festzusetzen, unter welchen die betreffende Gleichung unlöslich werden könnte.

Den bei der letzten Gleichung angeführten Eventualitäten werden wir insbesondere bei Gleichungen begegnen, wo ein irrationales Glied ein Logarithmus ist, wie es eben auch hier der Fall.

Wollen wir nun für irgend einen Werth des y den ihm entsprechenden Werth des x finden, so können wir für $f\,(m)$ oder respective bei jener Gleichung $l\,m = 0$ setzen; also der erste Näherungswerth des x der Werth 1 sein wird.

Da nun aber $x = y + lm = m_1$ ist, so wird, wenn wir für y z. B. den Werth 2 setzen, der zweite Näherungswerth $m_1 = y + 0 = 2$ sein und demzufolge nach der nächsten Näherungsgleichung

$$x = y + lm_1 = y + l(y + lm) = 2{\cdot}693147 = m_2$$

sich ergeben wird. Setzen wir nun diese Procedur fort, ergeben sich die immer mehr dem wahren Werthe entsprechenden Näherungswerthe folgendermassen:

Es wird

$$x = y + l[y + l(y + lm)] = m_3 = y + lm_2 = 2{\cdot}9907091,$$
$$x = y + l[y + l(y + l[y + lm])] = m_4 = y + lm_3 = 3{\cdot}0955076$$

u. s. f., und endlich

$$x = y + l[y + l(y + l[y + l(y \;.\;.\;.\; + l[y + l(y + lm)])]) \;.\;.\;.\;)] = m_k$$
$$= y + lm_{k-1} = 3{\cdot}146187$$

werden, d. h. der Näherungswerth wird auf 5 Decimalstellen genau sein.

Wir werden daher den Näherungswerth des x nach Willkür genau berechnen können, je nachdem, wie oft wir die Procedur vornehmen.

Die Ersatz- oder Substitutionsgleichungen.

Wenn wir die Art und Weise, in welcher sich die Resultatsgleichungen ergeben, näher in Augenschein nehmen, so finden wir alsbald, dass hier eine gewisse Wiederholung ein und derselben Function überhand nimmt, wobei jede der Functionen alle ihr folgenden Glieder in sich fasst. Wir wollen daher versuchen, ob jene Wiederholung uns nicht die Zusammenfassung aller Glieder in ein einziges, welches diese Eigenschaft selbst in sich trägt, ermöglicht.

Benützen wir hierzu abermals die Gleichung $y = x - lx$ und ihre Resultatsgleichung

$$x = y + l[y + l(y + l[y + l(y + l[y + \;.\;.\;.\; + l[y + l(y + lm)] \;.\;.\;.\;])])] \;.\;.\;.\; (14)$$

Wie zuvor schon bemerkt wurde, ist es unserer Willkür anheimgestellt, die Anzahl der Proceduren zu vergrössern oder zu vermindern, je nachdem, wie die Genauigkeit des Näherungswerthes zur Geltung gelangen soll. Es wird demnach die Formel

$$x = y + lm \;\;.\;\;.\;\;.\;\; (15)$$

denselben Dienst erweisen, wie die ganze Resultatsgleichung des x, wenn wir die Wiederholung dieses Gliedes in Betracht ziehen. Es wird nämlich die ganze rechte Seite der Gleichung (15) wiederholt anstatt des Werthes m in sich selbst zu substituiren sein, und demgemäss ergibt sich für die erste Substitution

$$x = y + lm = y + l(y + lm), \text{ für die zweite}$$
$$x = y + lm = y + l[y + l(y + lm)] \text{ u. s. f.,}$$

bis endlich die Resultatsgleichung des x vollkommen dargestellt ist (14), welches diese Procedur ins Unendliche fortzusetzen erheischt.

Um nun bei der Formel (15) die zu erfolgende Substitution anzuzeigen, versehen wir dieselbe mit einem Substitutionszeichen (Ersatzzeichen), welches wir durch den Buchstaben E ausdrücken.

Zu besserem Verständniss werden wir aber auch jenen für die Grösse m einzusetzenden Ausdruck an dem oberen Theile des Substitutionszeichens an-

bringen. Da nun aber jede Gleichung auch mehrere Wurzeln für einen bestimmten Werth des y haben kann, so wird es die Nothwendigkeit erheischen, auch zur Unterscheidung derselben Anstalten zu treffen.

Wir werden demgemäss Folgendes vorausschicken: Um zu einem genügenden Näherungswerthe früher oder eventuell durch eine geringere Anzahl von Proceduren zu gelangen, ist es nothwendig, einen, durch eine bestimmte einfache Manipulation, welche wir später anführen wollen, sich ergebenden Näherungswerth in das letzte Glied der Gleichung anstatt der Grösse m einzusetzen, wodurch wir einen Vorsprung gewinnen, welcher uns eine gewisse Anzahl von Proceduren ersetzt.

Aber auch in anderer Beziehung ist der einzusetzende Werth des m von Wichtigkeit, indem die Beschaffenheit der Wurzel von der des Werthes m abhängt. Insbesondere wird hier die Frage ins Gewicht fallen, ob m grösser oder kleiner als 1 ist.

Demzufolge werden wir am unteren Theile des Substitutionszeichens jenen Näherungswerth angeben, welcher der betreffenden Wurzél nach oben erwähnter Manipulation entspricht. Es wird demnach die Substitutionsgleichung — denn so wollen wir nun die Resultatsgleichungen benennen — der Gleichung $y=x-lx$ folgende sein:

$$x = \underset{b>m>a}{\overset{m=y+lm}{E}}[y+lm] \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dem oben Angeführten gemäss muss daher die Relation

$$\underset{b>m>a}{\overset{m=y+lm}{E}}[y+lm] = y+l[y+l(y+l[y+ \; . \; . \; . +l(y+l[y+lm]) \; . \; . \; . \;])])$$

gelten, wodurch unsere Aufgabe in Betreff der kürzesten Schreibweise gelöst ist.

Die allgemeine Gleichung $y=F(x)$ wird die Substitutionsgleichung

$$x = \underset{b>m>a}{\overset{m=\mathsf{f}(y,m)}{E}}[\mathsf{f}(y,m)] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ergeben, welche aufgelöst folgendermassen lauten wird:

$$x=\mathsf{f}(y, \mathsf{f}[y, \mathsf{f}(y, \mathsf{f}[y \; . \; . \; . \text{ in inf.} \; . \; . \; . \; \mathsf{f}[y, \mathsf{f}(y,m)] \; . \; . \; . \;])]) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wobei das Functionszeichen F eine allgemeine transcendente Function bedeutet.

Was nun die Wurzeln der transcendenten Gleichungen betrifft, so wird die Anzahl derselben sowohl von den rationalen, als auch von den irrationalen Factoren abhängen.

Dieser Eventualität zufolge müssen wir vor allem die besonderen Eigenschaften der irrationalen Factoren in Betracht ziehen.

Die Irrationalität eines Factors kann in Bezug auf jene eines anderen Factors eine verschiedene sein; und insbesondere wird diese Verschiedenheit bei den transcendenten Gleichungen ins Gewicht fallen, da hier oft mehrere solcher irrationaler Factoren in ein und derselben Gleichung vorkommen und es bei der Lösung derselben der Vortheil erheischt, den am meisten irrationalen Factor möglichst ausser Rechnung zu bringen.

Zu den irrationalen Factoren der transcendenten Gleichungen zählen wir die Factoren mit goniometrischen, cyklometrischen und logarithmischen Functionen,

wie auch mit Exponentialgrössen, welche sich den letzteren als reciprok zur Seite stellen.

Unter den genannten sind die cyklometrischen die meist irrationalen und erreicht ihre Irrationalität den höchsten Grad, wenn der Bogen eine Function von einem Logarithmus oder einer Exponentialgrösse ist. Jene am wenigsten irrationale Function ist die Exponentialgrösse, welche Eventualität uns auch bei der Lösung dieser Gleichungen erkleckliche Dienste erweisen wird.

Nachdem wir nun auf die Hauptmomente der Lösung der transcendenten Gleichungen hingewiesen haben, wollen wir zur Untersuchung der Anzahl und der Näherungswerthe der Wurzeln übergehen, worüber hauptsächlich die Maximal- und Minimalwerthe der einzelnen Factoren der betreffenden zu untersuchenden Gleichungen, mit Bezug auf den Werth der Variablen y, uns Aufschluss geben werden.

Zu diesem Behufe werden wir eine allgemeine Gleichung von der Form:

$$y = f(x) + \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

worin sowohl $f(x)$ als auch $\varphi(x)$ irrationale Functionen von x sein können, der Untersuchung unterziehen, und wollen demgemäss als Minimalwerth des Factors $f(x)$ die Grösse ϑ setzen, woraus sogleich für den zweiten Factor $\varphi(x)$ der Werth

$$\varphi(x) = y - \vartheta$$

entspringt; und wenn wir nun Ω als reciprok des Functionszeichens φ betrachten, ergibt sich die Gleichung

$$x = \Omega(y - \vartheta)$$

Wir wollen nun aber auch bestimmen, welchen Werth das x der Minimalgleichung $f(x) = \vartheta$ zufolge ergeben wird und finden, wenn wir f als reciprok für f betrachten, das Ergebniss

$$x = f(\vartheta)$$

wobei der Werth des x beim Wachsthum des ϑ je nach Umständen sowohl im Fallen, als auch im Steigen begriffen sein kann.

Ist nun der Werth von $f(x)$ grösser als der Minimalwerth, so muss sich ergeben, da ϑ im Wachsthum begriffen:

$$\varphi(x) < y - \vartheta$$
$$x \gtrless \Omega(y - \vartheta)$$

je nachdem, ob die Function eine steigende oder fallende ist; ferner, wenn wir bei der Gleichung $x = f\,\vartheta$ beide Eventualitäten in Betracht ziehen:

$$x > f(\vartheta)$$
$$x < f(\vartheta).$$

Es wird demnach

$$f(\vartheta) < x < \Omega(y - \vartheta) \text{ oder } f(\vartheta) > x > \Omega(y - \vartheta)$$

sich als Näherungswerth der ersten Wurzel ergeben müssen.

Dasselbe Verfahren wird auch bei den anderen Factoren, wenn deren mehrere sind, angewendet.

Besitzt der Factor $f(x)$ auch einen bestimmten Maximalwerth, so wird sich in Bezug auf diesen noch eine zweite Wurzel ergeben, welche Eventualität auch

bei dem Factor $\varphi(x)$ zur Geltung kommt. Es würde daher die Gleichung (18) bei Vorhandensein von endlichen Maximal- und Minimalwerthen der beiden Factoren $f(x)$ und $\varphi(x)$ wenigstens vier verschiedene Wurzeln besitzen.

Wir wollen zum besseren Verständniss das Gesagte an einem Beispiele erörtern. Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$y = \frac{1 + lx}{2} + Sin\,(x - 3)$$

zu bestimmen.

Der Maximalwerth vom zweiten Factor ist, wie leicht ersichtlich, $Sin\,(x - 3) = 1$, wogegen der Minimalwerth desselben $Sin\,(x - 3) = -1$ ist. Im ersten Falle wird daher

$$\frac{1 + lx}{2} \gtreqless y - 1$$

oder

$$1 + lx \gtreqless 2(y - 1)$$

und endlich die Folgerung:

$$x \gtreqless e^{2y - 3}$$

Aus dem Maximalwerthe $Sin\,(x - 3) = 1$ ergibt sich

$$x = arc\ Sin\,(1) + 3 = \frac{\pi}{2} + 3,\ \frac{5}{2}\pi + 3,\ \frac{9}{2}\pi + 3 \text{ u. s. f.}$$

Ist dieser Werth im Abnehmen begriffen, so wird $x < 3 + arc\ Sin\ (1)$ oder anders:

$$x < \frac{\pi}{2} + 3,\ \frac{5}{2}\pi + 3,\ \frac{9}{2}\pi + 3 \text{ u. s. f.}$$

Demgemäss ergibt sich als erste Wurzel

$$(1 + 4n)\frac{\pi}{2} + 3 > x > e^{2y - 3}$$

welche wieder an sich selbst unendlich vielen Variationen unterliegt, da n die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . durchläuft.

Für den Minimalwerth $Sin\,(x - 3) = -1$ wird $\frac{1 + lx}{2} \gtreqless y + 1$ als Relation bestehen, und demgemäss $lx \gtreqless 2y + 1$, mithin $x \gtreqless e^{2y + 1}$ sich ergeben.

Unter denselben Umständen ergibt sich auch $x \gtrless arc\ Sin\,(-1) + 3$ oder anders gesagt $x \gtrless \frac{3}{2}\pi + 3,\ \frac{7}{2}\pi + 3, \frac{11}{2}\pi + 3$ u. s. f., und somit ergibt sich wieder die Relation:

$$3 + \frac{\pi}{2}\cdot(3 + 4n) \gtrless x < e^{2y + 1}$$

worin n abermals die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . durchläuft, und welche uns als zweite Wurzel gelten kann. Selbstverständlich wird immer berücksichtigt werden müssen, dass der Werth des y ein positiver bleibt, und wir wollen diese Bedingung auch überall beibehalten.

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

II.

Nach den bisher gemachten Erörterungen wollen wir nun auch jene Wurze[l] auffinden, welche sich beim Minimum des ersten Factors ergibt.

Soll der Werth des y ein positiver bleiben, muss x beiläufig den Wert[h] $x = 2$ besitzen, demnach auch das approximative Minimum des ersten Factor[s] mit Bezug auf den zweiten $\frac{1 + l2}{2}$, und sonach beim Wachsthum des betreffende[n] Factors

$$Sin\ (x - 3) < y - \frac{1 + l2}{2}$$

sein muss, woraus

$$x < 3 + arc\ Sin\left(y - \frac{1 + l2}{2}\right)$$

sich ergibt.

Und da nun unter denselben Umständen $x > 2$ sein muss, wenn der erst[e] Factor im Wachsthum begriffen ist, so ergibt sich die Relation

$$2 < x < 3 + arc\ Sin\left(y - \frac{1 + l2}{2}\right)$$

als dritte Wurzel. Auch diese fasst eine unendliche Anzahl anderer Wurzel[n] in sich.

Wie bei der letzten Wurzel leicht ersichtlich, wird dieselbe nur unter de[r] Bedingung stattfinden können, als der Werth des y nicht grösser wird al[s] $\left(1 + \frac{1 + l2}{2}\right)$; d. h. die Variable y darf nur um 1 den Minimalwerth des erste[n] Factors übersteigen, im anderen Falle ist diese Wurzel eine imaginäre.

Wir haben nun die Art und Weise, in welcher die Wurzeln der trans[-] scendenten Gleichungen ihrer Anzahl und ihrem Näherungswerthe gemäss unter[-] sucht werden, angeführt; aber auch in anderer Beziehung müssen wir die Be[-] schaffenheit dieser Gleichungen in Betracht ziehen, da es zu geschehen pflegt, dass dieselben für irgend einen bestimmten Werth des x in algebraische über[-] gehen, wodurch sie in zwei gänzlich verschiedenen Wurzeln entsprechende Theil[e] getheilt werden. Uebergeht z. B. eine Gleichung für den Werth $x = q$ in ein[e] algebraische, so werden dem einen Theile Wurzeln, welche grösser als q sind, dem anderen dagegen, welche kleiner als q sind, entsprechen. Bezüglich desse[n] wollen wir ein Beispiel anführen, wobei wir uns wieder der früheren Gleichung

$$y = x - lx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

bedienen.

Diese Gleichung kann für den Werth $x=1$ in eine algebraische übergehen, es wird also hierdurch ausgedrückt, dass es bei dieser Gleichung erstens Wurzeln, welche <1, und zweitens solche, die >1 sind, geben wird.

Setzen wir ferner y als eine positive Zahl voraus, deren Werth grösser als 1 ist, so werden hier folgende Fälle statthaben:

$$(\alpha) \;.\;.\;.\;.\; x > y$$

$$(\beta) \;.\;.\;.\;.\; x > e^{-y}$$

Für den zweiten Fall können wir die Gleichung (a) in der Form $y = x + l\frac{1}{x}$ schreiben, wodurch es uns klar wird, dass, wenn die Gleichung bestehen soll, das x so klein werden muss, dass $l\frac{1}{x}$ eine positive Zahl wird, welche den Werth des x bis zum vollständigen Werthe des y ergänzt; das heisst für $x<1$ erhalten wir den Logarithmus eines unechten Bruches, welcher bekanntlich positiv ist und somit mit dem Werthe des x den des y ergeben muss.

Es werden sich diesen Auseinandersetzungen zufolge für die gegebene Gleichung (a) zweierlei Wurzeln ergeben, deren Beschaffenheit durch die Ungleichungen

$$(\gamma) \;.\;.\;.\;.\; x > y$$

$$(\delta) \;.\;.\;.\;.\; 1 > x > e^{-y}$$

ausgedrückt ist.

Ganz anders verhält es sich aber bei der Gleichung

$$y = x + lx \;.\;.\;.\;.\; (b)$$

hier wird nur eine unbeschränkte Wurzel, und zwar für die Bedingungsungleichung $x<y$ bestehen, wogegen die Ungleichung $x<e^y$ nur für Werthe des y, welche kleiner als 0 sind, bestehen wird und in Betreff der grösseren Werthe desselben imaginär ist. Die Wurzel wird sonach den Näherungswerth

$$(\varepsilon) \;.\;.\;.\;.\; x < y \quad \text{für den ersten Fall, und}$$

für den zweiten Fall $(\zeta) \;.\;.\;.\;.\; 0 < x < e^y \; (y \overline{\leq} 0)$ ergeben.

Die Substitutionsgleichungen von (a) und (b) werden daher folgendermassen lauten:

$$a) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} x_1 = \underset{m > y}{\overset{m = y + lm}{E}}[y + l\,m] \\ x_2 = \underset{1 > m > e^{-y}}{\overset{m = y + lm}{E}}[y + l\,m] \end{cases}$$

$$b) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} x_1 = \underset{m < y}{\overset{m = y - lm}{E}}[y - lm] & \text{für positive } y \\ x_2 = \underset{0 < m < e^y}{\overset{m = y - lm}{E}}[y - lm] & \text{für negative } y \end{cases}$$

Ist bei einer Wurzel nur einer der Grenzwerthe vorhanden, so genügt es, im Sinne desselben den Werth je nach Umständen nur um ein sehr Geringes grösser oder kleiner zu machen, und man erreicht mit Hilfe der Ersatzgleichung den verlangten Wurzelwerth.

Zu besserem Verständniss wollen wir diese Wurzeln etwas näher untersuchen. Für die Gleichung *(a)* gelten die Ungleichungen $x_1 > y$ und $x_2 > e^{-y}$, demnach können wir auch

$$x_1 - \sigma = y$$
$$x_2 - \sigma_1 = e^{-y}$$

setzen und erhalten durch Elimination des y aus den beiden Gleichungen

$$x_2 - \sigma_1 = e^{\sigma - x_1}$$

demgemäss

$$\sigma - x_1 = (l x_2 - \sigma_1)$$

und endlich

$$x_1 - \sigma = l \frac{1}{x_2 - \sigma_1} = y$$

Erreicht nun y das Maximum, so wird σ und σ_1 gegen 0 convergiren und die letzte Gleichung $x_1 = l\frac{1}{x_2}$ erreichen, und demnach $x_2 = e^{-x_1}$. Für $y = \infty$ ist also $x_1 = \infty$ und $x_2 = 0$, welche Werthe der Gleichung *(a)* insoweit entsprechen, als y positiv unendlich bleibt.

Der Gleichung *(b)* entsprechen dagegen die beiden Bedingungen $x_1 < y$ und $x_2 < e^y$, demgemäss $x_1 + \sigma = y$ und $x_2 + \sigma_1 = e^y$; somit auch

$$x_2 + \sigma_1 = e^{x_1 + \sigma}$$

oder aber

$$-(x_1 + \sigma) = l\frac{1}{x_2 + \sigma_1} = -y$$

Für $y = -\infty$ convergiren abermals σ und σ_1 gegen 0; und die Gleichung wird dem Werthe $x_2 = 0$ entsprechen, solange y negativ unendlich bleibt, wogegen $x_1 = \infty$ für $y = \pm\infty$ sein wird.

Wenn nun umgekehrt in obiger Gleichung $x_2 = 0$ wird, so erhalten wir:

$$l\frac{1}{\sigma_1} = y.$$

Da aber σ_1 auch wenn $x_2 = 0$ nicht grösser sein kann als e^y, und dieser Werth auch im günstigsten Falle nicht negativ werden kann, so wird $l\frac{1}{\sigma_1}$ nur positiv sein können.

Wenn wir aber die Gleichung (b) betrachten, so finden wir:

$$(\vartheta) \quad \ldots \quad y = x_1 + l x_1$$
$$(\lambda) \quad \ldots \quad y = x_2 - l\frac{1}{x_2}$$

wie ersichtlich, ist also in (λ) der zweite Factor negativ; und da sein absoluter Werth hier nur positiv sein kann, so ergibt sich daraus, dass die zweite Wurzel nur unter der Bedingung stattfinden kann, als $y \gtreqless 0$ ist.

II.

Die Eintheilung der transcendenten Gleichungen.

Wie schon zuvor bemerkt, ist die Manipulation, welche bei verschiedenen Formen dieser Gleichungen zum Ziele führt, eine ebenfalls verschiedene; und wir wollen daher die einzelnen Arten dieser Gleichungen, wie sie der Reihe nach immer mehr an Complication zunehmen, nach einander anführen und die Lösung bezeichnen; da es nothwendig ist, den Werth q bei jeder Gleichung zu bestimmen, und die Ersatzgleichung so aufzustellen, dass die Veränderlichkeit des Näherungswerthes m vom Anfang an rapid im Abnehmen begriffen ist, um schliesslich fast 0 zu werden.

Da wir nun die normale Annäherung des Werthes m zum eigentlichen Resultatswerthe mit der Schwingung einer Seite oder vielmehr mit einer Welle, welche von ihrem Entstehungspunkte aus immer mehr an Intensität abnimmt, bis endlich das Gleichgewicht hergestellt ist, vergleichen können, so wird auch der Näherungswerth des m abwechselnd grösser und kleiner als der Resultatswerth sein müssen, wobei die Differenz zwischen beiden consequent abnimmt, bis sie endlich gegen 0 verschwindet. Bei abnormaler Annäherung dagegen können wir den Vergleich folgendermassen anstellen. Denken wir uns eine Welle, auf deren schwingender Oberfläche eine neue Welle von demselben Ausgangspunkte so in Action tritt, dass beide in ein und demselben unendlich entfernten Punkte ihre Activität verlieren; dann ist der Vergleich ein richtiger.

Wir werden später zur Erörterung des Gesagten einige Arten solcher Gleichungen anführen, bei denen diese Abnormität zu Tage tritt, und wollen nur noch bemerken, dass es hauptsächlich jene Gleichungen sind, deren irrationale Functionen bei der geringsten Veränderung der Variabelen eine dieser unangemessene Aenderung erleiden, wobei sich die successiven Näherungswerthe des Resultatswerthes erst durch eine andere Annäherung ergeben. Es sind dies insbesondere jene Functionen, in welchen Exponentialgrössen vorkommen, deren Exponent eine trigonometrische Function ist, deren Bogenwinkel abermals durch eine Exponentialgrösse ausgedrückt erscheint. Ueberhaupt bei der Aufstellung von Ersatzgleichungen ist es öfters der Fall, dass man auf ähnliche Functionen stösst. Selbstverständlich wird dies vermieden werden müssen, zu welchem Zwecke auch hierbei verschiedene Veränderungen vorgenommen werden, wodurch jedoch die Genauigkeit der Lösung nicht im geringsten leidet.

1. Gleichungen mit logarithmischen und Exponential-Functionen.

Wie bekannt, lässt sich ein Logarithmus durch eine Exponentialgrösse leicht ersetzen. Es werden demnach alle Gleichungen, in denen logarithmische Functionen vorkommen, auch zugleich jenen Gleichungen, in welchen Exponentialgrössen vorkommen, entsprechen.

Wir wollen nun mit den einfachsten dieser Gleichungen beginnen und sodann zu den complicirteren übergehen.

Es sei die Gleichung

$$y = f(x) \pm l\varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ı lösen, somit entspringt hieraus die Resultatsgleichung:

$$x = \underset{w \equiv q}{\overset{m = F}{E}} \Big[F\,[y \mp l\varphi(m)] \Big] \quad . \; . \quad (2)$$

nn hierin F die reciproke Function von f bedeutet.

Für $f(x) = \varphi(x) = x$ erhalten wir mit Bezug auf die beiden Zeichen $\pm$ ı Gleichungen

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = x + lx$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y_1 = x - lx$$

ren nähere Beschaffenheit wir bereits erörtert haben. Aus diesen erhalten wir ch die beiden Exponentialgleichungen

$$z = e^y = xe^x$$

$$z_1 = e^{y_1} = \frac{e^x}{x}$$

er aber allgemein

$$w = a^y = a^x \cdot x^{la}, \qquad w_1 = a^{y_1} = a^x \cdot x^{-la}$$

Ferner die Gleichungen

$$(\gamma) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = x + xlx$$

$$(\delta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y_1 = x - xlx$$

n wir für $f(x) = x$ und $\varphi(x) = x^x$ einsetzen. Diese lassen sich auf die chungen (α) und (β) zurückführen, welche Manipulation auch unbedingt endig ist, da x^x an und für sich schon eine irreductible transcendente ction ist.

Es wird demnach die Gleichung (γ) folgendermassen zu behandeln sein: hren wir in dieser Gleichung $lex = u$ ein, so ergibt sich $x = e^{u-1}$, und dieses gesetzt gibt

$$y = e^{u-1} + e^{u-1} \cdot (u - 1) = e^{u-1} \cdot u$$

raus

$$ly = u - 1 + lu$$

d

$$ly + 1 = u + lu$$

h ergibt; wenn wir nun $(1 + ly) = v$ setzen, so erhalten wir die der Gleichung (α) sprechende Form

$$v = u + lu$$

Eine ähnliche Procedur, nemlich, wenn wir in die Gleichung (δ) den Werth $= u_1$ einführen, führt uns zu dem Resultate

$$y_1 = e^{1-u_1} \cdot u_1$$

aus

$$ly_1 = 1 - u_1 + lu_1$$

l endlich

$$1 - ly_1 = u_1 - lu_1$$

h ergeben muss.

Demnach abermals für $1 - ly_1 = v_1$ eingesetzt, liefert uns die der Gleichu[n]
entsprechende Schlussgleichung

$$v_1 = u_1 - lu_1$$

Den beiden Gleichungen (γ) und (δ) werden nun folgende Exponen[tial-]
gleichungen entsprechen.

Aus der Gleichung (γ) entspringt

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^y = e^x x^x = (xe)^x$$

und daraus, wenn $x . e = z$ gesetzt wird, $x = \frac{z}{e}$, und demnach

$$(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^y = z^{\frac{z}{e}} \text{ oder } e^{ey} = z^z$$

mit diesem analog wird auch $e^{y_1} = e^x x^{-x} = \left(\frac{e}{x}\right)^x$ und hierin $\frac{e}{x} = z_1$ ges[etzt]
ergibt

$$(\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{y_1} = z^{\frac{e}{z_1}} \text{ oder } e^{\frac{y_1}{e}} = z_1^{\frac{1}{z_1}}$$

demnach sind auch diese Gleichungen nach (α) und (β) löslich.

Setzen wir ferner als nächstes Beispiel in die Gleichung (1) $f(x) = \frac{1}{1}$
und $\varphi(x) = x$, entstehen die Gleichungen

$$(\varkappa) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{1+x}{1-x} + lx$$

$$(\omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_1 = \frac{1+x}{1-x} - lx$$

Diesen entsprechen die beiden Ersatzgleichungen

$$(\rho) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\frac{y-1-lm}{y+1-lm}\right]$$

$$(\sigma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\frac{y_1-1+lm}{y_1+1+lm}\right]$$

Wollen wir nun die Gleichung (ϰ) numerisch lösen, werden wir vor Al[lem]
die Wurzeln untersuchen müssen.

Es ergibt sich demnach als endliches Minimum im ersten Factor

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 \text{ für } x = 0$$

Für diesen Werth würde aber der zweite Factor negativ unendlich werden
wird daher x unbedingt grösser als 0 sein müssen, und zwar sich zwische[n]
und 1 so bewegen, dass y positiv bleibt.

Es kann aber auch der erste Factor für $\frac{1+x}{1-x} = -1$ sein Minimum erreichen, für welchen Fall aber $x = \infty$ sein müsste, welcher Werth in der Gleichung ($\varkappa$) dem Werthe $y = \infty$ entspricht; soll daher $y < \infty$ sein, so wird ch $x < \infty$ und $\frac{1+x}{1-x} < -1$ sein müssen, welches uns als zweite Wurzel ten wird.

Da nun die erste Wurzel durch die Relation $0 < x < 1$ ausgedrückt ist, werden wir auch für die zweite Wurzel eine Relation aufstellen müssen, lche uns dieselbe näher begrenzt; und wir werden demgemäss folgendermassen rgehen:

Für $x = \infty$ ist $\frac{1+x}{1-x} = -1$, demnach in ($\varkappa$)

$$y = -1 + lx \text{ und auch } x = e^{y+1}$$

Für $x < \infty$ ist $\frac{1+x}{1-x} < -1$, demgemäss auch $y + 1 < lx$ und $x > e^{y+1}$

ergibt sich somit die Relation für die zweite Wurzel: $\infty > x > e^{y+1}$. Der lation der ersten Wurzel zufolge werden wir irgend einen echten Bruch als ten Näherungswerth annehmen. In der Gleichung (ρ) ergibt sich für $y = 2$ d $m = 1$ der Näherungswerth $m_1 = \frac{1}{3}$ und somit dieses in (ρ) abermals eingesetzt, ergibt $m_2 = 0{\cdot}51203$ u. s. w. fortgesetzt, ergibt:

$$m_3 = 0{\cdot}4549473$$
$$m_4 = 0{\cdot}47195696$$
$$\vdots$$
$$m_{n-1} = 0{\cdot}467986$$
$$m_n \quad = 0{\cdot}467992$$

lches letztere auf 5 Decimalstellen genau bestimmt ist, demnach

$$x_1 = 0{\cdot}46799 \ldots$$

Wir sehen hier offenbar jene früher erwähnte Variation der Näherungswerthe: t nemlich $m_1, m_3, m_5 \ldots m_{n-1} < x_1$, wogegen $m_2, m_4, m_6, m_8 \ldots m_n > x_1$ ist. Ausserdem wird, wenn $m_2 - m_4 = \delta$, $m_4 - m_6 = \delta_1$ u. s. f. ist, allgemein $> \delta_1$ sein, d. h. die Variation ist im Abnehmen begriffen.

Für die zweite Wurzel ist als Näherungswerth der Relation $x > e^{y+1}$ gemäss $y = 2$, $x > e^3$, welcher Werth $m = 21$ ergibt. Wenn wir nun diesen Näherungswerth in die Ersatzgleichung (ρ) einsetzen, so erhalten wir $m_1 = 45{\cdot}9$. Wir n daher, dass bei der Gleichung (ρ) die Annäherung ungeheuren Variationen rliegt; es wird demnach rathsam sein, eine andere Ersatzgleichung aufzuen, welche zwar eine andere Form besitzt, jedoch mit der Gleichung (ρ) tisch ist.

Dieselbe wird nemlich folgender Art lauten:

$$x = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m=k}\left[e^{\,y - \frac{1+m}{1-m}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\tau)$$

Wenn wir nun obigen Näherungswerth $m = 21$ in dieselbe einsetzen, erhalten wir für m_1 den Werth 22·198; dieses in die Gleichung (τ) abermals eingesetzt, ergibt $m_2 = 22{\cdot}1238$; und dieses fortgesetzt $m_3 = 22{\cdot}13$, $m_4 = 22{\cdot}130$ $m_5 = 22{\cdot}130400$; demgemäss die zweite Wurzel auf 4 Decimalen genau bestimmt.

Wir wollen nun wieder zu der Aufstellung der den Gleichungen ($\varkappa$) und (ω) entsprechenden Exponentialgleichungen übergehen und finden aus ($\varkappa$) den Ausdruck

$$u = e^y = e^{\frac{1+x}{1-x}}.x \quad \text{oder } a^y = a^{\frac{1+x}{1-x}}.x^{la}$$

und (ω) entsprechend

$$u_1 = e^{y_1} = e^{\frac{1+x}{1-x}}.x^{-1} \text{ oder } a^{y_1} = a^{\frac{1+x}{1-x}}.x^{-la}$$

Ein anderes Beispiel ergibt sich, wenn die Gleichung (1) für $f(x)$ den Werth $\sqrt{x^2-1}$ und $\varphi(x) = x$ erhält. Es ergibt sich sodann

$$(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \sqrt{x^2-1} + lx$$

$$(\pi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_1 = \sqrt{x^2-1} - lx$$

und die denselben entsprechenden Ersatzgleichungen ergeben sich folgendermassen.

Für (η) erhalten wir $y = \sqrt{x^2-1} + lm$, daraus $\sqrt{x^2-1} = y - lm$ und sogleich $\pm\sqrt{(y-lm)^2+1}$ und analog für (π), $\pm\sqrt{(y_1+lm)^2+1}$; demzufolge wird

$$(\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}}\left[\sqrt{[y-lm]^2+1}\right]$$

$$(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}}\left[\sqrt{[y_1+lm]^2+1}\right]$$

weil x nur einem + Werthe entsprechen kann, wenn (η) und (π) reelle Resultate ergeben sollen.

Wollen wir nun z. B. für den Werth $y = 1$ die Gleichung (π) numerisch lösen, ergibt sich sogleich, dass, wenn wir in dieselbe $x = 1$ einsetzen, $y =$ werden muss; es wird demnach $x > 1$ sein müssen, wenn $y = 1$ werden soll. Ferner kommen wir auch noch zu folgendem Resultate: Wenn nemlich lx das Minimum erreicht, so wird $x = 1$, $lx = 0$, demgemäss wir $y = \sqrt{x^2-1}$ und daraus $x = \pm\sqrt{y^2+1}$ als mögliche reelle Wurzel erreichen.

Wird $y = 1$, so muss $x > 1$ werden, demnach auch nach der Gleichung (π) lx im Wachsen begriffen ist und somit $y < \sqrt{x^2-1}$, daraus ergibt sich $x > \pm\sqrt{y^2+1}$ und für $y = 1$ auch $x > \pm\sqrt{2}$; da nun aber blos das positive Zeichen hier massgebend sein kann, so ergibt sich als Näherungswerth der ersten Wurzel $m > \sqrt{2}$.

Setzen wir nun diesen Werth in die entsprechende Ersatzgleichung (ξ), so erhalten wir $m_1 = 1{\cdot}6773$, $m_2 = 1{\cdot}8171$, $m_3 = 1{\cdot}88461$, $m_4 = 1{\cdot}91547$, $m_5 = 1{\cdot}92$ $m_6 = 1{\cdot}93552$, $m_7 = 1{\cdot}936538$, $m_8 = 1{\cdot}938896$, $m_9 = 1{\cdot}94000$, $m_{10} = 1{\cdot}940$ $m_{11} = 1{\cdot}94035$, $m_{12} = 1.94039$, $m_{13} = 1{\cdot}940413$, $m_{14} = 1{:}940421$ u. s. f., also auf 4 Decimalen genau.

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

III.

Bei der genannten Gleichung ist vor Allem jene merkwürdige Eigenschaft zu beobachten, dass die Annäherung des Näherungswerthes eine continuirliche ist, welches wir nur dem speciellen Falle, dass bei dieser Gleichung für einen rationalen Werth des x der Werth des $y = 0$ wird, zuzuschreiben haben.

Was die aus jenen zwei Gleichungen (η) und (π) hervorgehenden Exponentialgleichungen betrifft, so werden sich dieselben folgendermassen gestalten:

Aus der Gleichung (η) ergibt sich

$$u = e^y = e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x \text{ oder } a^y = a^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{la}$$

und mit diesem analog aus π

$$u_1 = e^{y_1} = e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{-1} \text{ oder } a^{y_1} = a^{\sqrt{x^2-1}} \cdot x^{-la}$$

a) Wenn wir nun hierin anstatt x den Werth $(z+1)$ einsetzen, ergibt sich

$$u = e^y = e^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)$$

oder

$$a^y = a^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{la}$$

und analog

$$u_1 = e^{y_1} = e^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{-1}$$

oder

$$a^{y_1} = a^{\sqrt{z(z+2)}} \cdot (z+1)^{-la}$$

b) Für $x^2 = (z^2+1)$ ergeben sich die beiden Gleichungen

$$u = e^z \cdot \sqrt{z^2+1} \text{ und } u_1 = \frac{e^z}{\sqrt{z^2+1}}$$

und in die beiden $z = tg\,v$ eingesetzt ergibt

$$u_1 = e^{tg\,v} \cdot \cos v, \quad u = e^{tg\,v} \cdot \sec v$$

und so lassen sich unendlich viele solcher Gleichungen entwickeln und alle nach (ζ) und (ξ) lösen.

Als letztes Beispiel für diese speciellen Gleichungen führen wir noch Folgendes an:

Es sei in der Gleichung (1) $f(x) = \sqrt{x^2 - p^2}$ und $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+p}{x-p}}$

demgemäss ergibt sich

$$(\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \sqrt{x^2 - p^2} + \frac{1}{2} l \frac{x+p}{x-p}$$

$$(\Omega) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_1 = \sqrt{x^2 - p^2} - \frac{1}{2} l \frac{x+p}{x-p}$$

und die hieraus sich ergebenden Ersatzgleichungen

$$(\varphi) \quad \ldots \ldots \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\sqrt{\left[y - \frac{1}{2} l \frac{m+p}{m-p} \right]^2 + p^2} \right.$$

$$(\psi) \quad \ldots \ldots \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\sqrt{\left[y_1 + \frac{1}{2} l \frac{m+p}{m-p} \right]^2 + p^2} \right.$$

Der Form der hierin enthaltenen Functionen gemäss werden aber die Gleichungen (φ) und (ψ) nicht allen Wurzeln der Gleichungen (μ) und (Ω) entsprechen können, da selbe bezüglich mancher Wurzeln zu grossen Annäherungsvariationen unterliegen werden. Es wird daher rathsam sein, auf ein Mittel bedacht zu sein, um jenes unter dem Logarithmenzeichen stehende Glied auf Kosten des anderen Factors zu vereinfachen. Zu diesem Behufe werden wir allgemein $\varphi(x) = z$ setzen, woraus sich, wenn wir ψ als reciproke Function von φ betrachten, $x = \psi(z)$ ergibt. Demnach wird auch $f(x) = f(\psi[z])$ werden wodurch Gleichung (1) in folgende übergeht

$$y = f[\psi(z)] \pm lz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Wenn wir nun dieses auf die Gleichungen (μ) und (Ω) anwenden, ergibt sich aus $\sqrt{\frac{x+p}{x-p}} = z$ der Werth $x = p\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)$ und demgemäss auch

$$\sqrt{x^2 - p^2} = p \sqrt{\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2 - 1} = p \cdot \frac{2z}{z^2-1}$$

demnach wird den Gleichungen (μ) und (Ω) folgende Form entsprechen:

$$(\mu_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = \frac{2pz}{z^2-1} + lz$$

$$(\Omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad y_1 = \frac{2pz}{z^2-1} - lz$$

Und die denselben entsprechenden Ersatzgleichungen werden demgemäss lauten:

$$(\varphi_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad z = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\frac{p \pm \sqrt{p^2 + (y - lm)^2}}{y - lm} \right]$$

$$(\psi_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad z_1 = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[\frac{p \pm \sqrt{p^2 + (y + lm)^2}}{y + lm} \right]$$

Wir wollen nun die Wurzeln jener beiden Gleichungen untersuchen und finden, wenn wir nach der schon früher angeführten Art vorgehen, für das positive Minimum des zweiten Factors der Gleichung (μ_1) den Werth $lz = 0$ für $z = 1$.

Hierfür ergibt sich

$$y = \frac{2pz}{z^2 - 1}$$

worin für $z = 1$ der Werth des y ein unendlicher ist. Daraus lässt sich leicht ermitteln, dass für einen endlichen Werth des y auch $z \gtrless 1$ sein muss, und zwar ist für $z > 1$ auch $y > \frac{2pz}{z^2 - 1}$, woraus die Folgerung $y(z^2 - 1) > 2pz$, oder

besser gesagt

$$z^2 - \frac{2p}{y} . z - 1 > 0$$

hervorgeht.

Diesem Ergebnisse zufolge geht nun schliesslich die Relation

$$z > \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

hervor, welche uns die Beschaffenheit der beiden ersten Wurzeln klar macht, wenn wir die Zeichen $\pm$ in Berücksichtigung ziehen.

Selbstverständlich wird in diesem Falle das negative Zeichen keine reelle Wurzel ergeben können, da z negativ wird, wie aus obiger Relation leicht zu ersehen.

Für $z < 1$ wird auch $y < \frac{2pz}{z^2 - 1}$ und demnach analog die Relation

$$z < \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

sich ergibt, in welchem Falle aber y immer negativ sein wird, da beide Factoren der Gleichung (μ_1) für $z < 1$ unbedingt negativ sein müssen.

Ferner wird sich auch für das positive Minimum des ersten Factors $\frac{2pz}{z^2 - 1} = 0$ der Werth $z = \infty$ ergeben; in welchem Falle wieder $y = lz$ sein wird.

Wird nun $\frac{2pz}{z^2 - 1} > 0$, so wird auch $z < \infty$ und $y > lz$ oder $z < e^y$; ferner auch demselben zufolge $z > 0$. Es ist somit der Grenzwerth für die dritte Wurzel $0 < z < e^y$.

Da nun weiter keine endlichen Maximal- und Minimalwerthe für die Factoren der Gleichung vorkommen, so wird dieselbe dem obigen zufolge 3 reelle Wurzeln besitzen, von denen eine für ein negatives y gilt.

Anders verhält es sich aber bei der Gleichung (Ω_1), wo der zweite Factor ein negativer Logarithmus ist, und demzufolge für $z < 1$ positive Werthe des y in der Gleichung sich ergeben.

Dieses wird jedoch nur unter der Bedingung stattfinden, wenn der absolute Werth des zweiten Factors grösser ist als jener des ersten, das heisst wenn $lz > \frac{2pz}{z^2 - 1}$ oder, mit Worten ausgedrückt, z so klein ist, dass es einen so negativ grossen Logarithmus ergibt, welcher den absoluten Werth des ersten Factors überschreitet, und somit der negative Werth des negativen zweiten Factors mit Bezug auf den absolut kleineren negativen Werth des positiven ersten Factors einen positiven Rest ergeben muss, welcher dem Werthe des y entspricht. Ferner wird auch die Form der beiden Wurzeln für die Bedingung $z > 1$ eine Aenderung erleiden, indem in der Gleichung (Ω_1), wie schon bemerkt, der negative Logarithmus seinen Einfluss übt.

Es wird für $z = 1$ auch wieder $y = \frac{2pz}{z^2 - 1}$ sein, und für $z > 1$ $y < \frac{2pz}{z^2 - 1}$ welcher Fall dem früheren entgegengesetzt ist.

Daraus ergibt sich analog zu dem vorigen

$$1 < z < \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

als Näherungswerth der zwei nächsten Wurzeln.

Wollen wir für die beiden ersteren Wurzeln die Näherungswerthe finden, so betrachten wir die Gleichung (Ω_1) in jenem Stadium, wo $z = 0$ ist. Es ist leicht ersichtlich, dass in diesem Falle $y = \infty$ werden muss; als bekannte Bedingung der beiden ersteren Wurzeln gilt aber auch $z < 1$. Soll nun $y < \infty$ werden, so wird $z > 0$ werden, und somit sich zwischen 0 und 1 bewegen müssen, d. h. $0 < z < 1$.

Wir wollen nun auch eruiren, welchen Bedingungen z entsprechen muss, um erstens positive, zweitens negative Werthe des y zu ergeben.

Bekanntlich ist der kleinste positive Werth die Grösse 0, es wird demnach dieser Werth den Uebergang der positiven y in negative bilden.

Es sei denn

$$0 = y = \frac{2pz}{z^2 - 1} - lz$$

folglich

$$\frac{2pz}{z^2 - 1} = lz$$

woraus sich ergibt

$$2p = l\left(z^{\frac{z^2-1}{z}}\right) \text{ und } z^{\frac{z^2-1}{z}} = e^{2p}$$

Wenn wir nun hierin für $\frac{z^2 - 1}{z}$ die Grösse u einsetzen, erhalten wir:

$$z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}$$

und daraus durch Substitution

$$e^{2p} = \left[\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\right]^u$$

oder

$$u\, l\left[\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\right] = 2p$$

Die Ersatzgleichung erhält daher folgende Form:

$$u = \mathop{E}_{m=q}^{m=k}\left(\frac{2p}{l\left[\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + 1}\right]}\right)$$

aus welcher der gesuchte Werth berechnet, uns dann durch Substitution den Werth z ergibt. Wir wollen uns jedoch blos mit dem Ergebnisse begnügen, dass z in diesem Falle immer grösser als 1 sein muss. Nennen wir diesen Anulationswerth M, so ergibt sich, da für $z = 0$ der Werth des y ein unendlicher ist, z sich zwischen 0 und M bewegen wird, d. h. $0 < z < M$ sein. Da nun aber y für den Werth $z = 1$ den Werth $y = \infty$ und für $z = \infty$ denjenigen,

wo $y = -\infty$, annimmt, so müssen wir jene Grenzen des z zwischen 0 und M näher untersuchen; denn, wie ersichtlich, liegt jener Werth $z = 1$ zwischen diesen Grenzen. Betrachten wir zu diesem Behufe die Gleichung (Ω_1) in dem Momente, wo der erste Factor, d. i. $\frac{2pz}{z^2-1} = 0$ wird; in diesem Falle muss, wie ersichtlich, auch $z = 0$ sein, woraus sich die Relation $y = -lz$ oder $z = e^{-y}$ ergibt.

Wird nun $1 > z > 0$, so wird auch die Bedingung $z > e^{-y}$ aus dem Gesagten hervorgehen. Aber auch für $1 < z < M$ gilt dieselbe Bedingung, jedoch mit dem Unterschiede, dass im ersten Falle $(-lz)$ eine unbedingt positive Grösse ist, demnach auch y positiv sein kann, wogegen im zweiten Falle $(-lz)$ negativ bleibt, daher y nie positiv werden kann, da es erst dann den kleinsten negativen Werth erreicht, wenn $z = M$ wird.

Es ist demgemäss der Grenzwerth $0 < z < M$ in zwei verschiedene Grenzwerthe getheilt, von denen der erste $1 > z > 0$, und der zweite $1 < z < M$ ist, wobei der erste positiven, der zweite dagegen negativen Werthen des y entspricht.

Ist nun der Werth des $z > M$, so wird y wieder positiven Werthen entsprechen, und dieses wird bis zu der Grenze

$$\frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

der Fall sein; also, wenn die Relation

$$M < z < \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

dem betreffenden z-Werthe entspricht.

Wird nun aber

$$z > \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

so wird y wieder negativen Werthen entsprechen und wird mit dem Werthe $z = \infty$ negativ unendlich werden. Es wird demgemäss die Relation

$$\infty \overline{\geqq} z > \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$$

abermals negativen Werthen des y entsprechen.

Es lässt sich daher die Schlussfolgerung aufstellen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < z < 1 \\ M < z < \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1} \end{array}\right\} + y$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 < z < M \\ \infty \overline{\geqq} z > \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1} \end{array}\right\} - y$$

Ferner

$z = M$	$z = 1$	$z = 0$	$z = \infty$	$z = \frac{p}{y} \pm \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}$
$y = 0$	$y = \infty$	$y = \infty$	$y = -\infty$	$y = \infty$

2. Nachdem wir diese Form von Gleichungen untersucht haben, wollen zu der complicirteren Form von logarithmischen Gleichungen übergehen, d Beschaffenheit es erfordert, besondere Regeln aufzustellen, um zu richtigen sultaten zu gelangen. Es ist dies jene Form von Gleichungen, deren Fact rationale Functionen von logarithmischen Functionen sind.

Die allgemeine Form dieser Gleichungen lässt sich durch den Ausdruc

$$1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f[l\varphi(x), l\psi(x)] \pm f[l\chi(x), l\Theta(x)]$$

darstellen. Die allgemeine Ersatzgleichung wird daher folgende Form besitz

Setzen wir vor Allem $l\varphi(x) = z$, wobei $l\varphi(x)$ der meist complicirte druck sei; so ergibt sich, wenn φ_1 die reciproke Function von φ ist, $x = \varphi_1$ und somit auch

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad y = f[z, l\psi[\varphi_1(e^z)]] \pm f[l\chi[\varphi_1(e^z)], l\Theta[\varphi_1(e^z)]]$$

demgemäss wenn F die reciproke Function von f bedeutet,

$$(3) \quad . \; . \; . \quad z = \mathop{E}_{m=q}^{m=k} \Big[F\big\{[y \mp f[l\chi[\varphi_1(e^z)], l\Theta[\varphi_1(e^z)]]], l\psi[\varphi_1(e^z)]\big\}\Big]$$

Wenn wir diese Procedur mit allen jenen logarithmischen Functionen du führen, d. h. $l\psi(x) = u$, $l\chi(x) = v$, $l\Theta(x) = w$ setzen, sodann x daraus fi und, wie oben angedeutet, in die Gleichung substituiren, so ergeben sich verschiedene Ersatzgleichungen, nämlich

$$z = E_1, \qquad u = E_2, \qquad v = E_3, \qquad w = E_4$$

aus denen sich alle hierin bestehenden Wurzeln berechnen lassen. Es wird r lich immer jene Ersatzgleichung den geringsten Variationen einer solchen Wu entsprechen, welche durch ein Maximum oder Minimum jenes Factors, besser gesagt, jenes Logarithmus entstanden ist, wie die Ersatzgleichung sel d. h. ist die Wurzel durch das Minimum oder Maximum z. B. von $u = l\psi$ entstanden, so wird die Ersatzgleichung E_2 für die gefundene Relation u den geringsten Variationen gegen u convergiren.

Wir werden nun diese allgemeine Methode auf specielle Fälle anwen und jene Punkte, welche eine Vereinfachung zulassen, hervorheben. Wird jener Functionen als $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $\chi(x)$ und $\Theta(x)$ einer Exponentialgrösse sprechen, deren Basis eine Constante ist, so wird sich selbstverständlich a die Anzahl der Wurzeln ändern, je nachdem, wie der Exponent der betreffen Exponentialgrösse beschaffen ist.

Unserer Voraussetzung zufolge, dass f und f rationale Functionen s können wir unter gewissen Umständen die allgemeine Gleichung (1) vereinfac

Wir wollen zur einfacheren Schreibweise derselben die logarithmis Functionen $l\varphi(x)$, $l\psi(x)$, $l\chi(x)$, $l\Theta(x)$ durch A, B, C, D ausdrücken und erha demnach für Gleichung (1) den Ausdruck

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f(A, B) \pm f(C, D)$$

Betrachten wir zunächst diese Gleichung unter jenen Umständen, als der Glieder A, B, C, D zu einem in unserem Sinne rationalem Ausdrucke welche Eventualität nur in jenem Falle möglich ist, als $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, auch constante Grössen ausser der Variablen x enthalten können, d. h.

espective auch mehrere dieser Functionen, Exponentialgrössen, deren Basis gend eine Constante ist, darstellen. In diesem Falle wird der Exponent eine tionale oder auch irrationale Function von x sein können, wobei im ersteren tatus die Gleichung (4), respective (1) vereinfacht wird.

Z. B. es wäre $\varphi(x) = a^{px+q}$, worin a, p, q constante Grössen bedeuten; wird demzufolge $l\varphi(x) = (px+q)\,la$ sein und somit $f(A,B) = f(la\,.\,l[\psi(x)]^{px+q})$, odurch sich ergibt, dass sodann B zu einer irrationalen Function wird, wenn (x) keine Exponentialgrösse oben erwähnter Art ist. Ist dieses also in obiger leichung der Fall, so wird dieselbe unter jenen Umständen folgende Form halten

$$y = f(B_1) \pm f(C, D)$$

Würde es sich aber gestalten, dass sowohl $\varphi(x)$ als auch $\psi(x)$ einer solchen xponentialgrösse entsprechen würde, so erhielten wir für $f(A, B)$ eine rationale unction, welche das Product der Exponenten der beiden Exponentialgrössen m Multiplicator hätte, der Multiplicand aber eine rein constante Grösse wäre. ir wollen daher einige auf solche Art entstandene specielle Fälle anführen nd untersuchen.

Es sei die Gleichung (a) . . . . $y = \alpha(x)\,l\beta(x) \pm l\gamma(x)$ der Untersuchung u unterziehen.

In diesem Falle müsste die Gleichung (1) folgenden Bedingungen entprechen.

$$f(A, B) = A\,.\,B \qquad f\,C\,.\,D = C + D$$

ie auch

$$\varphi(x) = e^{\alpha(x)}, \quad \beta x = \psi(x), \quad \gamma(x) = \chi(x)\,.\,\theta(x)$$

Die Ersatzgleichungen dieser Form werden sich auf folgende Weise rgeben.

Setzen wir in der Gleichung (a) $\gamma(x) = z$, so ergibt sich, wenn wir γ_1 als eciprok von γ betrachten, sofort $\alpha(x) = \alpha[\gamma_1(z)]$ und $\beta(x) = \beta[\gamma_1(z)]$; demmäss auch

$$\text{)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = \alpha[\gamma_1(z)]\,l\beta[\gamma_1(z)] \pm lz$$

nd somit

$$\text{)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad z = \mathop{E}_{m=q}^{m=k} [e^{\mp[y - \alpha[\gamma_1(m)]\,l\beta[\gamma_1(m)]]}]$$

Betrachten wir nun den ersten Summanden der Gleichung (a), so finden ir, dass derselbe ein Product ist, demnach aus jedem Factor desselben eine satzgleichung hervorgeht; es werden sich sonach die beiden Ausdrücke

$$\text{)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} z = \mathop{E}\limits_{m=q}^{m=k} \left[\gamma\left[\alpha_1\left(\dfrac{y \mp lm}{l\beta[\gamma_1(m)]}\right)\right] \right] \\ z = \mathop{E}\limits_{m=q}^{m=k} \left[\gamma\left[\beta_1\left(e^{\frac{y \mp lm}{\alpha[\gamma_1(m)]}}\right)\right] \right] \end{cases}$$

geben.

Diese Ersatzgleichungen werden allen möglichen Wurzeln der Glei (α) entsprechen müssen, wie es in Betreff einer normalen Variation des rungswerthes zulässig ist.

Als zweites Beispiel gelte die Gleichung

$$y = \alpha(x) \pm l\beta(x) \,.\, l\gamma(x)$$

In diesem Falle werden folgende Bedingungen bei der Gleichung (1 gewendet werden müssen, um uns das vorstehende Resultat zu ergeben.

$$f(A, B) = A \,.\, B^{\pm 1}, \quad f(C, D) = C \,.\, D$$

$$\varphi(x) = e^{\Omega(x)}, \quad \psi(x) = e^{\upsilon(x)}, \quad \Omega(x) \,.\, (\upsilon(x))^{\pm 1} = \alpha(x), \quad \chi(x) = \beta(x), \quad \theta(x) =$$

Die derselben entsprechenden Ersatzgleichungen werden also sein:

$$x = \underset{m \equiv q}{\overset{m \equiv k}{E}} \Big[\alpha_1 \left[y \mp l\beta(m) \,.\, l\gamma(m) \right] \Big]$$

$$x = \underset{m \equiv q}{\overset{m \equiv k}{E}} \Big[\beta_1 \Big(e^{\mp \left[\frac{y - \alpha(m)}{l\gamma(m)} \right]} \Big) \Big]$$

$$x = \underset{m \equiv q}{\overset{m \equiv k}{E}} \Big[\gamma_1 \Big(e^{\mp \left[\frac{y - \alpha(m)}{l\beta(m)} \right]} \Big) \Big]$$

Als drittes Beispiel führen wir die Gleichung an:

$$y = [l\alpha(x)]^n \pm ll\beta(x)$$

In diesem Falle werden folgende Bedingungen bei der Gleichung statthaben: $f(A, B) = (A \pm B)^n$, $f(C, D) = l(C \pm D)$

Die übrigen Bedingungen sind nach dem zuvor Angeführten ersichtlic

Offenbar ist hier die Function f keine rationale; wir ersehen daraus, wenn wir die Rationalitätsbedingung der beiden Functionen f und f aufh sich abermals eine neue Quelle specieller Gleichungen ergibt, welche die frü an Complication übertreffen. Wir haben demnach mittelst der Gleichun einer umfassenden Allgemeinheit der logarithmischen Gleichungen G geleistet.

Wie wir schon im ersten Capitel bemerkt haben, gibt es eine Ar Exponentialgrössen, welche unter dem Ersatzzeichen zu keinem bestimmte sultate führen. Es entsteht nämlich nicht nur eine unverhältnissmässig weichung vom Näherungswerthe, sondern auch eine zwischen $+\infty$ und variirende Schwingung der Werthe, so, dass die Ersatzgleichung keinen I tatswerth ergibt.

Wir wollen diese Art von Ersatzgleichungen discontinuirliche benenn dieses von der Discontinuität jener Linie herrührt, welcher die betreffende scendente Gleichung entspricht, demnach ist auch jene Linie, welcher die betre Ersatzgleichung entspricht, eine discontinuirliche.

Dieses ist meistens aber dann der Fall, wenn der Ausdruck unter Ersatzzeichen keinen festen Anhaltspunkt, in Form einer oder mehrere stanten Grössen besitzt.

Insbesondere wollen wir auf die Ausdrücke

$$y \pm [f(m)]^{\varphi(m)}, \quad y \pm \varphi(m)\, lf(m), \quad y \pm (lm)^{lm} \text{ u. s. w.}$$

aufmerksam machen, welche schon an und für sich die Wahrscheinlichkeit, bestimmten Werth zu ergeben, in Frage stellen.

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

IV.

Die vorerwähnte Eventualität haben wir aus jenem Grunde in Erinnerung bracht, weil bei den aus der Gleichung (1) hervorgehenden Gleichungen es ter der Fall ist, dass eine discontinuirliche Ersatzgleichung sich ergibt, weshalb ir hierauf aufmerksam machen und zu diesem Behufe auch ein ähnliches eispiel durchführen wollen.

Es wäre die Gleichung

$$b) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = x^x - l\,\frac{x^2+1}{x}$$

r Lösung zu unterziehen; es werden sich auch demzufolge die Ersatzleichungen

$$b_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = \mathop{E}_{m=q}^{m=k}\left[\frac{e^{(m^m-y)}}{2} \pm \sqrt{\frac{e^{2(m^m-y)}}{4} - 1}\right]$$

$$b_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = \mathop{E}_{m=q}^{m=k}\left[\left(y + l\,\frac{m^2+1}{m}\right)^m\right]$$

$$b_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = \mathop{E}_{m=q}^{m=k}\left[\frac{l\left(y + l\,\frac{m^2+1}{m}\right)}{lm}\right]$$

rgeben, von denen jedoch nur die Gleichungen (b_2) und (b_3) continuirlich sind, obei (b_2) für Werthe des x, welche kleiner oder gleich 1 sind, und (b_3) für lche, welche grösser als 1 sind, zu verwenden ist.

Zu den Wurzeln dieser Gleichung gelangen wir wie folgt:

Das Minimum des zweiten Gliedes ergibt sich für $x = 1$, demnach $\frac{x^2+1}{x} = l2$; hiefür wird $x^x = y + l2$ und für $x > 1$ wird $x^x > y + l2$ oder $> \frac{l(y+l2)}{lx}$. Aber auch für $x < 1$ müsste hier x^x grösser als $y + l2$ werden, nn y positiv sein soll; da nun aber x^x unter derselben Bedingung sich im schen Abnehmen befindet, so wird $x^x < y + l2$ und y negativ, wenn $x < M$, bei M den Werth des x bedeutet, wenn $y = 0$ wird. Ist $x > M$, so wird $\lt y < 1$ sein.

Wir wollen nun obige Ungleichung $x > \frac{l(y+l2)}{lx}$ genauer untersuchen und den, wenn wir die Bedingung

$$x > 1$$

in Betracht ziehen, dass wir anstatt derselben den Ausdruck $x = 1 + \delta$ setzen kön[n]
Wenn wir nun dieses rechter Hand der Ungleichung einführen, so ergibt [s]

$$x > \frac{l(y + l2)}{l(1+\delta)}$$

worin δ eine positive mit y in geradem Verhältnisse zunehmende Grösse [be]deutet. Anstatt dessen können wir aber auch schreiben

$$x = \frac{l(y + l2)}{l(1+\delta)} + \delta$$

oder wenn wir mit $l(1+\delta)$ multipliciren

$$xlx = l(y + l2) + l(1+\delta)^{\delta}$$

und schliesslich

$$x^x = (y + l2)(1+\delta)^{\delta}$$

woraus ersichtlich ist, dass beim Wachsthum des δ das x^x im raschen Zuneh[men] begriffen ist.

Für das Minimum des ersten Gliedes erhalten wir $x^x = 1$ für $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Hi[er] ergibt sich also $l\frac{x^2+1}{x} = 1 - y$, für $x > 0$ ist $x^x < 1$, also auch $l\frac{x^2+1}{x} < (1$ oder

$$x < \frac{e^{1-y}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e^{1-y}}{2}\right)^2 - 1}$$

wogegen für $x > 1$, ist $x^x > 1$, somit auch $l\frac{x^2+1}{x} > 1 - y$, und

$$x > \frac{e^{1-y}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e^{1-y}}{2}\right)^2 - 1}$$

wo y entweder negativ oder den Werth $(1 - l2)$ nicht übersteigen darf, wen[n] reell bleiben soll. Es wird demgemäss für y, deren Werthe grösser als $(1 -$ sind, nur eine Wurzel stattfinden, deren Näherungswerth m sich aus Relation

$$x > \frac{l(y + l2)}{l(1+\delta)}$$

ergeben wird.

Ein zweites Beispiel liefert uns die Gleichung (1), wenn wir in dersel[ben] $f(A, B) = A \cdot B$, $f(C, D) = C + D$, sodann $\varphi(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, $\psi(x) = x$, $\chi(x) = x^2$ und $\theta(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ einsetzen.

Die Gleichung wird daher die Form

$$\text{(c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{x+1}{x-1}\, lx + l\frac{x^2-1}{x^2-2}$$

besitzen, woraus sich, wenn wir hierin $\frac{x^2-1}{x^2-2} = z$ setzen, die Gleichung

$$y = \left[\frac{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}+1}{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}-1}\right] l \sqrt{\frac{1-2z}{1-z}} + lz$$

gibt, welcher folgende Ersatzgleichungen entsprechen.

$$) \; \ldots \ldots \; z = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m = k} \left[\frac{e^{y} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}\right)^{\frac{1+\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}{1-\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}}}{\overline{\underline{m > 1}} \quad \overline{\underline{m < \frac{1}{2}}}} \right]$$

Diese Ersatzgleichung scheint für den ersten Moment discontinuirlich zu
n; was jedoch hier nicht der Fall ist, weil die Function $\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}$, mit
ücksicht auf die unterhalb angegebenen Grenzen, einer sehr geringen Variation
terliegt, und demgemäss auch die hieraus sich ergebenden Werthe continuir-
h sein werden.

$$) \; \ldots \ldots \; z = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m = k} \left[\frac{e^{2} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}+2\right)(y-lm)}{\sqrt{\frac{1-2m}{1-m^2}}+1}\right) - 1}{e^{2} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}+2\right)(y-lm)}{\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}+1}\right) - 2} \right]$$

$$) \; \ldots \; z = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m = k} \left[\frac{\left[\left(\frac{y-lm}{l\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}\right)+1\right]^2 - \left[\left(\frac{y-lm}{l\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}\right)-1\right]^2}{\left[\left(\frac{y-lm}{l\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}\right)+1\right]^2 - 2 \cdot \left[\left(\frac{y-lm}{l\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}}\right)-1\right]^2} \right]$$

Wenn wir also eine Substitutionsgleichung ihrer Continuität gemäss beur-
ilen wollen, so müssen wir die Functionen, welche in derselben vorkommen,
er Variation nach prüfen.

Das erste Glied der Gleichung (c) ist ein Product, dessen Multiplicator ein
garithmus ist. Um nun die Wurzeln der Gleichung (c) zu untersuchen, wollen
das Minimum dieses Gliedes eruiren. Dieses wird sich jedoch in diesem
lle eigenthümlich gestalten, da für drei verschiedene Werthe des z drei nahezu
iche Minimalwerthe dieses Gliedes sich ergeben.

a) Für $z = \infty$ wird dieses Glied seinen Minimalwerth in der Zahl $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} l \sqrt{2}$
eichen, welcher Werth durch die Zahl 2·010135 ausgedrückt ist.

Für $z=2$ wird sich das zweite Glied durch den Ausdruck $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} l\sqrt{3}$ ausdrücken lassen, welcher, wie ersichtlich ist, der Zahl 2·049916 entspricht.

Wir ersehen daraus, dass von dem Werthe $z=\infty$ bis $z=2$ der Werth des betreffenden Gliedes im Zunehmen begriffen ist.

Für $z=0$ wird

$$\frac{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}+1}{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}-1} \,.\, l\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}} = 0 \,.\, \infty$$

welches ein unbestimmter Werth ist, der jedoch nach der bekannten Methode untersucht $0 \,.\, \infty = 2$ ergibt. Hier wird also offenbar von dem Werthe $z=2$ bis $z=0$ der Werth jenes Gliedes im Abnehmen begriffen sein.

Es wird aber auch der Maximalwerth jenes Gliedes zweien verschiedenen Werthen des z entsprechen; es ist nämlich für $\left.\begin{matrix} z=\frac{1}{2} \\ z=1 \end{matrix}\right\}$ das Maximum des Gliedes durch den Werth ∞ ausgedrückt, wobei noch zu bemerken ist, dass jenes Glied, für Werthe des z, welche zwischen $z=\frac{1}{2}$ und $z=1$ liegen, imaginär wird.

Den aufgestellten Beziehungen zufolge lässt sich für das Minimum des ersten Gliedes der besagten Gleichung die Relation $lz=y-2$ aufstellen. Lassen wir nun $z>0$ werden, so ergibt sich auch $lz<y-2$ und daraus $z<e^{y-2}$. Es wird aber auch für $z=0·5$ der Ausdruck $lz=y-\infty$ gelten, weshalb auch für $z<0·5$ der Ausdruck $lz>y-\infty$ oder $z>e^{y-\infty}$ lauten wird.

Demzufolge ergibt sich die Relation

$$0·5>z>0,\quad e^{y-\infty}<z<e^{y-2}$$

welche uns auch kundgibt, dass y auch den Werth $-\infty$ erreichen kann, wenn z sich zwischen den besagten Grenzen 0·5 und 0 bewegt.

Ferner ergibt sich für $z>0·5$ und $z<1$ ein imaginäres y; also für die Relation $$0·5<z<1$$

Ueberschreitet nun z den Werth 1, so ergeben sich für y abermals reelle Werthe; es wird demgemäss jene der Gleichung (c) entsprechende Linie zwei Flügel besitzen. Um nun für jene Werthe des z, welche sich zwischen 1 und ∞ bewegen, Näherungswerthe zu erzielen, werden wir auch das Minimum des zweiten Gliedes zu Hilfe nehmen; dasselbe ergibt sich, wie ersichtlich, für $z=1$, also für den ersten Grenzwerth. Es wird aber in diesem Falle das zweite Glied sein Minimum in 0 erreichen, demnach für dasselbe $y=q$, welches wir zur kürzeren Schreibweise für das zweite Glied setzen wollen, also

$$q=\frac{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}+1}{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}-1} \,.\, l\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}$$

Wird nun $z > 1$, so wird auch demzufolge $y < q$, und setzen wir consequent nit $z > 1$ den Ausdruck $z = 1 + \delta$ in den logarithmischen Factor von q ein, so rgibt sich, da δ eine beliebige Zahl ist,

$$\frac{y}{l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}} < \frac{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}+1}{\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}}+1}$$

s Resultat.

Hier kommen wieder jene zwei Werthe $z = 2$ und $z = \infty$ in dem Sinne m Vorschein, als für $\delta = 1$ das $z = 2$ und für $\delta = \infty$ auch $z = \infty$ wird. Wird n $\delta < 1$ oder $\delta > 1$, so wird y im Zunehmen begriffen sein; im zweiten Falle doch nur mit Hilfe des zweiten Gliedes, welches unter dieser Bedingung im achsthum begriffen ist.

Aus der letzten Relation ergibt sich sofort

$$\sqrt{\frac{1-2z}{1-z}} < \frac{y+l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}{y-l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}$$

d schliesslich erhalten wir den Ausdruck:

$$z < \left[\frac{\left[\frac{y+l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}{y-l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}\right]^2 - 1}{\left[\frac{y+l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}{y-l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}\right]^2 - 2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

lche Relation uns den Näherungswerth insoweit charakterisirt, als für δ entsprechender, mit y in geradem Verhältnisse zunehmender Werth ein-etzt wird.

Soll nun aber die Relation (α) positive Werthe des z ergeben, was doch bedingt nothwendig ist, wenn y reell sein soll, so wird folgenden zwei Be-gungen Genüge geleistet werden müssen.

Es muss nämlich in der Relation (α) der Ausdruck

$$\left[\frac{y+l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}{y-l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}}}\right]^2$$

weder < 1 oder > 2 sein, woraus sich sodann durch Rechnung für die erste dingung (< 1) das Resultat

$$\delta > -1$$

für die zweite Bedingung (> 2) das Resultat:

$$l\sqrt{2+\frac{1}{\delta}} > y\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \quad 2+\frac{1}{\delta} > e^{2y\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

und schliesslich

$$\delta < \left[e^{2y\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} - 2\right]$$

ergibt, woraus die Relation entspringt

$$-1 < \delta < \left[e^{2y\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - 2\right]$$

deren Ergebniss, in die Relation (α) eingesetzt, uns zur Bestimmung des erst Näherungswerthes genügt.

Wollen wir z. B. für den Werth $y = 2{\cdot}33$ das z berechnen, so setzen diesen Werth in die betreffende Relation, woraus sich $\delta < 0{\cdot}226\ldots$ ergibt; setz wir also $\delta = 0{\cdot}2$ und substituiren diesen Werth in die Relation (α), so ergibt si hieraus $z < 1{\cdot}3\ldots$ demnach können wir $z = 1{\cdot}2$ als ersten Näherungswerth annehmen. Daraus ergibt sich mittelst der Ersatzgleichung (c_1) Folgendes:

$m_1 = 1{\cdot}162636$ $\quad m_4 = 1{\cdot}146960$ $\quad m_7 = 1{\cdot}151470$ $\quad m_{10} = 1{\cdot}150722$
$m_2 = 1{\cdot}062627$ $\quad m_5 = 1{\cdot}149754$ $\quad m_8 = 1{\cdot}150912$ $\quad z = 1{\cdot}1507\ldots$
$m_3 = 1{\cdot}135780$ $\quad m_6 = 1{\cdot}152450$ $\quad m_9 = 1{\cdot}150787$

auf 4 Decimalen genau berechnet.

Aus diesem ergibt sich mittelst der Gleichung

$$x = \sqrt{\frac{1-2z}{1-z}} = 2{\cdot}938003$$

Als nächstes Beispiel diene Folgendes:

Es sei in der Gleichung (1) $f(A, B) = A : B$ und $f(C, D) = C : D$, sod $\varphi(x) = e^{x^2+1}$, $\psi(x) = e^x$, $\chi(x) = x + 3$ und $\theta(x) = x + 1$, so wird sich Gleichung

$$(d) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{x^2+1}{x} + \frac{l(x+3)}{l(x+1)}$$

ergeben, woraus die Substitutionsgleichung

$$(d_1) \quad \ldots \quad x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}}\left[\frac{1}{2}\left(y - \frac{l(m+3)}{l(m+1)} \pm \sqrt{\left[y - \frac{l(m+3)}{l(m+1)}\right]^2 - 4}\right)\right]$$

folgert.

Wollen wir nun die Anzahl und die Näherungswerthe der Wurzeln Gleichung (d) eruiren, so gehen wir nach der bekannten Art vor.

Das Minimum des zweiten Gliedes ergibt sich für $x = -1$, wo $\frac{l(x+3)}{l(x+1)} = 0$ wird. Ist nun x im Wachsthum begriffen, also $x > -1$, so wi auch demzufolge $\frac{l(x+3)}{l(x+1)} < 0$ werden, also im Abnehmen begriffen sein u wird bei $x = 0$ den Werth $\pm\infty$ erreichen. Da nun aber auch das erste Gl für $0 > x > -1$ negativ bleibt, so wird die Relation

$$0 > x > -1$$

nur für negative y-Werthe Giltigkeit haben. Wird nun $x > 0$, so wird y positiv werden und im Abnehmen begriffen sein, welche Eventualität bis zu dem Werthe $x = 1$ anhalten wird, für welchen Werth $y = 4$ wird; also einen rationalen Werth des x zur Wurzel hat. Ist $x > 1$, so wird y ebenfalls positiv bleiben und im Zunehmen begriffen sein und erreicht für $x = \infty$ sein Maximum $y = \infty$.

Es ist aber für den Werth $x = \infty$ ein Minimum beim zweiten Gliede vorhanden, welches uns die Grenzwerthe jener Wurzeln, welche sich für x zwischen den Grenzen 1 und ∞ ergeben, näher bestimmen wird.

Für $x = \infty$ ist nämlich $\frac{l(x+3)}{l(x+1)} = 1$, somit für $x < \infty$ auch $\frac{l(x+3)}{l(x+1)} > 1$, demnach $\frac{x^2+1}{x} = y - 1$ in $\frac{x^2+1}{x} < y - 1$ übergeht, woraus sich sodann

$$x < \frac{y-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1}$$

ergibt.

Da sich nun aber x zwischen den Grenzen 1 und ∞ bewegt, so können wir auch sagen, dass eine jede dieser Wurzeln auch grösser als 1 sein wird, welche Eventualität mit der letzten Ungleichung folgende Relation ergibt:

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad 1 < x < \frac{y-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1}$$

Das negative Zeichen in der letzten Ungleichung wird für jene Werthe des x gelten, welche sich zwischen 0 und 1 bewegen, somit

$$(\beta) \quad \ldots\ldots \quad 0 < x < \frac{y-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1}$$

die Relation für die zweite Wurzel für positive y sich ergibt.

Aus der letzten Relation finden wir auch den Minimalwerth des y, indem wir $\frac{y-1}{2} = 1$ setzen; daraus ergibt sich $y = 3$ als Minimalwerth, für welche die rechte Seite der letzten Relation 1 wird, also in den Ausdruck $0 < x < 1$ übergeht. Für $y = -1$ wird $x > -1$, also der erste reelle negative Werth. Es wird also für jene y-Werthe, welche sich zwischen (-1) und $(+3)$ befinden, das x imaginär sein.

Es wäre z. B. in der Gleichung (d) $y = 8$, so wird sich der Näherungswerth der ersten Wurzel aus der Relation (β) $x < 6 \cdot 85$ ergeben, somit nehmen wir $x = 6 \cdot 7$, welches, in die Ersatzgleichung (d_1) eingesetzt, $x = 6 \cdot 73935 \ldots$ auf 3 Decimalen genau ergibt.

III.

Gleichungen mit cyklometrischen und trigonometrischen Functionen.

1. Die Methode, wie wir sie in den früheren Capiteln kennen gelernt, ist eine allgemeine und wird uns deshalb auch bei der Lösung dieser Art von Gleichungen zu richtigen Resultaten gelangen lassen. Der Unterschied der

Individualität dieser und der, in den früheren Gleichungen vorkommender
nen erfordert es jedoch, die verschiedenen Modalitäten anzuführen, unte
diese Functionen die verschiedenartigsten Einflüsse auf die Lösungsart
scendenten Gleichungen auszuüben pflegen und unter welchen sie sich i
dung mit den logarithmischen und Exponentialfunctionen zu so merkwürdi
drücken gestalten, deren geometrischer Sinn oft einen, für unsere Vor
kraft fast unfassbaren Begriff bildet.

Doch gerade so, wie es uns möglich ist, aus Gleichungen mit logarit
Functionen solche mit Exponentialfunctionen zu erzielen, so können
durch Substitution aus jenen mit cyklometrischen, solche mit trigonom
Functionen erhalten und umgekehrt.

Dieser und jener Eventualität zufolge wird sich eine jede com
transcendente Gleichung durch passende Umformungen etwa vereinfache
nur muss die erzielte Gleichung eine solche Form besitzen, welche
Anzahl und die Näherungswerthe der Wurzeln auf die einfachste Art z
gestattet.

Um nun in dieser Beziehung zum Ziele zu gelangen, ist es rath
Beschaffenheit der Wurzeln im Allgemeinen etwas näher in Augens
nehmen.

Wie es uns später klar werden wird, haben wir es hier mit Wur
zweierlei Art zu thun; es wird demgemäss die Nothwendigkeit eintrete
scheidungszeichen für diese beiden Wurzelarten aufzustellen. Betrac
zu diesem Behufe die cyklometrischen und trigonometrischen Functione
gemeinen.

Der Bogen, dessen trigonometrische Function durch irgend eine
respective Verhältniss ausgedrückt ist, kann eine unendliche Anzahl von
annehmen, von welchen jeder eine bestimmte Wurzel der Gleichung l
wird z. B. der Ausdruck

(1) . . . . $z = arc\ Sin\ x$

schon einer unendlichen Anzahl von Wurzeln entsprechen; da für ein best
die Variable z die Werthe

$$a,\ \pi - a,\ 2\pi + a,\ 3\pi - a,\ 4\pi + a \ldots \text{u. s. f.}$$

annehmen kann, wogegen für ein bestimmtes z das x nur einen be
Werth besitzen kann. Der Gleichung (1) zufolge wird auch jene aus
entspringende Gleichung

(2) . . . . $x = Sin\ z$

ähnlichen Bedingungen entsprechen müssen.

Dieser Erörterung zufolge lassen sich folgende Schlüsse aufstelle
jede Gleichung, in welcher cyklometrische oder trigonometrische Fu
vorkommen, wird einer unendlichen Anzahl solcher Wurzeln entspreche
Regel dürfte nur in manchen Ausnahmsfällen eine Aenderung erleiden,
leicht der Werth jener Function durch gewisse Umstände einer Be
unterliegt, deren Uebertretung den ganzen Ausdruck in einen imagin
wandeln würde.

Dr. Ludwig Grossmann's

heorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

V.

Um nun diese Wurzeln von den anderen durch Maxima oder Minima der zelnen Glieder der Gleichung sich ergebenden zu unterscheiden, wollen wir selben, da sich eine jede von ihrer vorhergehenden durch eine Wiederholung ganzen Kreisbogens unterscheidet, Bogenwurzeln nennen, wodurch zugleich gedrückt wird, dass dieselben $n$mal so oft vorhanden sind, als jene Wurzeln, che sich zwischen den Grenzen 0 und π bewegen; d. h. die Anzahl aller lichen Wurzeln ist das Product der Anzahl der gewöhnlichen Wurzeln und Anzahl der Bogenwurzeln, welche als eine allgemein bestehende Eventualität er Functionen, aus denen die transcendente Gleichung besteht, angesehen den müssen.

Die Theorie, welche wir zur Aufsuchung und Bestimmung der Wurzeln estellt haben, lehrt uns, den Maximal- oder Minimalwerth je eines Gliedes Gleichung zur Erhebung des Näherungswerthes einer oder unter Umständen mehrerer Wurzeln zu benützen. Wir wollen nun auch versuchen, inwieweit diese im vorliegenden Falle zum Ziele zu führen vermag.

Zu diesem Behufe wollen wir die Gleichung

$$y = e^{lg(x^2+1)} - arc\,Cos\frac{x-1}{x+1},$$ worin wir den Ausk x^2+1 als Bogenwinkel, respective Verhältniss der Kreisnlänge zum Radius, welchen wir hier der Grösse 1 gleichsetzen en, ansehen, ihren Wurzeln gemäss untersuchen.

Als Minimum des ersten Gliedes ergibt sich für $x=0$ der Werth $e^{lg\,1}$,

$$arc\,Cos\frac{x-1}{x+1} = e^{lg\,1} - y$$

Nun lassen wir aber $x>0$ werden, so wird auch das erste Glied im Wachsbegriffen sein und demzufolge, wenn y constant gedacht wird,

$$arc\,Cos\frac{x-1}{x+1} > e^{lg\,1} - y$$

raus

$$x > \frac{1 + Cos\,[e^{lg\,1} - y]}{1 - Cos\,[e^{gl\,1} - y]}$$

Fürs zweite würde $e^{tg(x^2+1)}$ für den Werth $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}$ das Maximum reichen, weshalb für endliche Werthe des y, $x \lesseqgtr \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}-1}$ sein mu

Aber auch für $x=\sqrt{x-1}$ erreicht das erste Glied einen endlichen Werth wie $x=0$, d. h. den Minimalwerth, es wird demnach für $x>0$ auch $x \gtrless \sqrt{n.x}$ sein müssen.

Aus diesen beiden Ungleichungen lässt sich nun folgende Relation stellen.

$$\sqrt{n_1.x-1} > x > \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}-1}, \quad n_1 = n+1$$

$$\sqrt{n.x-1} < x < \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}-1}, \quad n=n$$

Für das zweite Glied erhalten wir ein Minimum, wenn $x=\infty$ wird, d nach $arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}=0$ wird; und somit auch $e^{tg(x^2+1)}=y$. Wird sodann $x<$ so ergibt sich $arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}>0$ und auch

$$e^{tg(x^2+1)}>y \qquad x>\sqrt{arc\,tg\,l(y)-1}$$

erreicht nun x den Werth $x=1$, so wird $arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{2}$ und für $x>1$ w

$$arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}<\frac{\pi}{2}$$

wogegen für $x<1$

$$arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}>\frac{\pi}{2} \quad \text{respective} \quad >(4n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad <(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

demzufolge ergibt sich für $x>1$

$$e^{tg(x^2+1)}<y+\frac{\pi}{2}, \qquad x<\sqrt{arc\,tg\,l\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}$$

wogegen für $x<1$

$$e^{tg(x^2+1)}>y+\frac{\pi}{2}, \qquad x>\sqrt{arc\,tg\,l\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}$$

und endlich wird für $x=0$ das Glied

$$arc\ Cos\frac{x-1}{x+1}=(2n+1)\pi$$

Die Ersatzgleichung des angeführten Beispieles lautet nun folgen massen:

$$(a_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m=k} \left[\sqrt{arc\,tg\,.\,l\left(y + arc\,Cos\frac{m-1}{m+1}\right) - 1} \right]$$

$$(b_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m=k} \left[\frac{1 + Cos\,[e^{tg\,(m^2+1)} - y]}{1 - Cos\,[e^{tg\,(m^2+1)} - y]} \right]$$

Soll nun x reelle Werthe besitzen, so muss in der Gleichung (a_1) die Relation

$$arc\,tg\,l\left[y + arc\;Cos\,\frac{m-1}{m+1}\right] > 1$$

bestehen, woraus sich sogleich

$$m > \frac{1 + Cos\,[e^{tg\,1} - y]}{1 - Cos\,[e^{tg\,1} - y]}$$

als Resultat ergibt.

Es kann aber in der Gleichung (a) für irgend einen Werth des m, welcher natürlich positiv sein muss, da im entgegengesetzten Falle der Cosinus grösser als 1 werden möchte, der Cosinus zwei verschiedenen Bögen entsprechen, deren Logarithmus uns eine Tangente bestimmt, deren Bogen abermals ein zweifacher sein kann. Es werden sich demgemäss folgende Wurzeln ergeben:

$$arc\;Cos\;\alpha \left\{ \begin{aligned} &= arc\,\alpha_1 \\ &= arc\,\alpha_2 \end{aligned} \right.$$

der Logarithmus von $[y + arc\,\alpha_1]$ mit A_1 und von $[y + arc\,\alpha_2]$ mit A_2 bezeichnet, ergibt

$$l\,[y + arc\,\alpha_1] = A_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad arc\,tg\;A_1 \left\{ \begin{aligned} &= arc\,\beta_1 = B_1 \\ &= arc\,\beta_2 = B_2 \end{aligned} \right.$$

$$l\,[y + arc\,\alpha_2] = A_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad arc\,tg\;A_2 \left\{ \begin{aligned} &= arc\,\gamma_1 = C_1 \\ &= arc\,\gamma_2 = C_2 \end{aligned} \right.$$

woraus hervorgeht, dass

$$x_1 = E\sqrt{B_1 - 1}, \quad x_2 = E\sqrt{B_2 - 1}, \quad x_3 = E\sqrt{C_1 - 1} \;\text{ und }\; x_4 = E\sqrt{C_2 - 1}$$

sein müssen; es werden demnach bei der Gleichung (a) vier natürliche Wurzeln bestehen, welche sich also zwischen den Grenzen 0 und 2π bewegen.

Eine jede dieser Wurzeln wird aber n Bogenwurzeln entsprechen, wenn wir die Grenzen $2(n-1)\pi$ und $2n\pi$ in Betracht ziehen $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Die Proceduren einer jeden einzelnen Wurzel müssen sodann selbstverständlich unter denselben Assumtionen durchgeführt werden.

Um dieses näher erklären zu können, wollen wir ein Beispiel durchführen.

Es sei in der Gleichung (a) die Variable $y = 0$; man soll die Wurzelwerthe des x zwischen den Grenzen 0 und 2π eruiren.

Die Ersatzgleichung (a_1) erhält demgemäss die Form

$$x = \mathop{E}_{m \equiv q}^{m=k} \left[\sqrt{arc\,tg\,l\left[arc\;Cos\,\frac{m-1}{m+1}\right] - 1} \right]$$

Der erste Näherungswerth q ergibt sich aus der Relation

$$m > \frac{1 + Cos\, e^{tg\, 1}}{1 - Cos\, e^{tg\, 1}}$$

oder, was ebensoviel ist

$$m > 1\cdot07 \ldots m = 1\cdot2$$

daraus ergibt sich

$$\frac{m-1}{m+1} = 0\cdot091,\ arc\, Cos\, 0.091 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 84^0\, 46'\, 44'' = 1\cdot47967 \\ arc\, 275^0\, 13'\, 16'' = 4\cdot80350 \end{array}\right.$$

$$arc\, tg\, l\, 1\cdot47967 = arc\, tg\, 0\cdot39182 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 21^0\, 23'\, 47'' = 0\cdot3734374 = B_1 \\ arc\, 201^0\, 23'\, 47'' = 3\cdot5150200 = B_2 \end{array}\right.$$

$$arc\, tg\, l\, 4\cdot80350 = arc\, tg\, 1\cdot56934 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 57^0\, 29'\, 45'' = 1\cdot0034917 = C_1 \\ arc\, 237^0\, 29'\, 45'' = 3\cdot1450843 = C_2 \end{array}\right.$$

daraus ergibt sich also

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = 0\cdot791556 \sqrt{-1}, & x_2 = 1\cdot585881 \\ x_3 = 0\cdot059090 \quad , & x_4 = 1\cdot776552 \end{array} \right\} \text{ als } m_1$$

da nun x_1 schon an und für sich imaginär ist, und $x_3 < 1\cdot07$, so sind die beiden Wurzeln imaginär. Durch Wiederholung obiger Procedur ergibt sich, wenn wir für m den Werth von x_2 einsetzen, Folgendes:

$$arc\ Cos\ 0\cdot2265692 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 76^0\, 54'\, 10'' = 1\cdot342220 \\ arc\, 283^0\ \ 5'\, 50'' = 4\cdot940979 \end{array}\right.$$

$$arc\, tg\, l\, 1\cdot342220 = arc\, tg\, 0\cdot293324 \left\} \begin{array}{l} 16^0\, 20'\, 52'' = 0\cdot2853226 = B_1 \\ 196^0\, 20'\, 52'' = 3\cdot4271152 = B_2 \end{array}\right.$$

demnach

$$x_1 = 0\cdot845386 \sqrt{-1}, \qquad x_2 = 1\cdot557920 \} \text{ als } m_2$$

Wiederholen wir nun diese Procedur für x_1 und x_2 nochmals, so ergibt sich

$$arc\ Cos\ 0\cdot2181147 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 77^0\, 36'\, 53'' = 1\cdot3546325 \\ arc\, 282^0\, 23'\ \ 7'' = 4\cdot9285527 \end{array}\right.$$

$$arc\ tg\ l\ 1\cdot3546325 = arc\, tg\, 0\cdot303529 \left\} \begin{array}{l} 16^0\, 53'\, 4'' = 0\cdot2946892 = B_1 \\ 196^0\, 53'\, 4'' = 3\cdot4362818 = B_2 \end{array}\right.$$

demnach ergibt sich

$$x_1 = 0\cdot839827 \sqrt{-1}, \qquad x_2 = 1\cdot560859 \} \text{ als } m_3$$

ferner m_3 eingesetzt ergibt:

$$arc\ Cos\ 0\cdot2190120 \left\} \begin{array}{l} arc\ \ 77^0\, 20'\, 56'' = 1\cdot3499928 \\ arc\, 282^0\, 39'\ \ 4'' = 4\cdot9331924 \end{array}\right.$$

$$arc\ tg\ l\ 1\cdot3499928 = arc\, tg\, 0\cdot300104 \left\} \begin{array}{l} 16^0\, 42'\, 17'' = 0\cdot2915524 = B_1 \\ 196^0\, 42'\, 17'' = 3\cdot4331450 = B_2 \end{array}\right.$$

also wieder

$$x_1 = 0{\cdot}840504 \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1{\cdot}559854 \} \text{ als } m_4$$

und m_4 substituirt liefert uns

$$arc\ Cos\ 0{\cdot}218705 \left\{ \begin{array}{l} arc\ \ 77^0\,21'\,59'' = 1{\cdot}3502982 \\ arc\ 282^0\,38'\ \ 1'' = 4{\cdot}9328870 \end{array} \right.$$

$$arc\ tg\ l\,1{\cdot}3502982 = arc\ tg\ 0{\cdot}3003245 \left\{ \begin{array}{l} 16^0\,42'\,59'' = 0{\cdot}2917560 = B_1 \\ 196^0\,42'\,59'' = 3{\cdot}4333486 = B_2 \end{array} \right.$$

somit auch

$$x_1 = 0{\cdot}840426 \sqrt{-1}, \quad x_2 = 1{\cdot}559919 \} \ m_5$$

Nehmen wir nun von m_4 und m_5 den Mittelwerth, da beide nur um 0·000065 differiren, so erhalten wir

$$x_2 = 1{\cdot}5598865$$

Wollen wir nun auch x_3 und x_4 genauer bestimmen, so setzen wir jenen Werth $m_1 = 1{\cdot}776552 = x_3$ in die Ersatzgleichung (a_1) ein und verfahren unter Anwendung derselben Annahmen, unter welchen m_1 erreicht wurde, folgendermassen:

$$\frac{m-1}{m+1} = 0{\cdot}279682, \quad arc\ Cos\ 0{\cdot}279682 \left\{ \begin{array}{l} arc\ \ 73^0\,45'\,31'' = 1{\cdot}2873307 \\ arc\ 286^0\,14'\,29'' = 4{\cdot}9958545 \end{array} \right.$$

$$arc\ tg\ l\,4{\cdot}9958545 = arc\ tg\ 1{\cdot}608604 \left\{ \begin{array}{l} arc\ \ 58^0\,7'\,43'' = 1{\cdot}0145357 = C_1 \\ arc\ 238^0\,7'\,43'' = 4{\cdot}1561283 = C_2 \end{array} \right.$$

$$x_3 = 0{\cdot}120564, \quad x_4 = 1{\cdot}77655 \} \ m_2$$

bedeutend.

Offenbar ist hier m_1 und m_2 auf 5 Decimalstellen gleich, demgemäss

$$x_4 = 1{\cdot}77655 \ldots.$$

Diesen Erörterungen zufolge können wir nun die Behauptung aufstellen, dass eine jede transcendente Gleichung mit cyclometrischen oder trigonometrischen Functionen ihren Wurzeln gemäss einem gewissen Gesetze unterliegt, welches darin besteht, dass die Anzahl der Wurzeln mit der Anzahl der genannten Functionen in folgendem Verhältnisse zunimmt. Bezeichnen wir die Anzahl der Functionen*) mit den Buchstaben k und k_1 und die Anzahl der Wurzeln mit A und A_1, so können wir die Proportion

$$A : A_1 = 2^k : 2^{k_1}$$

aufstellen, worunter jedoch keine Bogenwurzeln gemeint sind, welche die Anzahl jener Wurzeln um das $n$fache übertreffen, wie es bereits schon früher er-

*) Wie wir schon früher bemerkt haben, ist es nothwendig, eine gegebene Gleichung so viel als möglich zu vereinfachen, wodurch es oft geschieht, dass eine oder mehrere Functionen obiger Art eliminirt werden, welches jedenfalls in Betracht zu ziehen ist.

wähnt wurde. Dieses Gesetz können wir aber nur für Gleichungen anwe
wo keine logarithmischen und Exponentialfunctionen vorkommen. Ist d
jedoch der Fall, so wird auch die für dieselben angewandte Wurzeltheori
Bestimmung der Wurzeln zur Anwendung gebracht werden müssen. Bei gemis
Gleichungen also, wie es die oben durchgeführte Lösung der Gleichung (a)
muss mit besonderer Behutsamkeit bei der jeweiligen Aufsuchung der Näher
werthe der Wurzeln, wie auch ihrer Anzahl, vorgegangen werden.

Ziehen wir nun die zweite Ersatzgleichung (a_2) in Betracht, so finde
dass, wenn wir eine der Wurzeln der Gleichung (a) in dieselbe einsetzen,
die Nebenwurzel, oder besser gesagt, die verwandte Wurzel aus derselben e
d. h. wird x_1 eingesetzt, so ergibt sich x_2, und wird x_3 eingesetzt, so e
sich x_4. Die Wurzeln x_1, x_2 und x_3, x_4 sind demgemäss correlativ.

Es ist daher die Gleichung

$$x = \underset{m=q}{\overset{m=k}{E}}\left[\frac{1 + Cos\,(e^{m^2+1} - y)}{1 - Cos\,(e^{m^2+1} - y)}\right]$$

jene Ersatzgleichung, welche uns die Correlation der Wurzeln angibt; wir w
sie daher Correlations-Ersatzgleichung nennen.

Diese Eigenschaft der Wurzeln können wir also ausdrücken, wen
diejenigen, welche einander correlativ sind, durch entsprechende Er
gleichungen ersetzen.

$$x_2 = E\left[\frac{1 + Cos\,(e^{x_1^2+1} - y)}{1 - Cos\,(e^{x_1^2+1} - y)}\right] = E\left[\frac{1 + Cos\,(e^{x_2^2+1} - y)}{1 - Cos\,(e^{x_2^2+1} - y)}\right]$$

$$x_4 = E\left[\frac{1 + Cos\,(e^{x_3^2+1} - y)}{1 - Cos\,(e^{x_3^2+1} - y)}\right] = E\left[\frac{1 + Cos\,(e^{x_4^2+1} - y)}{1 - Cos\,(e^{x_4^2+1} - y)}\right]$$

In diese Kategorie von Ersatzgleichungen gehören auch jene mit endl
Anzahl von Proceduren, von denen später die Rede sein wird. Bei diese
es öfter der Fall, dass 3, 4, ja noch mehr Wurzeln einander correlativ
d. h. wenn x_1 eingesetzt wird, sich x_2 ergibt, und dieses eingesetzt liefe
und dieses abermals eingesetzt gibt x_4 u. s. f. und endlich x_n eingesetzt l
wieder x_1, worauf sich dieselbe Reihenfolge wiederholt und wobei alle Wu
ihrem wahren Werthe sich immer mehr nähern. Wenn wir daher in eine s
Ersatzgleichung den ersten Näherungswerth irgend einer dieser Wurzeln
entsprechenden Gleichung einsetzen, so werden sich durch Fortsetzung
Proceduren der Reihenfolge nach alle bestehenden Wurzeln ergeben.

Ausser einander correlativen Wurzeln kann eine transcendente Gleic
noch andere Wurzeln besitzen, welche dieser Bedingung nicht entsprechen
wieder in einer anderen Ordnung einander correlativ sind. Diese Correl
kann aber auch mit jeder einzelnen der früheren untereinander correlativ
einer gewissen Art und Weise stattfinden.

Um nun dieses näher erörtern zu können, wollen wir ein Beispiel ähnl
Art durchführen.

Es sei die Gleichung zu lösen:

(b) . . . . $y = Sin\, e^{x-3} + \frac{1+lx}{2}$ worin natürlicherweise e^{x-3} einen Bogenwinkel respective das Verhältniss der Kreisbogenlänge zum Radius, dessen Werth 1 ist, bezeichnet.

Das Maximum des ersten Gliedes ist 1, welcher Werth für x folgendes Resultat ergibt $\quad Sin\, e^{x-3} = 1, \quad e^{x-3} = \frac{\pi}{2}, \ 5\frac{\pi}{2}, \ 9\frac{\pi}{2}, \ldots$

daraus ergibt sich $x = l\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right] + 3$.

Wird nun $Sin\, e^{x-3} < 1$, so wird auch $x < 3 + l\,(4n+1)\frac{\pi}{2}$.

Demzufolge ergibt sich aber für den erstern Fall

$$y = 1 + \frac{1+lx}{2} \quad \text{und hieraus} \quad x = e^{2y-3}$$

und mittelst Kleinerwerden des ersten Gliedes wird auch das zweite Glied grösser und demnach $\quad \frac{1+lx}{2} > y - 1$ und auch $x > e^{2y-3}$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich also die Relation

$$) \ldots \ldots \quad 3 + l\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right] \lesseqgtr x > e^{2y-3}$$

wobei n von den Werthen $[0, 1, 2, 3, \ldots (n-1), n]$ jenen annehmen wird, welcher der Relation logisch entspricht.

Das positive Minimum des zweiten Gliedes ergibt sich für den Werth $= \frac{1}{e}$, hierdurch wird $\frac{1+lx}{2} = 0$ und demnach $Sin\, e^{x-3} = y$ und $x = 3 + l\, arc\, Sin\, y$

Lassen wir nun $x > \frac{1}{e}$ werden, so wird auch $\frac{1+lx}{2} > 0$ und demzufolge ...ch die Ungleichung $x < 3 + l\ arc\ Sin\ y$ hervorgeht, aus welcher sich die ...lation

$$\ldots \ldots \quad \frac{1}{e} < x < 3 + l\, arc\, Sin\, y \quad \text{ergibt.}$$

Diese Relation entspricht zweien verschiedenen Wurzeln, da $(Sin\, y)$ zwei ...schiedenen Bögen entsprechen muss, wird aber, wie ersichtlich, nur solchen ...erthen des y, welche sich zwischen -1 und $+1$ bewegen, genügen ...nnen.

Das Minimum des ersten Gliedes ist (-1) und ergibt sich folgender...assen: $\quad Sin\, e^{x-3} = -1, \quad e^{x-3} = \frac{3}{2}\pi, \ \frac{7}{2}\pi, \ \frac{11}{2}\pi, \ldots (4n+3)\frac{\pi}{2}$

...ngemäss ergibt sich $\quad x = 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2}$

Ist nun $x \gtrless 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2}$, so wird auch $Sin\, e^{x-3} > -1$ sein müs

und demnach, da für das Minimum desselben $\frac{1+lx}{2} = y + 1$ ist, und sich da die Folgerung $x = e^{2y+1}$ ergibt, so wird durch die Aenderung des ersten Gli der Gleichung (*b*) auch die Ungleichung bestehen $x < e^{2y+1}$ somit sich Relation

$$(\gamma) \quad \dots\dots\dots \quad e^{2y+1} > x \lesseqgtr 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2} \text{ ergibt.}$$

Da nun aber zwischen $+1$ und -1 der Mittelwerth 0 sich befindet dieser uns den Minimalwerth des Bogens bezeichnet, so wollen wir für di Mittelwerth auch die beiderseitigen Grenzwerthe aufsuchen.

Für den Werth $Sin\, e^{x-3} = 0$ ergibt sich $e^{x-3} = 0, \ \pi, \ 2\pi, \ 3\pi, \dots$ und daraus $x = 3 + l n \pi$. Demzufolge muss auch $\frac{1+lx}{2} = y$ und hie $x = e^{2y-1}$ sich ergeben. Ist nun $Sin\ e^{x-3} \gtrless 0$, so wird auch $x \gtrless 3 + l n \pi$ demgemäss $x \gtrless e^{2y-1}$; woraus sich die Relation

$$(\vartheta) \quad \dots\dots\dots \quad 3 + l n \pi \gtrless x \gtrless e^{2y-1} \text{ ergibt.}$$

Aus den Relationen (α), (γ) und (δ) lässt sich nun auch die Anzahl der Gleichung (*b*) entsprechenden Wurzeln eruiren.

$$(\alpha) \quad \dots\dots\dots \quad 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} \lessgtr x > e^{2y-3}$$

$$(\gamma) \quad \dots\dots\dots \quad e^{2y+1} > x \lessgtr 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2}$$

$$(\vartheta) \quad \dots\dots\dots \quad 3 + l\pi n \gtrless x \gtrless e^{2y-1}$$

Hieraus ergibt sich, dass Wurzelwerthe zwischen folgenden Grenzen sich finden, und zwar erstens

$$\text{correlative Wurzeln} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x > 3 + l n \pi \\ 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} < x < 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} n = 1, 2, 3 \dots \\ \left.\begin{array}{l} 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} < x < 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2} \\ 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x > e^{2y-3} \end{array}\right\} n = 0, 1, 2, 3 \dots \end{array} \right.$$

$$\text{und zweitens nicht correlative} \left\{ \begin{array}{l} e^{2y-1} > x > e^{2y-3} \\ e^{2y-1} < x < e^{2y+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1. und 2.} \\ \text{3. und 4. Wurzel.} \end{array}$$

Für $y = 2$ erhält die Gleichung (*b*) die Form $y = 2 = Sin\, e^{x-3} + \frac{1+}{}$

und ihre Ersatzgleichung $(b_1) \dots x = \mathop{E}\limits_{m=q}^{m=k} \left[l\left(arc\ Sin\left[y - \frac{1+lm}{2}\right]\right) + 3 \right].$

Dr. Ludwig Grossmann's

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen.

VI.

Um nun nach dem Vorhergehenden den Näherungswerth der ersten Wurzel zu erhalten, nehmen wir die Relation (α) zu Hilfe und erhalten die äussersten Grenzen in $e^{2y-1} > x > e^{2y-3}$; die specielle Grenze aber in

$$3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x_1 > e^{2y-3}$$

Für $y = 2$, $n = 0$ wird demnach $3 + l\frac{\pi}{2} > x_1 > e$ oder $3 \cdot 4516 > x_1 > 2 \cdot 7182818 \cdots$ also der Mittelwerth $x_1 = m = 3 \cdot 08994$; hieraus durch Substitution in die Ersatzgleichung $m_1 = 3 \cdot 1913472$, und dieses weiter fortgesetzt ergibt endlich

$$x_1 = 3 \cdot 16426 \cdots$$

auf 5 Decimalstellen genau.

Für die zweite Wurzel ergibt die Relation (α) $3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} < x$ für $n = 0$, und in der Substitutionsgleichung der zweite, demselben Sinus entsprechende Bogen in Rechnung genommen, ergibt $x > 3 \cdot 4516$, also $x_2 = m = 3 \cdot 5$.

Setzen wir dieses in die Substitutionsgleichung, so ergibt sich $m_1 = 3 \cdot 666886 \cdots$, $m_2 = 3 \cdot 753770$, $m_3 = 3 \cdot 764001$, $m_4 = 3 \cdot 765201$, $m_5 = 3 \cdot 765287$; demgemäss ist der Werth für $x_2 = 3 \cdot 765244$ auf 4 Decimalstellen genau.

Die beiden nächsten Wurzeln bestehen für die Relation

$e^{2y+1} > x \lesseqgtr 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2}$, für $y = 2$ ist demnach $e^5 > x \lesseqgtr 3 + l\,(4n+3)\frac{\pi}{2}$

Diese Relation ist, wie bekannt, durch den Minimalwerth des ersten Gliedes entstanden, wo der Sinus den Werth (-1) erhielt; es wird demzufolge auch in der Ersatzgleichung der Werth des Sinus ein negativer sein müssen.

Wollen wir uns deshalb dieselbe nochmals ins Gedächtniss zurückrufen, sie lautet:

$$x = E\left[3 + l \; arc \; Sin \frac{3 - lm}{2}\right]$$

Soll nun hierin der Sinus negativ sein, so muss $lm > 3$ sein und demnach auch $m > e^3$, wird jedoch m so gross, dass es den Werth e^5 erreicht, so wird der Sinus sein Minimum erreicht haben. Es wird demzufolge $e^5 > m > e^3$ sein müssen. Nun muss aber auch x jenen Werth des m erreichen, es muss deshalb der Logarithmus des Bogens einen solchen Werth besitzen, um die Zahl 3 bis zu dem Werthe m ergänzen zu können. Dieser Werth des Logarithmus ist, wie ersichtlich, von dem Bogen abhängig und somit auch von n, da uns dieses die Anzahl der vollkommenen Umdrehungen angibt; es wird demgemäss jener Bogen um so viel ganze Umdrehungen sich ergänzen müssen, als zur Erreichung des Werthes $e^{m_1 - 3}$ nothwendig sind.

Diese Anzahl von Umdrehungen, respective den Werth von n können wi
durch folgendes Verfahren bestimmen:

Erreicht der Sinus sein Minimum, so wird $x = e^5 = 3 + l\,(4n+3)\frac{\pi}{2}$, folglic
ergibt sich hieraus der Werth

$$n = \frac{\frac{e^{e^5-3}}{\frac{\pi}{2}} - 3}{4} = \frac{e^{e^5-3} - 3\frac{\pi}{2}}{2\pi}$$

Ist nun der Sinus im Wachsthum begriffen, also (> -1), so wird auch
im Abnehmen begriffen sein, somit $n < \frac{e^{e^5-3} - 3\frac{\pi}{2}}{2\pi}$

Nehmen wir ferner an, dass der Bogen *arc Sin* $\frac{3 - lm}{2} = \lambda$ ist, so werde
$2n\pi$ hinzu kommen müssen und es wird $(m_1)_1 = 3 + l(2n\pi + \lambda)$ sein. Ziehe
wir von π den Bogen λ ab, so ergibt sich λ_1, d. h. der Bogen der zweiten, de
obigen Relation entsprechenden Wurzel. $(m_1)_2 = 3 + l[2n\pi + (\pi - \lambda)]$, was ebe-
soviel ist, wie $(m_1)_2 = 3 + l(2n\pi + \lambda_1)$. Nimmt nun der Sinus zu, d. h. er wir
(> -1), so erreicht er endlich den Werth 0, für welchen $m = e^3$ ist. Es wird
aber offenbar n im Abnehmen begriffen sein, und wird für $m = e^3$ den Werth

$n = \frac{e^{e^3-3} - 3\frac{\pi}{2}}{2\pi}$ annehmen, event. bei $m > e^3$ auch die Ungleichung $n > \frac{e^{e^3-3} - 3}{2\pi}$

liefern. Wir können nun demzufolge die Relation $\frac{e^{e^3-3} - 3\frac{\pi}{2}}{2\pi} < n < \frac{e^{e^5-3} - 3}{2\pi}$
aufstellen und analog diesem den Schluss ziehen, dass n in gleichem Verhältnis
mit m im Wachsthum begriffen ist, demnach auch die Gleichung, welche al
gemein Giltigkeit hat,

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n = \frac{e^{m-3} - 3\frac{\pi}{2}}{2\pi} \text{ bestehen muss.}$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass hier n einen bestimmten unabänderliche
Werth besitzen muss und demzufolge keine reellen, den beiden Wurzeln ent
sprechenden Bogenwurzeln stattfinden können, welche $< e^3$ wären, jedoch de
Werth e^5 erreichen können. Wir wollen nun die beiden Wurzeln für unser Bei
spiel berechnen und finden nach der Relation $e^5 > m > e^3$ d. h. $148{\cdot}413 > m > 20{\cdot}085$
den beiläufigen angenommenen Werth $m = 25$; hieraus ergibt sich n nach $(\varepsilon$
$n = 570585711{\cdot}3$ und die Wurzel berechnet, liefert:

$$l\,25 = 3{\cdot}21885, \qquad \frac{3 - 3{\cdot}21885}{2} = -0{\cdot}109425$$

$$arc\ Sin - 0{\cdot}109425 = \begin{cases} 353^0\,43'\ 4{\cdot}2'' = \lambda \\ 186^0\,16'\,55{\cdot}8'' = \lambda_1 \end{cases}$$

$$arc\ 353^0\,43'\,4{\cdot}2'' = 6{\cdot}1735405 = \lambda, \qquad m_1 = 3 + l(2n\pi + \lambda)$$

$$m_1 = 3 + l\,3584990100{\cdot}46 = 24{\cdot}999872447$$

Wenn wir nun m_2, m_3 u. s. f. aufsuchen, so ergibt sich ein vollkommen genauer Werth für das x_3. Selbstverständlich muss nach jeder Procedur der Werth m_k in die Gleichung (ε) wieder eingesetzt und n von frischem bestimmt werden. Durch Anwendung von λ_1 anstatt λ erhalten wir $(m_k)_2 = x_4$. Wie wir bis jetzt gesehen haben, sind diese vier Wurzeln in keiner Beziehung einander correlativ gewesen und stand eine zur anderen in keinerlei anderer Verwandtschaft, als dass je zwei derselben, d. i. die 1. und 3., sodann 2. und 4. Wurzel einem analogen Bogen entsprochen haben.

Ziehen wir daher die Correlations-Ersatzgleichung

$$(b) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left[e^{2\,[y - Sin\, e^{m-3}] - 1} \right]$$

in Betracht und substituiren ebenfalls wie zuvor $y = 2$ in dieselbe, so werden wir folgendes Resultat erlangen.

Betrachten wir nun einmal den Näherungswerth des x, dessen Relation $3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x > 3 + ln\pi$ ist, so finden wir für $n = 1$ (für $n = 0$ wird offenbar die rechte Seite $-\infty$, welches imaginären Wurzeln entspricht) $3 + l\,5\frac{\pi}{2} > x > 3 + l\pi$ oder was dasselbe $5{\cdot}061 > x > 4{\cdot}14473$.

Es sei demnach $x_1 = m = 5{\cdot}055$; setzen wir dieses in obige Gleichung, so ergibt sich $x_2 = 2{\cdot}72435$, dieses abermals eingesetzt liefert uns $x_3 = 5{\cdot}0707$, und dieses endlich $x_4 = 2{\cdot}727675$. Wiederholen wir nun diese Procedur, so ergibt sich durch Substitution von x_4 der nähere Werth von $x_1 = 5{\cdot}05460$, $x_2 = 2{\cdot}72459$, $x_3 = 5{\cdot}07153$ und $x_4 = 2{\cdot}736265$ u. s. f.

Es sind dies vier verschiedene untereinander correlative Wurzeln der Gleichung (b), von denen je zwei sehr nahe Werthe besitzen, jedoch voneinander gänzlich verschieden sind.

Es entsprechen hier die einzelnen Wurzeln folgenden Relationen:

$$x_1 \quad . \; . \quad 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x > 3 + ln\pi \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots .$$

$$x_2 \quad . \; . \quad 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} > x > e^{2y-3} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots .$$

$$x_3 \quad . \; . \quad 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} < x < 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots .$$

$$x_4 \quad . \; . \quad 3 + l(4n+1)\frac{\pi}{2} < x < 3 + l(4n+3)\frac{\pi}{2} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots .$$

Setzen wir also eine dieser Wurzeln in die Ersatzgleichung (b_2) ein, so wird dieselbe erst nach der vierten Procedur dieselbe wieder zum Vorschein kommen. Wir können somit folgende Ersatzgleichung für die correlativen Wurzeln der Gleichung (b) aufstellen:

$$(b_3) \quad . \quad x = \overset{m=k}{\underset{m=q}{E}} \left| e^{2\left[2 - Sin\, e^{e^{2\left[2 - Sin\, e^{e^{2\left[2 - Sin\, e^{e^{2\left[2 - Sin\, e^{m-3}\right]-1}-3}\right]-1}-3}\right]-1}-3}\right]-1} \right.$$

welcher wir den Namen „Ersatzgleichung mit endlicher Anzahl Proceduren" b
legen wollen.

Um aber nicht den hinter dem Ersatzzeichen stehenden Ausdruck g
schreiben zu müssen, können wir denselben als eine andere Ersatzform
blos vier Proceduren betrachten, und werden zum Unterschiede von ande
Ersatzgleichungen den Index 4 dem Ersatzzeichen beifügen, demnach, je n
der Anzahl der zu schreibenden Wiederholungen derselben Form der In
beschaffen sein wird. Die Gleichung (b_3) wird also auch die Form

$$x = \overset{m=k}{E} \; \overset{m=k}{\underset{m=q}{E_4}} \left[e^{2\left[2 - Sin\, e^{m-3}\right] - 1} \right]$$

besitzen können, und wird allen vier correlativen Wurzeln entsprechen, wel
sich, je nach dem eingesetzten Näherungswerthe, der aus einer der obig
Relationen hervorgeht, ergeben. Der Gleichung (b) werden also acht Wurze
von denen vier untereinander correlativ sind, entsprechen, wobei die letzteren
keiner besonderen Beziehung zu den vier übrigen sich befinden, viel wenig
mit denselben irgendwie verwandt sind.

II.

Contractibele transcendente Gleichungen.

Eine besondere Art von transcendenten Gleichungen bilden die contra
tibelen oder zusammenziehbaren. Diese Gleichungen kommen meistens in Fo
eines Productes, dessen Factoren von entgegengesetzter Beschaffenheit sind, v
d. h. der eine der Factoren kann eine reductibele, der andere eine irreductib
transcendente Function vorstellen. Oder aber sind es Summen von Product
von denen das eine eine steigende, das andere eine fallende Function ein u
derselben Variabelen ist.

Von merkwürdiger Art und Wichtigkeit ist jedoch das Verfahren, vermitt
dessen wir bei diesen Gleichungen Näherungswerthe erreichen, welche nicht n
ziemlich genau sind und durch eine geringe Anzahl von Proceduren uns
einem genügenden Resultate führen, sondern auch zu neuen Gleichungen
gelangen lassen, welche ähnliche oder vielmehr nahezu gleiche Wurzelwer
besitzen, wie die ursprünglichen.

Dieses Verfahren besteht hauptsächlich darin, dass wir jene Factoren
Gleichung, welche bei der Contraction derselben störend in den Weg treten,
eliminiren trachten, wodurch sich uns schliesslich durch Evolution jener id

ische Ausdruck ergibt, dessen einzelne Glieder mit denen der ursprünglichen Gleichung nicht nur correspondiren, sondern auch für einen bestimmten Werth der Unbekannten y nahezu gleiche Werthe mit den ihnen entsprechenden Gliedern besitzen. Da nun jener sich ergebende Ausdruck eine Relation ist, welche blos Functionen der Variabelen y enthält, so ist es erklärlich, dass durch Festsetzung des y-Werthes sich auch zugleich die Glieder jener Relation, und demzufolge sich die Werthe der mit denselben correspondirenden Glieder der ursprünglichen Gleichung bestimmen lassen.

Um dieses erklärlicher zu machen, wollen wir ein Beispiel ähnlicher Art durchführen, und hierbei hauptsächlich jene Eventualitäten in Betracht ziehen welche das oben benannte Resultat bedingen.

Es sei die contractibele Gleichung

$$y = Sin\,x\,[e^x + e^{-x}]$$

der Lösung zu unterziehen. Wenn wir diese Gleichung näher in Augenschein nehmen, so finden wir, dass die beiden Summanden $e^x\,Sin\,x$ und $e^{-x}\,Sin\,x$ Functionen entgegengesetzter Beschaffenheit sind; d. h. die erstere eine steigende, die letztere dagegen eine fallende Function von x ist.

Fürs zweite ist die Gleichung, wie ersichtlich, ein Product zweier Factoren von denen der letztere die Summe zweier einander reciproker Ausdrücke darstellt.

Aus diesen beiden einander reciproken Grössen lässt sich nun, wenn wir die Summe dem Werthe u gleichsetzen, der Werth des x durch jenen Werth u ausdrücken; und wenn wir diesen in den ersten Factor einsetzen, erhalten wir die zusammengezogene Gleichung

$$y = u\,Sin\,l\,\frac{1}{2}\,(u + \sqrt{u^2 - 4}),$$ deren Ersatzgleichung

$$u = \mathop{E}_{m=q}^{m=k}\left[\frac{y}{Sin\;l\;\frac{1}{2}\,(m + \sqrt{m^2 - 4})}\right]$$

lautet, wobei die Grösse $u = e^x + e^{-x}$ bedeutet. Wenn wir dagegen die Summanden $e^x\,Sin\,x = z$ und $e^{-x}\,Sin\,x = v$ setzen, so ergibt sich sofort $y = v + z$.

Durch Differentiation der beiden Gleichungen erhalten wir Folgendes:

$$\frac{dz}{dx} = e^x\;(Cos\,x + Sin\,x) \qquad \text{oder} \qquad e^{-x}\frac{dz}{dx} = Cos\,x + Sin\,x$$

$$\frac{dv}{dx} = e^{-x}(Cos\,x - Sin\,x) \qquad\qquad e^x\;\frac{dv}{dx} = Cos\,x - Sin\,x$$

Daraus ergibt sich sofort $e^{-2x}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + e^{2x}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 2$

Bezeichnen wir nun die beiden Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = e^{-\tau}$ und $\frac{dv}{dx} = e^{+\delta}$ so ergibt sich $e^{-(2x+2\tau)} + e^{2x+2\delta} = 2$ als Resultat, wobei δ und τ positive echte Brüche bedeuten.

Ist nun x sehr klein, so wird z und v nahezu gleich gross werden können daher $x + \tau = z$ und $x + \delta = v$ setzen und erhalten

(1) . . . . . $e^{-2z} + e^{2v} = 2$ oder $1 + e^{2(v+z)} = 2e^{2z}$

was ebenso viel ist wie $1 + e^{2y} = 2e^{2z}$, somit $z = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2y}}{2}$ und dem a

auch, wenn wir die Gleichung (1) mit e^{-2v} multipliciren, $v = -\frac{1}{2} l \frac{1-}{}$

daher, wenn wir die Gleichung $y = z + v$ in Betracht ziehen, sich die Sc gleichung

(2) . . . . $y = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2y}}{2} - \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{-2y}}{2}$ ergeben muss.

Zu demselben Resultate gelangen wir aber auch auf folgende Art:

Betrachten wir die beiden derivirten Ausdrücke

$$\frac{dz}{dx} = e^{x} . (Cos\, x + Sin\, x)$$

$$\frac{dv}{dx} = e^{-x} . (Cos\, x - Sin\, x)$$

so finden wir, da beim Wachsthum des x das z im Zunehmen, dagegen im Abnehmen begriffen ist, sich die beiden approximativen Proportionen stellen lassen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^{-z}}{e^{-x}}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{e^{-x}}{e^{-v}}$$

wobei die erstere eine gerade, die letztere dagegen eine ungerade ist.

Hieraus ergibt sich sofort

$$e^{-z} = Cos\, x + Sin\, x$$
$$e^{v} = Cos\, x + Sin\, x$$

und demnach auch das Ergebniss:

(1) . . . . $e^{-2z} + e^{2v} = 2$

welches mit der vorigen Relation identisch ist.

Setzen wir nun die Untersuchung in Betreff der Gleichung (c) fort, s uns sogleich klar, dass

$$z = e^{x} . Sin\, x = \frac{1}{2} l \frac{1 + e^{2y}}{2}$$

$$v = e^{-x} . Sin x = \frac{1}{2} l \frac{2}{1 + e^{-2y}}$$

sein muss und demzufolge auch

$$Sin\, x = \frac{1}{2} \sqrt{l \frac{1 + e^{2y}}{2} . l \frac{2}{1 + e^{-2y}}}$$

und $e^{2x} = \frac{l \frac{1 + e^{2y}}{2}}{l \frac{2}{1 + e^{-2y}}}$ sich ergibt, welche beiden Ausdrücke die Schlussre

von folgender Form liefern:

$$arc\,Sin\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{l\frac{1+e^{2y}}{2}\cdot l\frac{2}{1+e^{-2y}}}\right) \gtrless x \gtrless \frac{1}{2}l\frac{l\frac{1+e^{2y}}{2}}{l\frac{2}{1+e^{-2y}}} \quad . \quad . \quad (3)$$

Um nun auch die Grenzen von y zu erfahren, wollen wir die linke Seite ser Relation in Betracht ziehen und finden, dass, da der Sinus nie grösser 1 sein kann, der Ausdruck $\sqrt{l\frac{1+e^{2y}}{2}\cdot l\frac{2}{1+e^{-2y}}}$ nie grösser als 2 sein rf, somit auch $l\frac{1+e^{2y}}{2}\cdot l\frac{2}{1+e^{-2y}} \overline{\overline{<}} 4$ und, wenn wir hierin $\frac{1+e^{2y}}{2} = w$ tzen, so ergibt sich die Ungleichung $lw\,.\,l\left(2-\frac{1}{w}\right) \overline{\overline{<}} 4$, aus welcher w berechnet, $\overline{\overline{<}}$ 320·22 und daraus $y < 3{\cdot}23028$ und auch $y > -3{\cdot}23028$ hervorgeht.

Da nun aber in der Gleichung (c) das y alle möglichen Werthe besitzen nn, so wird die Relation (3) nur theilweise den Werthen der benannten ichung entsprechen, und zwar nur zwischen den hier bezeichneten Grenzen y. Z. B. für den Werth $y=1$ ergibt die Relation (3) den Grenzwerth $Sin\,0{\cdot}4505 \gtrless x \gtrless l\,1{\cdot}591$ und somit auch den Werth

$$\left.\begin{matrix}(2n+1)\pi - \\ 2n\pi +\end{matrix}\right\} 0{\cdot}46630 \lessgtr x \lessgtr 0{\cdot}46468,$$

obei jene den Grenzwerthen entsprechenden Zeichen berücksichtigt werden üssen. Wird nun dieser Werth in jene, der Gleichung (τ) entsprechende Ergleichung substituirt, so ergibt sich nach wenigen Proceduren ein genügend nauer Werth.

Betrachten wir nun jenen Werth als genau bestimmt, und jene Grenzwerthe s nahezu gleich gross, so können wir folgende Gleichung aufstellen:

Es sei $l\frac{1+e^{2y}}{2} = r$ und $l\frac{2}{1+e^{-2y}} = s$, so ergibt sich sofort

$$Sin\,x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{r\,.\,s}, \qquad e^{2x} = \frac{r}{s}$$

mit auch $arc\,Sin\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{r\,.\,s}\right) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{r}{s}$ oder $2\,arc\,Sin\left(\pm\frac{\sqrt{r\,.\,s}}{2}\right) = lr - ls$,

d wenn wir hierin $r = e^{\rho}$ und $s = e^{\sigma}$ setzen, ergibt sich

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\,arc\,Sin\left[\pm\frac{e^{\frac{\rho+\sigma}{2}}}{2}\right] = \rho - \sigma$$

Die Grenzen von ρ und σ sind sodann aus den obigen Gleichungen für und s zu berechnen und ergibt sich

$$-\infty \overline{\overline{<}} \rho \overline{\overline{<}} \infty \text{ und } -\infty \overline{\overline{<}} \sigma \overline{\overline{<}} ll2 \text{ für } \infty \overline{\overline{>}} y \overline{\overline{>}} 0$$

Da nun aber $ll2 = -0{\cdot}366$ ist, so wird σ demzufolge nur einen n
Werth besitzen können; wenn wir daher in der Gleichung (4) das Zei
σ ändern, so ergibt sich

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad 2\,arc\,Sin\left[\pm\frac{e^{\frac{\varrho-\sigma}{2}}}{2}\right] = \varrho + \sigma$$

wobei σ positiv sein muss und zwischen $+\infty$ und $+0{\cdot}366$ sich bewegt

Aus der Gleichung (5) entspringen nun folgende neue Gleichunge
Näherungswerthe durchwegs durch Reduction nach der Relation (3) g
werden können.

Setzen wir in der Gleichung (5)

$$\frac{\varrho-\sigma}{2} = \gamma \text{ und } \frac{\varrho+\sigma}{2} = \delta$$

so ergibt sich

$$arc\,Sin\left(\pm\frac{e^{\gamma}}{2}\right) = \delta \text{ und } \gamma = l\,(\mp 2\,Sin\,\delta)$$

und daher durch Rechnung

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \delta + l\,(\pm 2\,Sin\,\delta)$$

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \sigma = l\,(\pm 2\,Sin\,\delta) - \delta$$

Ferner ist

$$arc\,Sin\left(\pm\frac{e^{\gamma}}{2}\right) = arc\,tg\left(\pm\frac{e^{\gamma}}{\sqrt{4-e^{2\gamma}}}\right) = \delta$$

daraus ergibt sich, wenn wir

$$e^{\alpha} = \frac{\pm e^{\gamma}}{\sqrt{4-e^{2\gamma}}} = tg\,\delta \text{ setzen, } \gamma = \frac{1}{2}\,l\,\frac{4\,tg^2\,\delta}{1+tg^2\,\delta}$$

Indem aber den obigen Gleichungen gemäss $\delta + \gamma = \varrho$ ist, so v
Gleichung

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad arc\,tg\,e^{\alpha} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{4\,e^{2\alpha}}{1+e^{2\alpha}} = \varrho$$

entspringen, aus welcher sich durch fernere Substitution abermals eine l
neuer Gleichungen ergeben.

Dr. Ludwig Grossmann's

aktische Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen nscendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

I.

Wenn wir die zumeist bekannten Fundamentalformeln der Zinseszins- und tenrechnung näher in Augenschein nehmen, so können wir offenbar die hauptung aufstellen, dass eine jede derselben eine gewisse, der Anzahl der derselben vorkommenden Variabelen entsprechende Menge von Aufgaben isst, von denen wieder eine jede Einzelne in ihrer Anwendung eine Unzahl cieller Fälle entspricht. Dieser Eventualität zufolge lassen sich daher Formeln stellen, welche so mancher Anforderung in Betreff ihrer Verwendbarkeit Genüge ten.

Dies ist jedoch im Grunde genommen nicht so einfach, wie es den Anschein , da bekannterweise diese Formeln durchwegs transcendent sind und daher praktische Lösung derselben rücksichtlich ihrer Brauchbarkeit mit Schwierigten verbunden ist.

Um nun die praktische Brauchbarkeit einer solchen Formel zu erzielen, es nöthig, dieselbe so einfach als möglich zu gestalten, wobei hauptsächlich auf Rücksicht genommen werden muss, dass die bei Benutzung derselben hige Zeit auf ein Minimum herabgesetzt wird. Wir werden daher bei der stellung derselben mit verhältnissmässig geringem Zeitaufwande verbundene ceduren in Anwendung bringen.

Hinsichtlich dieser Erörterung wollen wir auf die Lösung der transcendenten ichungen vermittelst Substitutionsgleichungen hinweisen, welche insbesondere äusserst genauen Resultaten führen und obigen Anforderungen insoweit entechen, als es die Individualität der transcendenten Gleichungen überhaupt asst. Ausserdem gebührt dieser Lösungsart auch schon deshalb der Vorzug, l sich eine jede der ursprünglichen Fundamentalformel gemäss mögliche ichung direct aus der ersteren ergibt.

Anlässlich dessen werden sich die aus der Fundamentalformel:

$$\frac{R[(1+p)^{\alpha n}-1]}{(1+p)^{\alpha}-1}=A, \text{ respective } \frac{(1+p)^{\alpha n}-1}{(1+p)^{\alpha}-1}=\frac{A}{R}$$

springenden Resultate folgendermassen gestalten:

Setzen wir in der Gleichung (1) den Ausdruck $(1+p)^{\alpha}=u$, so ergibt sich nbar die Gleichung n^{ten} Grades:

$$u^n-u\frac{A}{R}+\frac{A}{R}-1=0$$

Es wäre nun z. B. in der Gleichung (1) die Grösse p durch die übrigen, der Gleichung vorhandenen Grössen auszudrücken, so wird aus der Gleichung

$$u=(1+p)^{\alpha}$$

die Unbekannte p durch die Grössen u und a ausgedrückt werden können. In Folge dessen wird an uns nur noch die Aufgabe herantreten, die Grösse u aus der Gleichung (2) zu bestimmen; d. h. jene Gleichung n^{ten} Grades zu lösen. Zu diesem Zwecke wollen wir uns der bereits erwähnten Substitutionsgleichungen bedienen und rücksichtlich dessen auf folgende Weise verfahren:

Mittelst einer einfachen Manipulation erhalten wir aus der Gleichung (2) die Form:

$$(4) \qquad u = \left[1 - \frac{A}{R}(1-u)\right]^{\frac{1}{n}}$$

bei deren Uebergange in eine Ersatz- oder Substitutionsgleichung jenes in dem rechter Hand stehenden Ausdrucke sich befindliche u in den Näherungswerth m übergeht. Dieselbe wird also folgendermassen lauten:

$$(5) \qquad u = \underset{m>1}{\mathrm{E}}\left[1 - \frac{A}{R}(1-m)\right]^{\frac{1}{n}}$$

wobei der Näherungwerth m zugleich jenen Werth darstellt, welcher wiederholt durch den unter dem Ersatzzeichen E stehenden Ausdruck ersetzt werden muss, durch welche Procedur der Näherungswerth m immer mehr dem wahren Werthe von u entgegeneilt. Je öfter also die genannte Ersatzprocedur durchgeführt wird, desto genauer ist auch der Werth von u bestimmt. Dem Gesagten zufolge wird also die Gleichung (5) folgender Gleichung entsprechen:

$$(6) \qquad u = \left[1 - \frac{A}{R}\left(1 - \left[1 - \frac{A}{R}\left(1 - \left[1 - \frac{A}{R}\left(1 - \left[1 - \frac{A}{R}(1-m)\right]\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right)^{\frac{1}{n}} \ldots\right]^{\frac{1}{n}}$$

deren numerische Berechnung in der Richtung von rechts nach links vollzogen wird, wobei für den ersten Werth des m die Relation $m > 1$ gilt.

Der Kürze halber werden wir uns aber ausschliesslich nur der Form (5) bedienen, wobei wiederholt der aus dem rechts stehenden Ausdrucke derselben sich ergebende Werth von u immer wieder anstatt m eingesetzt wird, und das so lange, bis zwei hintereinanderfolgende Werthe von u miteinander hinreichend übereinstimmen.

Ist nun u bestimmt, so liefert uns offenbar die Gleichung (3) die Relation:

$$(7) \qquad p = u^{\frac{1}{a}} - 1$$

welche, wenn wir selbe durch Worte ausdrücken, folgender Aufgabe entspricht: Zu welchem Zinsfusse $P = 100 \cdot p$ müssen n in Intervallen von je a Jahren eingehende Beträge von gleicher Grösse R auf Zinseszinsen angelegt werden, um nach Verlauf von $a\,n$ Jahren die Endsumme A zu liefern?

Ist dagegen die Grösse a unbekannt und p bekannt, so liefert uns die Gleichung (3) die Relation

$$(8) \qquad a = \frac{lg\, u}{lg\,(1+p)}$$

und entspricht dieselbe abermals einer Aufgabe, welche folgendermassen lautet: Es sei A der Endwerth, welchen n in Intervallen von je a Jahren zu $P\%$ verzinslich angelegte Beträge von gleicher Grösse R nach $a\,n$ Jahren erreichen. — Wie viel Jahre sind zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Einzahlungen ver-

fossen? — Die Lösung dieser beiden Aufgaben wird also von der Lösung der Ersatzgleichung (5) abhängen, deren Genauigkeit auf fünf bis sechs Decimalstellen hinreicht, um das Resultat bis auf Hundertel Kreuzer genau zu bestimmen. Auf Grund dessen werden schon sechs bis acht Proceduren der Gleichung (5) zur Bestimmung eines richtigen Werthes hinreichen.

Um nun aber desto schneller bei der Berechnung des Werthes u zum Ziele zu gelangen, können wir, da die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerthen immer mehr im Abnehmen begriffen und ein jeder solcher grösser oder kleiner als der demselben vorhergehende ist, folgende Massregel ergreifen:

Es seien m_0 und m_1 zwei hintereinanderfolgende Näherungswerthe von u, so wird $m_1 - m_0 = \delta$ sein, also eine Differenz, deren absoluter Werth mit der Anzahl der durchgeführten Proceduren immer geringer wird, bis derselbe mit der k^{ten} Procedur gegen 0 verschwindet.

Wir werden daher, um den Wachsthum des Näherungswerthes zu beschleunigen, die Differenz δ noch zu m_1 zuzählen, und es wird demnach in die Ersatzgleichung (5) die jeweilige Summe des letzten Resultatswerthes und der Differenz zwischen demselben und dem ihm vorhergehenden anstatt m substituirt werden müssen.

Um dieses näher zu erörtern, wollen wir folgendes Beispiel durchführen:

Es sei $A = 24.763 \cdot 00$, $R = 700$, $a = 4$ und $n = 10$

so wird die Ersatzgleichung (5) folgende Form besitzen:

$$\frac{A}{R} = 35 \cdot 3757$$

$$\text{somit } u = \underset{m>1}{\mathrm{E}} \left[1 - 35 \cdot 3757 \; (1 - m)\right]^{\frac{1}{10}}.$$

Da nun $m > 1$ ist, so setzen wir $m = 1 \cdot 1$, demzufolge ergibt sich als erster Resultatswerth

$$m_0 = (4 \cdot 53757)^{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 1603;$$

Da nun die Differenz $m_0 - m = \delta = 0 \cdot 0603$ zu m_0 zugezählt werden muss, so erhalten wir als zweiten Ersatzwerth für m den Werth

$$m'_0 = 1 \cdot 2206 = m_0 + \delta$$

Wenn wir nun diesen in obige Ersatzgleichung einsetzen, ergibt sich offenbar

$$m_1 = (8 \cdot 80387)^{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 24299$$

Da aber wieder

$$m_1 - m'_0 = 1 \cdot 24299 - 1 \cdot 2206 = \delta_1 = 0 \cdot 02239$$

die sich ergebende Differenz ist, so ergibt sich

$$m'_1 = m_1 + \delta_1 = 1 \cdot 26538$$

als der in obige Ersatzgleichung abermals einzusetzende Werth und wir erhalten sonach

$$m_2 = (10 \cdot 38799)^{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 2637;$$

und

$$m_2 - m'_1 = 1{\cdot}2637 - 1{\cdot}26538 = \delta_2 = -0{\cdot}00168$$

sowie auch

$$m'_2 = m_2 + \delta_2 = 1{\cdot}2637 - 0{\cdot}00168 = 1{\cdot}26202$$

Wenn wir nun diesen Werth wieder in die Ersatzgleichung einset ergibt sich

$$m_3 = (10{\cdot}26914)^{\frac{1}{10}} = 1{\cdot}26227$$

$$m_3 - m'_2 = 1{\cdot}26227 - 1{\cdot}26202 = 0{\cdot}00025 = \delta_3$$

$$m'_3 = m_3 + \delta_3 = 1{\cdot}26252$$

$$m_4 = (10{\cdot}28683)^{\frac{1}{10}} = 1{\cdot}26249$$

$$m_4 - m'_3 = \delta_4 = -0{\cdot}00003$$

$$m'_4 = m_4 + \delta_4 = 1{\cdot}26246$$

$$m_5 = (10{\cdot}28471)^{\frac{1}{10}} = 1{\cdot}2624605$$

Da nun, wie ersichtlich, m'_4 und m_5 auf fünf Decimalstellen mite übereinstimmen, so folgt hieraus

$$u = 1{\cdot}2624605 \ldots$$

welches nach fünf Proceduren auf 6 Decimalstellen genau bestimmt ist.

Der Gleichung (7) gemäss erhalten wir also als Resultat

$$p = (1{\cdot}2624605)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{\cdot}0600026$$

Es ist nun aber auch

$$P = 100 \,.\, p, \text{ also ist } P = 6{\cdot}00026$$

d. h. jene Beträge müssen auf 6% angelegt werden, um den gegebenen gungen zu entsprechen.

Wie ersichtlich, können die Differenzen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ sowohl posi auch negativ sein.

Als zweites Beispiel gelte Folgendes:

$$a?,\ A = 18000,\ R = 340{\cdot}15,\ n = 12,\ p = \frac{P}{100} = 0{\cdot}045$$

In diesem Falle lautet also die hierzu gehörige Ersatzgleichung wie

$$\frac{A}{R} = 52{\cdot}91783,$$

$$\text{somit } u = \underset{m>1}{\mathrm{E}} \left[1 - 52{\cdot}91783\,(1 - m) \right]^{\frac{1}{12}}$$

Für $m = 1{\cdot}1$ erhalten wir

$$m_0 = (6{\cdot}5292)^{\frac{1}{12}} = 1{\cdot}1656$$

Wir können nämlich für die ersteren Näherungswerthe die jeweiligen abrunden, um schneller rechnen zu können.

$$m_0 - m = 0{\cdot}0656 = \delta$$

$$m'_0 = m_0 + \delta = 1{\cdot}2312$$

hieraus ergibt sich

$$m_1 = (13 \cdot 235)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 24016 \quad \delta_1 = 0 \cdot 00912$$
$$m'_1 = 1 \cdot 24912$$
$$m_2 = (14 \cdot 183)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 24685 \quad \delta_2 = -0 \cdot 00227$$
$$m'_2 = 1 \cdot 24458$$
$$m_3 = (13 \cdot 942)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 24555 \quad \delta_3 = 0 \cdot 00097$$
$$m'_3 = 1 \cdot 24652$$
$$m_4 = (14 \cdot 0453)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 2463 \quad \delta_4 = -0 \cdot 00022$$
$$m'_4 = 1 \cdot 24608$$
$$m_5 = (14 \cdot 021)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 246134 \quad \delta_5 = 0 \cdot 000054$$
$$m'_5 = 1 \cdot 246188$$
$$m_6 = (14 \cdot 0277)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 2461843 \quad \delta_6 = -0 \cdot 0000037$$
$$m'_6 = 1 \cdot 2461806$$
$$m_7 = (14 \cdot 02734)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 2461816 \quad \delta_7 = 0 \cdot 000001$$
$$m'_7 = 1 \cdot 2461826$$
$$m_8 = (14 \cdot 02744)^{\frac{1}{12}} = 1 \cdot 2461823$$

Es stimmt also m'_7 mit m_8 auf sechs Decimalstellen überein, somit

$$u = 1 \cdot 2461823 \ldots$$

Der Gleichung (8) gemäss erhalten wir aber auch die Relation

$$a = \frac{lg\, u}{lg\,(1+p)} = \frac{0 \cdot 0955815}{0 \cdot 0191163} = 5$$

durch diese Aufgabe gelöst erscheint.

Es sei noch schliesslich bemerkt, dass der Quotient $\frac{A}{R}$ wenigstens auf vier …cimalstellen berechnet in Anwendung gebracht werden muss, wenn man ein …reichend genaues Resultat erzielen soll; derselbe kann jedoch bei Anwendung … die ersteren Näherungswerthe, wie bereits bemerkt, abgerundet werden.

II.

Indem wir die Vortheile der benannten Theorie in ihrer diesbezüglichen …wendung hervorgehoben haben, wollen wir uns dieselbe auch bei den übrigen …ndamentalformeln zu Nutzen machen.

Wir wollen demgemäss die Fundamentalformel von nachstehender Form …r Untersuchung unterziehen.

$$\frac{R([1+p]^n - 1)}{p[1+p]^n} = K, \text{ respective } \frac{K}{R} = \frac{1-[1+p]^{-n}}{p}$$

…d erhalten, wenn wir in derselben den Ausdruck

…0) $$(1+p)^{-n} = u$$

…tzen, durch einfache Manipulation die Gleichung

$$(11) \qquad u^{-\frac{1}{n}} + \frac{R}{K}u - \frac{R}{K} - 1 = 0$$

aus welcher auf analoge Art wie zuvor die Ersatzgleichung

$$(12) \qquad u = \underset{0<m<1}{\mathrm{E}}\left[1 + \frac{R}{K}(1-m)\right]^{-n}$$

hervorgeht.

Aus der Gleichung (10) ergibt sich nun folgende Aufgabe, für welc Werth u aus der Ersatzgleichung (12) berechnet werden muss.

Zu welchem Zinsfusse $P = 100 \,.\, p$ muss man ein gegebenes Capital Zinseszinsen anlegen, um sich hierdurch den Bezug einer Jahresrente n Jahre zu sichern?

Dieser Aufgabe entspricht, wie ersichtlich, die Relation

$$(13) \qquad p = u^{-\frac{1}{n}} - 1$$

welche aus der Gleichung (10) sich ergibt und in welcher die Unbeka durch die Ersatzgleichung (12), respective durch den Ausdruck

$$(14)\; u = \left[1 + \frac{R}{K}\left(1 - \left[1 + \frac{R}{K}\left(1 - \left[1 + \frac{R}{K}\left(1 - \left[1 + \frac{R}{K}(1-m)\right]^{-n}\right)\right]^{-n}\right)\right]^{-n}\right)\right.$$

dargestellt erscheint.

Um nun die praktische Brauchbarkeit dieses Verfahrens darzulegen, wir folgendes Beispiel durchführen:

Es sei

$$K = 23.900{\cdot}80 \,.\, R = 2000,\ n = 20,\ p?$$

so ergibt sich offenbar

$$\frac{R}{K} = 0{\cdot}08368154 \text{ und } u = \underset{0<m<1}{\mathrm{E}}\left[1 + 0{\cdot}08368\,(1-m)\right]^{-20}$$

Der Relation $0 < m < 1$ zufolge können wir $m = 0{\cdot}5$ als ersten Näh werth einsetzen, und es ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0{\cdot}45081 & \delta &= m_0 - m = -0{\cdot}04919\\
m'_0 &= 0{\cdot}40162 & &\\
m_1 &= 0{\cdot}37639 & \delta_1 &= m_1 - m'_0 = -0{\cdot}02523\\
m'_1 &= 0{\cdot}35116 & &\\
m_2 &= 0{\cdot}34736 & \delta_2 &= m_2 - m'_1 = -0{\cdot}00380\\
m'_2 &= 0{\cdot}34356 & &\\
m_3 &= 0{\cdot}343172 & \delta_3 &= m_3 - m'_2 = -0{\cdot}000388\\
m'_3 &= 0{\cdot}342784 & &\\
m_4 &= 0{\cdot}342752 & \delta_4 &= m_4 - m'_3 = -0{\cdot}000032\\
m'_4 &= 0{\cdot}342720 & &\\
m_5 &= 0{\cdot}342722 & &
\end{aligned}$$

somit u auf fünf Decimalstellen genau berechnet

$$u = 0{\cdot}342722$$

und hieraus der Gleichung (13) zufolge

$$p = [0{\cdot}342722]^{-\frac{1}{20}} - 1 = 0{\cdot}055001$$

Also das Capital K muss auf $5{\cdot}5\%$ angelegt sein, wenn es obigen Bedingungen entsprechen soll.

III.

Auf ähnliche Art wird die Fundamentalformel

$$(15)\qquad \frac{R[(1+p)^{an}-1]}{(1+p)^{an}\,.\,[(1+p)^{a}-1]}=K, \text{ respective } \frac{K}{R}=\frac{1-(1+p)^{-an}}{(1+p)^{a}-1}$$

behandelt werden müssen. Es ergibt sich nämlich, wenn wir hierin

$$(16)\qquad (1+p)^{a}=u$$

setzen, durch einfache Manipulation die Gleichung

$$(17)\qquad u^{-n}+\frac{K}{R}u-\frac{K}{R}-1=0$$

woraus sich offenbar die Ersatzgleichung

$$(18)\qquad u=\underset{1+\frac{R}{K}>m>1}{\mathrm{E}}\left(1+\frac{R}{K}(1-m^{-n})\right)$$

ergibt, welche der nachstehenden Relation entspricht:

$$(19)\qquad u=\left(1+\frac{R}{K}(1-\left[\left(1+\frac{R}{K}(1-\left[\left(1+\frac{R}{K}(1-\ldots\right.\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left.\ldots-\left[\left(1+\frac{R}{K}(1-m^{-n})\right)\right]^{-n}\right)\right)\right]^{-n}\right)\right)\right]^{-n}\ldots\right)$$

Dieser Eventualität zufolge liefert uns nun die Gleichung (16) zwei verschiedene Relationen, von denen die erste

$$(20)\qquad p=u^{\frac{1}{a}}-1$$

folgender Aufgabe entspricht:

Eine in Zwischenräumen von je a Jahren im Ganzen n-mal eingehende Rente R besitze a Jahre vor dem Bezuge der ersten Rente den Werth K. — Zu welchem Zinsfusse $P=100\,.\,p$ muss unter diesen Voraussetzungen K verzinslich angelegt werden?

Die zweite dagegen

$$(21)\qquad a=\frac{lg\ u}{lg\,(1+p)}$$

stimmt mit der nachstehenden Aufgabe überein:

Es sei K der Werth, welchen eine in Zwischenräumen von je a Jahren im Ganzen n-mal eingehende Rente R, a Jahre vor dem Bezuge der ersten Rente besitzt. — Auf welche Art ist eine allgemeine Darstellung von a in Function von K, R, n und des gewählten Zinsfusses P möglich?

Um nun die unterhalb des Ersatzzeichens in (18) angeführte Begrenzung des ersten Näherungswerthes m näher zu erörtern, brauchen wir nur die Gleichung (16) in Betracht zu ziehen, aus welcher offenbar hervorgeht, dass $u>1$ sein muss; demzufolge ergibt sich aber auch, dass u^{-n} immer ein positiver echter Bruch sein muss und somit aus der Gleichung (17) die Relation

$$1+\frac{K}{R}-\frac{K}{R}u>0$$

aus welcher unmittelbar die Ungleichung

$$\left(1+\frac{K}{R}\right)\frac{R}{K}>u \text{ oder } m<1+\frac{R}{K} \text{ hervorgeht.}$$

Es sei z. B.

$$K=5675{\cdot}865,\ R=1500,\ n=10,\ a=5,\ p?$$

ergibt sich offenbar

$$\frac{R}{K}=0{\cdot}264277$$

d

$$u=\underset{1<m<\frac{R}{K}+1}{\mathrm{E}}\left(1+0{\cdot}264277\,(1-m^{-10})\right)$$

Der erste Näherungswerth ist also

$$m<1{\cdot}264277, \text{ respective } m=1{\cdot}24$$

her:

$$\begin{array}{ll}
m_0=1{\cdot}23354 & \delta\ =m_0-m\ \ =-0{\cdot}00646 \\
m'_0=1{\cdot}22608 & \\
m_1=1{\cdot}22987 & \delta_1=m_1-m'_0=+0{\cdot}00379 \\
m'_1=1{\cdot}23366 & \\
m_2=1{\cdot}23203 & \delta_2=m_2-m'_1=-0{\cdot}00163 \\
m'_2=1{\cdot}23040 & \\
m_3=1{\cdot}23105 & \delta_3=m_3-m'_2=+0{\cdot}00065 \\
m'_3=1{\cdot}23170 & \\
m_4=1{\cdot}23139 & \delta_4=m_4-m'_3=-0{\cdot}00031 \\
m'_4=1{\cdot}23108 & \\
m_5=1{\cdot}23123 & \delta_5=m_5-m'_4=+0{\cdot}00015 \\
m'_5=1{\cdot}23138 & \\
m_6=1{\cdot}23131 & \delta_6=m_6-m'_5=-0{\cdot}00007
\end{array}$$

Da nun hier negative und positive Differenzen miteinander abwechse[ln,] [kö]nnen wir den Mittelwerth der beiden auf vier Decimalstellen genau bestim[mten] [N]äherungswerthe m'_5 und m_6

$$\text{d. h. } \frac{m'_5+m_6}{2}=u=1{\cdot}231345$$

[al]s Resultatswerth betrachten. Es ist demnach der Werth des p ebenfalls gefu[nden] [u]nd zwar:

$$p=(1{\cdot}231345)^{\frac{1}{5}}-1=0{\cdot}0425003$$

[d.] h. der Zinsfuss $P=4^1/_4\%$.

Wie ersichtlich, sind bei dieser Berechnung sehr geringe Differenzen [vorh]anden, so dass die bisher angewendete Differenzen-Methode in diesem [Falle,] [d.] h. bei der Ersatzgleichung (18), überflüssig erscheint, indem dieselbe [hie]r unter diesen Eventualitäten keinen Vortheil bietet, sondern sogar eine [Verzö]gerung in der Berechnung verursacht. Wir wollen daher ein- für allema[l den] [G]rundsatz aufstellen, dass obige Differenzen-Methode nur bei jenen E[rsatzg]leichungen, wo grössere Differenzen vorkommen, in Anwendung zu bringe[n,] [w]ogegen im entgegengesetzten Falle jene aus der Ersatzgleichung sich ergebe[nden] [je]weiligen Näherungswerthe direct wieder in dieselbe anstatt m zu substituiren

Dr. Ludwig Grossmann's

ische Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen ;endenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

II.

\ls zweites Beispiel gelte folgendes: Es sei $K = 3019{\cdot}65$, $R = 800$, 00 . $p = 6$, $n = 20$, a?

$$\frac{R}{K} = 0{\cdot}264983$$

$$u = \underset{1 < m < \frac{R}{K} + 1}{\mathrm{E}} \left(1 + 0{\cdot}264983\,(1 - m^{-20})\right)$$

$$m < 1{\cdot}264983 \text{ respective } m = 1{\cdot}26$$

l·262378, $m_1 = 1{\cdot}2624755$, $m_2 = 1{\cdot}2624781$, $m_3 = 1{\cdot}262478$ also $u = 1{\cdot}262478$)mit der Formel (21) gemäss

$$a = \frac{lg\, u}{lg\,(1+p)} = \frac{0{\cdot}1012236}{0{\cdot}0253059} = 4$$

IV.

)ie Fundamentalformel

$$A\,(1+p)^n + \frac{R\,[(1+p)^n - 1]}{p} = K$$

offenbar auch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\left(A + \frac{R}{p}\right)(1+p)^n = K + \frac{R}{p} \text{ resp. } (1+p)^n = \frac{Kp+R}{Ap+R}$$

ɜ die einzige continuirliche der Gleichung (22) entsprechende Ersatzgleichung

$$p = \underset{m>0}{\mathrm{E}} \left(\left[\frac{Km+R}{Am+R}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

geht, welcher folgende Aufgabe entspricht: Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$;in Capital A verzinslich angelegt werden, um bei einer am Ende eines Jahres stattfindenden Zulage R nach n Jahren den Endwerth K zu erreichen? . B. es sei:

$$K = 20722{\cdot}37,\ A = 5000,\ R = 1000,\ n = 10,\ p?$$

l die Ersatzgleichung hiefür folgendermassen lauten:

$$p = \underset{m>0}{\mathrm{E}} \left(\left[\frac{20722{\cdot}37\,m + 1000}{5000\,m + 1000}\right]^{\frac{1}{10}} - 1 \right)$$

littelst Anwendung der Differenzen-Methode ergibt sich also für $m > 0$ $= 0{\cdot}1$

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0{\cdot}07491 & \delta &= m_0 - m &&= -0{\cdot}02509 \\
m'_0 &= 0{\cdot}04982 \\
m_1 &= 0{\cdot}04991 & \delta_1 &= m_1 - m'_0 &&= +0{\cdot}00009 \\
m'_1 &= 0{\cdot}05000 \\
m_2 &\doteq 0{\cdot}050000 & \delta_2 &= m_2 - m'_1 &&= -0{\cdot}000000
\end{aligned}$$

demnach $p = 0{\cdot}05$.

V.

Auf eine ganz andere Art gestaltet sich jedoch die Auffindung der Ersatzgleichung für die Fundamentalformel

$$A(1+p)^n - \frac{R[(1+p)^n - 1]}{p} \doteq K \tag{25}$$

Wir werden nemlich hier die drei Fälle unterscheiden müssen, wo $K > A$, $K < A$ und $K = A$ ist.

Jeder dieser drei Fälle liefert uns für p eine andere Gleichung, welche den Anforderungen der Continuität entspricht.

Setzen wir in der Gleichung (25) den Ausdruck

$$(1+p)^n = u \text{ resp. } p = u^{\frac{1}{n}} - 1$$

so ergibt sich offenbar die Gleichung

$$u^{\frac{1}{n}} - \frac{R(u-1)}{Au - K} - 1 = 0 \tag{26}$$

aus welcher die Ersatzgleichung

$$u = \underset{m > 1}{\overset{K < A}{\mathrm{E}}} \left(1 + \frac{R(m-1)}{Am - K}\right)^n \tag{27}$$

für $K < A$ hervorgeht.

Setzen wir ferner bei der Gleichung (25) den Ausdruck

$$(1+p)^n \left(A - \frac{R}{p}\right) = K - \frac{R}{p}.$$

als jene die Ersatzgleichung bildende Form voraus, so ergibt sich

$$p = \underset{\frac{R}{A} < p_0 > 0}{\overset{K > A}{\mathrm{E}}} \left(\left[\frac{Kp_0 - R}{Ap_0 - R}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \tag{28}$$

als Ersatzgleichung für $K > A$, worin p_0 ebenso, wie in früheren Ersatzgleichungen m, als Ersatzwerth zu betrachten ist. Aus der Gleichung (26) geht schliesslich auch die Gleichung für $K = A$ hervor; dieselbe lautet:

$$p = \frac{R}{A} \text{ resp. } p = \frac{R}{K} \tag{29}$$

Den drei letzten Formeln entspricht nun folgende Aufgabe:

Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$ muss ein Capital A verzinslich angelegt werden, wenn dasselbe bei einer am Ende eines jeden Jahres erfolgenden Abnützung um den Betrag R nach n Jahren den Endwerth K erhalten soll?

Z. B. es wäre die Aufgabe gestellt:

$K = 1447$, $A = 6000$, $R = 500$, $n = 15$, $P = 100p$?

bt sich offenbar eine der Form (27) entsprechende Ersatzgleichung

$$u = \underset{m>1}{\mathrm{E}} \left(1 + \frac{500\,(m-1)}{6000\,m - 1447}\right)^{15}$$

r erhalten sonach folgende Näherungswerthe: $m > 1$ resp. $m = 1\cdot1$; ferner

$$\begin{array}{ll}
m_0 = 1\cdot1665 & \delta = m_0 - m = +0\cdot0665 \\
m'_0 = 1\cdot2330 & \\
m_1 = 1\cdot35868 & \delta_1 = m_1 - m'_0 = +0\cdot12568 \\
m'_1 = 1\cdot48436 & \\
m_2 = 1\cdot65554 & \delta_2 = m_2 - m'_1 = +0\cdot17118 \\
m'_2 = 1\cdot82672 & \\
m_3 = 1\cdot93264 & \delta_3 = m_3 - m'_2 = +0\cdot10592 \\
m'_3 = 2\cdot03856 & \\
m_4 = 2\cdot02469 & \delta_4 = m_4 - m'_3 = -0\cdot01387 \\
m'_4 = 2\cdot01082 & \\
m_5 = 2\cdot00878 & \delta_5 = m_5 - m'_4 = -0\cdot00204 \\
m'_5 = 2\cdot00674 & \\
m_6 = 2\cdot00662 & \delta_6 = m_6 - m'_5 = -0\cdot00012 \\
m'_6 = 2\cdot00650 & \\
m_7 = 2\cdot00625 & \delta_7 = m_7 - m_6 = -0\cdot00025 \\
m'_7 = 2\cdot00600 & \\
m_8 = 2\cdot005958 & \delta_8 = m_8 - m'_7 = -0\cdot000042 \\
m'_8 = 2\cdot005916 & \\
m_9 = 2\cdot005910 & \delta_9 = m_9 - m'_8 = -0\cdot000006 \\
m'_9 = 2\cdot005904 & \\
m_{10} = 2\cdot005903 & \delta_{10} = m_{10} - m'_9 = -0\cdot000001
\end{array}$$

$u = 2\cdot005903$ und daraus mit Hilfe der Relation (25), (26)

$$p = (2\cdot005903)^{\frac{1}{15}} - 1 = 0\cdot0475002$$

$= 100\,p = 4^3/_4\,\%$.

Anschlusse an jene Fundamentalformeln sei noch der beiden nachfol- Erwähnung gethan:

$$A\,(1+p)^n + \frac{R\,(1+p)}{p}\Big((1+p)^n - 1\Big) = K$$

$$A\,(1+p)^n - \frac{R\,(1+p)}{p}\Big((1+p)^n - 1\Big) = K$$

mit den Formen (22) und (25) analoge Lösungen besitzen.

s lautet nämlich für *(a)* die Ersatzgleichung

$$\ldots\ldots\quad p = \underset{p_0>0}{\mathrm{E}} \left(\left[\frac{(K+R)\,p_0 + R}{(A+R)\,p_0 + R}\right]^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

haben wir dagegen abermals drei verschiedene Fälle, nämlich für $A > K$, $A = K$; es sind dies folgende Ersatzgleichungen:

$$\ldots \left\{\begin{array}{l}
A > K;\; u = \overset{K<A}{\underset{m>1}{\mathrm{E}}} \left[1 - \frac{R\,(m-1)}{A\,m - K}\right]^{-n} \text{ wobei } u^{\frac{1}{n}} - 1 = p \\
A < K;\; p = \overset{K>A}{\underset{p_0>0}{\mathrm{E}}} \left(\left[\frac{(K-R)\,p_0 - R}{(A-R)\,p_0 - R}\right]^{\frac{1}{n}} - 1\right) \\
A = K;\; p = \frac{R}{A-R} \text{ respective } \frac{R}{K-R}
\end{array}\right.$$

VI.

Die Fundamentalformel

$$A(1+p)^{an} + \frac{R[(1+p)^{an} - 1]}{(1+p)^a - 1} = K \tag{30}$$

übergeht für die Substitution

$$(1+p)^a - 1 = u \text{ in die Form} \tag{31}$$

$$\left(A + \frac{R}{u}\right)(u+1)^n = K + \frac{R}{u} \text{ respective } (u+1)^n = \frac{Ku+R}{Au+R} \tag{32}$$

aus welcher sich offenbar die Ersatzgleichung

$$u = \mathrm{E}\left(\left|\frac{Km+R}{Am+R}\right|^{\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{33}$$

ergibt, welche mit den aus der Gleichung (31) entspringenden Relatio

$$p = (u+1)^{\frac{1}{a}} - 1 \tag{34}$$

$$a = \frac{lg\,(u+1)}{lg\,(p+1)} \tag{35}$$

folgenden zwei Aufgaben entspricht. Jene mit der Relation (34) c dirende lautet nun:

Zu welchem Zinsfusse $P = 100\,p$ muss ein Capital A verzinslich werden, um bei in Intervallen von je a Jahren erfolgenden gleichen Z nach an Jahren den Endwerth K zu erreichen?

Jene der Relation (33) entsprechende ergibt sich folgendermassen

Ein zu dem Zinsfusse P verzinslich angelegtes Capital A erh hintereinander in gleichen Intervallen eine gewisse Zulage R und d schliesslich den Endwerth K. — Wie viel Jahre sind regelmässig zw zwei Einzahlungen verflossen?

Zur Documentirung der praktischen Anwendbarkeit obiger Forme wir nun für jede einzelne Aufgabe ein Beispiel durchführen.

Es sei z. B. $K = 13673{\cdot}10$, $A = 2000$, $R = 400$, $a = 3$, $n = 10$, p?, sich offenbar folgende Ersatzgleichung, wenn wir die betreffenden Wer Gleichung (33) substituiren:

$$u = \mathop{\mathrm{E}}_{m>0}\left(\left|\frac{13673{\cdot}10\,.\,m + 400}{2000\,.\,m + 400}\right|^{\frac{1}{10}} - 1\right)$$

Als erster einzusetzender Näherungswerth ist $m > 0$ respective $m =$

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0{\cdot}11408 & \delta &= m_0 - m &&= +0{\cdot}01408\\
m'_0 &= 0{\cdot}12816\\
m_1 &= 0{\cdot}12610 & \delta_1 &= m_1 - m'_0 &&= -0{\cdot}00206\\
m'_1 &= 0{\cdot}12404\\
m_2 &= 0{\cdot}12456 & \delta_2 &= m_2 - m'_1 &&= +0{\cdot}00052\\
m'_2 &= 0{\cdot}12508\\
m_3 &= 0{\cdot}12497 & \delta_3 &= m_3 - m'_2 &&= -0{\cdot}00011\\
m'_3 &= 0{\cdot}12486\\
m_4 &= 0{\cdot}12486
\end{aligned}$$

das heisst $u = 0{\cdot}12486$ und der Gleichung (34) gemäss

$$p = (1{\cdot}12486)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{\cdot}04001, \text{ also } P = 100\,p = 4\%.$$

ites Beispiel gelte folgendes:
3000, $K = 18030{\cdot}22$, $R = 1000$, $n = 5$, $P = 100 . p = 6$, a?
tsprechend ergibt sich wieder die Ersatzgleichung

$$u = \underset{m>0}{\mathrm{E}}\left(\left[\frac{18030{\cdot}22\,m + 1000}{3000\,.\,m + 1000}\right]^{\frac{1}{5}} - 1\right)$$

espective $m = 0{\cdot}1$ liefert uns dieselbe sofort folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 0{\cdot}16612 & \delta &= m_0 - m &&= +\,0{\cdot}06612\\
m'_0 &= 0{\cdot}23224\\
m_1 &= 0{\cdot}25047 & \delta_1 &= m_1 - m'_0 &&= +\,0{\cdot}01813\\
m'_1 &= 0{\cdot}26860\\
m_2 &= 0{\cdot}264735 & \delta_2 &= m_2 - m'_1 &&= -\,0{\cdot}003865\\
m'_2 &= 0{\cdot}260870\\
m_3 &= 0{\cdot}261422 & \delta_3 &= m_3 - m'_2 &&= +\,0{\cdot}000552\\
m'_3 &= 0{\cdot}261974\\
m_4 &= 0{\cdot}262293 & \delta_4 &= m_4 - m'_3 &&= +\,0{\cdot}000319\\
m'_4 &= 0{\cdot}262612\\
m_5 &= 0{\cdot}262526 & \delta_5 &= m_5 - m'_4 &&= -\,0{\cdot}000086\\
m'_5 &= 0{\cdot}262440\\
m_6 &= 0{\cdot}262460 & \delta_6 &= m_6 - m'_5 &&= +\,0{\cdot}000020\\
m'_6 &= 0{\cdot}262480\\
m_7 &= 0{\cdot}262480 & \delta_7 &= m_7 - m'_6 &&= +\,0
\end{aligned}$$

folge $u = 0{\cdot}262480$ und somit der Gleichung (35) gemäss:

$$a = \frac{lg\,1{\cdot}262480}{lg\,1{\cdot}06} = \frac{0{\cdot}1012244}{0{\cdot}0253059} = 4 \text{ als Resultat.}$$

VII.

ndamentalformel

$$A\,(1+p)^{an} - \frac{R\,[(1+p)^{an} - 1]}{(1+p)^a - 1} = K$$

nn wir in dieselbe den Werth

$$(1+p)^{an} = u \text{ respective } (1+p)^a = u^{\frac{1}{n}}$$

in folgende Relation:

$$\left(A - \frac{K}{u}\right)\left(u^{\frac{1}{n}} - 1\right) = R\left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

die continuirliche Ersatzgleichung

$$u = \underset{m>1}{\overset{K<A}{\mathrm{E}}}\left(1 + \frac{R\,(m-1)}{Am - K}\right)^n$$

ch wieder nur für die Relation $K < A$ Giltigkeit hat. Wir unter-mlich wieder wie in V. drei verschiedene Fälle: $K < A$, $K > A$

n aber auch für den zweiten Fall eine demselben entsprechende e Ersatzgleichung zu erlangen, setzen wir in der Gleichung (36) Ausdruckes $(1+p)^a - 1$ die Grösse v, also

$$(1+p)^a - 1 = v \text{ respective } (1+p)^{an} = (v+1)^n$$

Die Fun

(30)

übergeht für

(31)

(32)

aus welcher si

(33)

ergibt, welche

(34)

(35)

folgenden zwei
dirende lautet

Zu welch
werden, um be
nach *an* Jahren

Jene der

Ein zu d
hintereinander
schliesslich den
zwei Einzahlung

Zur Docum
wir nun für jed

Es sei z. B
sich offenbar fo
Gleichung (33)

... entsprechende

Als erster

... -1)

... ungswerth ist, wie ersich

... Differenzen-Methode: $m_0 = 0·5$ ...
... $m_4 = 0·37220$, $m_5 = 0·36$ ...
... $m_9 = 0·3700733$, $m_{10} = 0·$ ...

das heisst $u =$

... arithmetische Mittel der letzte...
... erhalten wir:

$v = 0{\cdot}3700831$, somit nach (44)

$$p = (1{\cdot}3700831)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{\cdot}065$$

Beispiel gelte folgendes:
68·42, $A = 10000$, $R = 2000$, $n = 8$, $p = 0{\cdot}04125$, a?
tlich, werden wir hier die Form (39) benützen müssen, da
; somit die Ersatzgleichung

$$u = \underset{m>1}{\mathrm{E}}\left(1 + \frac{2000\,(m-1)}{10000\,m - 968{\cdot}42}\right)^8$$

l respective $m = 1{\cdot}1$ als erster Näherungswerth eingesetzt, fol-
·gibt:

$$\begin{array}{ll}
m_0 = 1{\cdot}17166 & \delta = m_0 - m = +0{\cdot}07166 \\
m'_0 = 1{\cdot}24332 & \\
m_1 = 1{\cdot}39543 & \delta_1 = m_1 - m'_0 = +0{\cdot}15211 \\
m'_1 = 1{\cdot}54754 & \\
m_2 = 1{\cdot}79012 & \delta_2 = m_2 - m'_1 = +0{\cdot}25258 \\
m'_2 = 2{\cdot}04270 & \\
m_3 = 2{\cdot}15484 & \delta_3 = m_3 - m'_2 = +0{\cdot}11214 \\
m'_3 = 2{\cdot}26698 & \\
m_4 = 2{\cdot}44080 & \delta_4 = m_4 - m'_3 = +0{\cdot}17382 \\
m'_4 = 2{\cdot}61462 & \\
m_5 = 2{\cdot}62570 & \delta_5 = m_5 - m'_4 = +0{\cdot}01108 \\
m'_5 = 2{\cdot}63678 & \\
m_6 = 2{\cdot}63750 & \delta_6 = m_6 - m'_5 = +0{\cdot}00072 \\
m'_6 = 2{\cdot}63822 & \\
m_7 = 2{\cdot}638265 & \delta_7 = m_7 - m'_6 = +0{\cdot}000045 \\
m'_7 = 2{\cdot}638301 & \\
m_8 = 2{\cdot}638301 & \delta_8 = m_8 - m'_7 = +0{\cdot}000000
\end{array}$$

; ist $u = 2{\cdot}638301$ und der Relation (45) zufolge ergibt sich der
e folgt:

$$a = \frac{lg\,2{\cdot}638301}{8\,lg\,1{\cdot}04125} = \frac{0{\cdot}4213244}{0{\cdot}1404416} = 3$$

VIII.

in schliesslich die Fundamentalformel*)

$$= \frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^{a+n-1}} \text{ respective } \frac{A}{R} = \frac{1-(1+p)^{-n}}{p\,(1+p)^{a-1}}$$

der Untersuchung zu unterziehen. Der Form (46) entspricht
orm

$$(1+p)^{-a} \cdot \frac{1-(1+p)^{-n}}{\dfrac{p}{1+p}} = \frac{A}{R}$$

ir in derselben den Ausdruck

$$(1+p)^{-n} = u \text{ respective } p = u^{-\frac{1}{n}} - 1$$

de Gleichung übergeht:

über Prof. Kunze's Abhandlung: Die wichtigsten Formeln der Zins- und Renten-
f. Dr. Oscar Simony, seine Abhandlung über dasselbe Thema.

Demzufolge ergibt sich offenbar die Relation

$$\left(A-\frac{R}{v}\right)(v+1)^n = K-\frac{R}{v} \tag{41}$$

aus welcher die Ersatzgleichung

$$v = \underset{\frac{R}{A}<m>0}{\overset{K>A}{\mathrm{E}}} \left(\left[\frac{Km-R}{Am-R}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \tag{42}$$

für die Bedingung $K>A$ hervorgeht.

Schliesslich ergibt sich auch für den dritten Fall $K=A$ die Relati

$$(1+p)^a = \frac{R}{A}+1 \tag{43}$$

woraus sich offenbar sowohl p als auch a direct bestimmen lässt.

Den Gleichungen (37) und (40) entsprechen nun je zwei aus de sich ergebenden Relationen

$$p = u^{\frac{1}{an}} - 1,\ p = (v+1)^{\frac{1}{a}} - 1 \tag{44}$$

$$a = \frac{lg\,u}{n\,lg\,(1+p)},\ a = \frac{lg\,(1+v)}{lg\,(1+p)} \tag{45}$$

von denen die ersteren (44) folgender Aufgabe entsprechen:

Zu welchem Zinsfusse $P=100\,p$ muss ein gegebenes Capital A ver angelegt werden, wenn dasselbe bei einer in Intervallen von je a Jahre findenden Verminderung um den Betrag R nach an Jahren den Endw erhalten soll?

Die letzteren sodann, d. i. (45), mit nachstehender Aufgabe ü stimmen:

Ein zu dem Zinsfusse P verzinslich angelegtes Capital A erfahr hintereinander in gleichen Intervallen eine Verminderung um den Betrag erhalte demzufolge schliesslich den Endwerth K. — Wie viele Jahre ein jedes dieser Intervalle?

Z. B. es wäre $K=707.736$, $A=4000$, $R=1000$, $n=20$, $a=5$, wird uns, da $K>A$ ist, die der Formel (42) entsprechende Ersatzgleichu

$$v = \underset{\frac{R}{A}<m>0}{\mathrm{E}} \left(\left[\frac{707736\,m-1000}{4000\,m-1000}\right]^{\frac{1}{20}} - 1 \right)$$

zum Ziele führen. Der erste Näherungswerth ist, wie ersichtlich, $\frac{R}{A} <$ respective $m=0{\cdot}26$.

Es ergibt sich daher ohne Differenzen-Methode: $m_0=0{\cdot}52412$, $m_1=0$ $m_2=0{\cdot}38531$, $m_3=0{\cdot}36470$, $m_4=0{\cdot}37220$, $m_5=0{\cdot}36928$, $m_6=0$ $m_7=0{\cdot}37000$, $m_8=0{\cdot}37012$, $m_9=0{\cdot}3700733$, $m_{10}=0{\cdot}370093$.

Wenn wir nun das arithmetische Mittel der letzten zwei Näh werthe m_9 und m_{10} nehmen, erhalten wir:

$$v = 0{\cdot}3700831, \text{ somit nach (44)}$$

$$p = (1{\cdot}3700831)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{\cdot}065$$

Als zweites Beispiel gelte folgendes:

$$K = 968{\cdot}42,\ A = 10000,\ R = 2000,\ n = 8,\ p = 0{\cdot}04125,\ a?$$

Wie ersichtlich, werden wir hier die Form (39) benützen müssen, da 1 ist; es ist somit die Ersatzgleichung

$$u = \underset{m > 1}{\mathrm{E}}\left(1 + \frac{2000\,(m-1)}{10000\,m - 968{\cdot}42}\right)^{8}$$

lcher $m > 1$ respective $m = 1{\cdot}1$ als erster Näherungswerth eingesetzt, fol- Werthe ergibt:

$$\begin{array}{ll}
m_0 = 1{\cdot}17166 & \delta = m_0 - m = +0{\cdot}07166 \\
m'_0 = 1{\cdot}24332 & \\
m_1 = 1{\cdot}39543 & \delta_1 = m_1 - m'_0 = +0{\cdot}15211 \\
m'_1 = 1{\cdot}54754 & \\
m_2 = 1{\cdot}79012 & \delta_2 = m_2 - m'_1 = +0{\cdot}25258 \\
m'_2 = 2{\cdot}04270 & \\
m_3 = 2{\cdot}15484 & \delta_3 = m_3 - m'_2 = +0{\cdot}11214 \\
m'_3 = 2{\cdot}26698 & \\
m_4 = 2{\cdot}44080 & \delta_4 = m_4 - m'_3 = +0{\cdot}17382 \\
m'_4 = 2{\cdot}61462 & \\
m_5 = 2{\cdot}62570 & \delta_5 = m_5 - m'_4 = +0{\cdot}01108 \\
m'_5 = 2{\cdot}63678 & \\
m_6 = 2{\cdot}63750 & \delta_6 = m_6 - m'_5 = +0{\cdot}00072 \\
m'_6 = 2{\cdot}63822 & \\
m_7 = 2{\cdot}638265 & \delta_7 = m_7 - m'_6 = +0{\cdot}000045 \\
m'_7 = 2{\cdot}638301 & \\
m_8 = 2{\cdot}638301 & \delta_8 = m_8 - m'_7 = +0{\cdot}000000
\end{array}$$

Demgemäss ist $u = 2{\cdot}638301$ und der Relation (45) zufolge ergibt sich der h von a wie folgt:

$$a = \frac{lg\,2{\cdot}638301}{8\,lg\,1{\cdot}04125} = \frac{0{\cdot}4213244}{0{\cdot}1404416} = 3$$

VIII.

Es wäre nun schliesslich die Fundamentalformel*)

$$\frac{A}{R} = \frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^{a+n-1}} \text{ respective } \frac{A}{R} = \frac{1-(1+p)^{-n}}{p\,(1+p)^{a-1}}$$

esem Sinne der Untersuchung zu unterziehen. Der Form (46) entspricht auch die Form

$$(1+p)^{-a} \cdot \frac{1-(1+p)^{-n}}{\dfrac{p}{1+p}} = \frac{A}{R}$$

he, wenn wir in derselben den Ausdruck

$$(1+p)^{-n} = u \text{ respective } p = u^{-\frac{1}{n}} - 1$$

en, in folgende Gleichung übergeht:

*) Siehe hierüber Prof. Kunze's Abhandlung: Die wichtigsten Formeln der Zins- und Renten- nung, und Prof. Dr. Oscar Simony, seine Abhandlung über dasselbe Thema.

$$(49)\qquad u^{\frac{a}{n}}\left(\frac{1-u}{1-u^{\frac{1}{n}}}\right)=\frac{A}{R}\text{ respective } u^{\frac{1}{n}}+\frac{R}{A}u^{\frac{a}{n}}(1-u)-1=0$$

aus der sich die einzige für diesen Fall continuirliche Ersatzgleichung

$$(50)\qquad u=\mathrm{E}\left(1-\frac{R}{A}m^{\frac{a}{n}}(1-m)\right)^{n}$$

ergibt.

Dieser und der Gleichung (48) entspricht nun folgende Aufgabe:

Zu welchem Zinsfusse $P=100p$ ist ein gegebenes Capital A an wenn hierdurch der Bezug einer nachschussweisen Jahresrente R g werden soll, welche zum erstenmal nach a Jahren eingeht und im Ganze n Jahre fortläuft? Z. B. $A=7501$, $R=1000$, $n=10$, $a=4$, p?

Für diesen Fall ergibt sich also die Ersatzgleichung

$$u=\mathop{\mathrm{E}}_{m>0}\left(1-\frac{1000\,m^{\frac{2}{5}}(1-m)}{7501}\right)^{10}$$

in welche $m>0$, respective $m=0{\cdot}1$ eingesetzt, den Werth $m_0=0{\cdot}6129$ mit Hilfe dessen wir den Näherungswerth $m_1=0{\cdot}64821$ erhalten. Wie ers ist die Annäherung vom Näherungswerthe m zu m_0 eine sprungweise, jedoch von hier an continuirlich verläuft; wir werden daher in diese erst von m_1 angefangen die Differenzen-Methode anwenden. Es ergibt sic

$$\delta_0=m_1-m_0=+0{\cdot}03529$$

$$\begin{aligned}
m'_1&=0{\cdot}68350\\
m_2&=0{\cdot}69132 & \delta_1&=m_2-m'_1=+0{\cdot}00772\\
m'_2&=0{\cdot}69904\\
m_3&=0{\cdot}70196 & \delta_2&=m_3-m'_2=+0{\cdot}00292\\
m'_3&=0{\cdot}70488\\
m_4&=0{\cdot}70605 & \delta_3&=m_4-m'_3=+0{\cdot}00117\\
m'_4&=0{\cdot}70722\\
m_5&=0{\cdot}70771 & \delta_4&=m_5-m'_4=+0{\cdot}00049\\
m'_5&=0{\cdot}70820\\
m_6&=0{\cdot}70840 & \delta_5&=m_6-m'_5=+0{\cdot}00020\\
m'_6&=0{\cdot}70860\\
m_7&=0{\cdot}70869 & \delta_6&=m_7-m'_6=+0{\cdot}00009\\
m'_7&=0{\cdot}70878\\
m_8&=0{\cdot}708848 & \delta_7&=m_8-m'_7=+0{\cdot}000068\\
m'_8&=0{\cdot}708916\\
m_9&=0{\cdot}708914 & \delta_8&=m_9-m'_8=-0{\cdot}000002
\end{aligned}$$

daher u auf fünf Decimalstellen genau berechnet:

$$u=0{\cdot}708914$$

und der Gleichung (48) zufolge

$$p=(0{\cdot}708914)^{-\frac{1}{10}}-1=0{\cdot}035001$$

Bei allen durchgeführten Beispielen haben wir die Berechnung bis Genaueste vollzogen; für die praktische Berechnung genügt wohl die H gemachten Proceduren, um einen hinreichend genauen Werth zu erlang

---

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

Dr. Ludwig Grossmann's

aktische Anwendung der Theorie und Lösung der irreductibelen nscendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

Das Gebiet der Zinseszins- und Rentenrechnung umfasst je nach dem ndpunkte, von welchem dieselbe in Anwendung kommt, eine Unzahl in ihrer mannigfacher Fragen, welche jedoch bei scheinbar gänzlich verschiedener d ihrem Zwecke gemäss oft vollständig divergirender Beschaffenheit zweier er mehrerer derselben, im Principe eine frappante Verwandtschaft in sich liessen. Wir müssen es dem Leser überlassen, diese oder jene Frage seinen bezüglichen Zwecken dienstbar zu machen und wollen uns nur darauf benken, die Fragen theoretisch zu lösen und nebenbei auf die verschiedenen ihrer Anwendung aufmerksam zu machen.

Es ist oft schon die Frage erörtert worden, wie es möglich ist, zwei oder re Capitalsanlagen, die betreffs ihres Zinsfusses und Anlagedauer verdenartig sind, in eine einzige zusammenzuziehen, beziehungsweise die durchtliche Verzinsung zweier oder mehrerer zu verschiedenem Zinsfuss und gedauer hinterlegten Capitalsanlagen zu ermitteln, wobei offenbar die frag- Durchschnittsanlagedauer, wie auch der von derselben abhängige Durchittszinsfuss, Functionen der gegebenen einzelnen analogen Factoren sind.

Es ist selbstverständlich, dass wir, um die Lösung dieser Frage zur Durchng zu bringen, die einzelnen Momente in Betracht ziehen müssen, die die twortung derselben in erster Linie erschweren. Bei gewöhnlicher Capitalse auf Zinsen und Zinseszinsen kommen solche Momente weniger in Betracht, bei den complicirter sich gestaltenden Renten- und Annuitätenberechnungen.

Wir werden daher, um allen Anforderungen in diesem Sinne zu entsprechen, Aufgabe vorerst einer allgemeinen Erörterung unterziehen, um sodann auf einzelnen speciellen Fälle übergehen zu können.

Es seien zu diesem Behufe die Formen der jeweiligen in Rechnung zu nden Relationen einstweilen durch die beiden folgenden in allgemeinem e dargestellten Gleichungen ausgedrückt:

$$K_n = f(K_1, R_1, p, n, a)$$
$$K_m = f(K_2, R_2, q, m, b)$$

n K_n und K_m die jeweiligen Endecapitalien, K_1 und K_2 die Anfangscapitalien, nd R_2 die Renten, $P = 100p$ und $Q = 100q$ den Zinsfuss, m und n die prechende Anlagedauer, a und b die jeweiligen Intervalle der Rentenzuschüsse Abgaben bezeichnen. Die unserer Frage entsprechende Resultatsgleichung et sich somit folgendermassen:

$$K_n + K_m = f[(K_1 + K_2), (R_1 + R_2), x, t, v]$$

Es sind daher drei Unbekannte in dieser Gleichung vorhanden, und zwar 00x der fragliche Zinsfuss, t die fragliche Anlagedauer und v das der

Gleichung (3) entsprechende Rentenintervall, von denen jedoch jede blos ihre Existenzberechtigung beibehält, als die in den Gleichungen (1) und haltenen, der fraglichen Unbekannten entsprechenden, analog bezeichneten eine Differenz aufweisen. In dem Momente z. B., wo die Renteninter und b einander gleich sind, verliert auch v die Beschaffenheit einer Unbek und wird demzufolge

$$a = b = v$$

Wir wollen daher, um unsere Frage einfacher zu gestalten, diesen bis auf weiteres festhalten und uns blos mit den beiden Unbekannten d. i. Zinsfuss und Anlagedauer, beschäftigen.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) erfahren daher eine Veränderung gendem Sinne:

$$4) \qquad K_n = f(K_1, R_1, p, n, a)$$

$$5) \qquad K_m = f(K_2, R_2, q, m, a)$$

$$6) \qquad K_n + K_m = f[(K_1 + K_2), (R_1 + R_2), x, t, a] .$$

Nun bedürfen wir aber, da wir hier offenbar zwei Unbekannte u eine Gleichung haben, in welcher dieselben vorkommen, zu einer rationellen noch eine zweite Gleichung, welche wir mit Hilfe folgender Norm errei

Nehmen wir an, es wäre die Anlagedauer $m > n$, so werden wir folg denjenigen Moment zu ermitteln haben, in welchem die Capitalsvergrö von K_n durch einen entsprechenden Zuwachs der Anlagedauer gleich Capitalsverminderung von K_m durch eine gewisse Abnahme der Anlagedaue n solange wachsen und m solange abnehmen muss, bis beide einande sind; dieses Ergebniss ist sodann die gesuchte gemeinschaftliche Anlage

Wir können daher folgende Relation, die den genannten Anford entspricht, aufstellen: Bezeichnen wir diejenigen, den Functionen f und f' e wirkenden Proceduren, beziehungsweise mit φ und ψ, die gesuchte geme liche Anlagedauer mit t, so wird der Zuwachs von K_n in der Zeit t Abnahme von K_m in der Dauer $t - m$ stattfinden; somit die Form, welch Auseinandersetzungen entspricht

$$7) \qquad \varphi[f(K_1, R_1, p, n, a), t - n] = \psi[f'(K_2, R_2, q, m\, a), t - m]$$

respective

$$K_n + K_m = f(K_1, R_1, p, t, a) + f'(K_2, R_2, q, t, a)$$

Aus der Gleichung (7) ist es uns nun möglich, die Unbekannte stimmen und durch Substitution derselben in die Gleichung (6) auch bekannte Grössen auszudrücken.

Um nun dieses Theorem der praktischen Anwendung zuzuführen, einige Beispiele hier folgen:

Es sei die Frage aufgeworfen, wie es möglich ist, zwei zu ung Zinsfuss und Anlagedauer hinterlegte Capitalien zu einer einzigen Capit umzuwandeln.

In diesem Falle werden die Gleichungen (4) und (5) insoferne eine Vereinfachung erfahren, als die Grössen R und a gänzlich wegfallen und somit den ...enen Formen

$$K_n = f(K_1, p, n) = K_1 (1+p)^n$$

$$K_m = f(K_2, q, m) = K_2 (1+q)^m$$

...sprechen werden. Demzufolge ergibt sich auch die resultirende Gleichung

$$K_m + K_n = K_1 (1+p)^n + K_2 (1+q)^m = (K_1 + K_2)(1+x)^t$$

... auch

$$K_1 (1+p)^n [(1+p)^{t-n} - 1] = K_2 (1+q)^m [1 - (1+q)^{t-m}]$$

...d zwar mit der Vorbedingung, dass die Anlagedauer $m > n$ ist. — Hieraus ...gibt sich sodann die Relation

$$K_1 (1+p)^t + K_2 (1+q)^t = K_1 (1+p)^n + K_2 (1+q)^m$$

Aus dieser Gleichung müssen wir nun den Werth des t zu ermitteln suchen. ...r kommt nun wieder unsere Theorie der transcendenten Gleichungen zur ...rigen Geltung, und zwar werden wir mit Hilfe derselben die Gleichung (14) ... können, was bekanntlich auf eine andere Weise unmöglich wäre. Wir sehen ... wieder, von welcher weittragenden Wichtigkeit unsere Theorie auf die ...eszins- und Rentenrechnung ist und wie selbe mit staunenswerther Leichtig...t über sozusagen unüberwindliche Hindernisse hinweghilft, wobei wir oben...n das Resultat mit beliebig grosser Genauigkeit zu ermitteln in der ...e sind.

Die Gleichung (14) gestaltet sich dengemäss folgendermassen:

$$t = \underset{m > \tau > n}{\overset{m > n}{\mathrm{E}}} \left[\frac{lg \left[\frac{K_2}{K_1}(1+q)^m + (1+p)^n - \frac{K_2}{K_1}(1+q)^\tau \right]}{lg(1+p)} \right]$$

...in τ den entsprechenden Näherungswerth bedeutet.

Der Gleichung (12) zufolge erhalten wir die Relation

$$\left(\frac{K_m + K_n}{K_1 + K_2}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = x$$

...somit ist die Lösung der gegebenen Aufgabe durchgeführt. Zur besseren ...ntirung wollen wir ein numerisches Beispiel durchführen, und zwar sei ein ...tal von 5000 fl. auf 20 Jahre mit 4% und eines von 8000 fl. auf 10 Jahre ... 6·5% auf Zinsen und Zinseszinsen angelegt; auf welche Weise ist es möglich, ...e Anlagecapitalien zu ein und demselben Zinsfuss und gleicher Anlagedauer ...usammenzuziehen, dass ihr Erträgniss mit der Summe der beiden Einzelnen ...ständig übereinstimmt.

Die Formel (15) gestaltet sich demgemäss folgendermassen:

Den obigen Aufgaben zufolge ist

$K_1 = 8000,\ P = 100p = 6{\cdot}5,\ n = 10,\ K_2 = 5000,\ Q = 100q = 4,\ m = 20$

...it

$$t = \underset{m > \tau > n}{\overset{m > n}{\mathrm{E}}} \left[\frac{lg \left(\frac{5}{8}(2{\cdot}1911) + 1{\cdot}8771 - \frac{5}{8}(1{\cdot}04)^\tau \right)}{lg\, 1{\cdot}065} \right]$$

und nach vollzogener Rechnung

$$t = 12{\cdot}661$$

und der Gleichung (16) gemäss

$$\left(\frac{15016{\cdot}8 + 10955{\cdot}5}{8000 + 5000}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = x$$

somit nach vollzogener Rechnung $X = 100x = 5{\cdot}62\%$.

Man kann daher, anstatt das Capital von 8000 fl. auf 10 Jahre mit 6 und 5000 fl. auf 20 Jahre mit 4%, ebensogut 13.000 fl. auf 12·661 Jahre 5·62% anlegen oder verzinsen.

Auf ähnliche Weise lassen sich Renten zasammenziehen, und zwar wei wir zu diesem Behufe abermals die Formen (4) und (5) zu Rathe ziehen.

Es seien daher

$$17)\qquad K_n = f(K_1, R_1, p, n, a) = K_1(1+p)^n + \frac{R_1}{p}((1+p)^n - 1)$$

$$18)\qquad K_m = f(K_2, R_2, q, m, a) = K_2(1+q)^m - \frac{R_2}{q}((1+q)^m - 1)$$

somit die fragliche Gleichung

$$19)\qquad K_n + K_m = (K_1 + K_2)(1+x)^t + \frac{R_1 - R_2}{x}((1+x)^t - 1)$$

an welche sich sodann die Hilfsgleichung

$$K_1(1+p)^t + \frac{R_1}{p}((1+p)^t - 1) + K_2(1+q)^t - \frac{R_2}{q}((1+q)^t - 1) =$$

$$K_1(1+p)^n + \frac{R_1}{p}((1+p)^n - 1) + K_2(1+q)^m - \frac{R_2}{q}((1+q)^m - 1)$$

anschliesst, aus der wir abermals t ermitteln können.

Wir erhalten sonach

$$20)\qquad \left(K_1 + \frac{R_1}{p}\right)(1+p)^t + \left(K_2 - \frac{R_2}{q}\right)(1+q)^t =$$

$$\left(K_1 + \frac{R_1}{p}\right)(1+p)^n + \left(K_2 - \frac{R_2}{q}\right)(1+q)^m$$

und

$$21)\qquad t = \overset{m > n}{E}\left[\frac{lg\left[\dfrac{K_2 - \frac{R_2}{q}}{K_1 + \frac{R_1}{p}}(1+q)^m + (1+p)^n - \dfrac{K_2 - \frac{R_2}{q}}{K_1 + \frac{R_1}{p}}(1+q)^\tau\right]}{lg(1+p)}\right]$$

als durchschnittliche Anlagedauer und durch Substitution des ermittelten Wei derselben in die Gleichung (19) die Relation für den Durchschnittszins (Siehe S. 9, II.)

$$x = \underset{\xi > 0}{E}\left[\left(\frac{(K_m + K_n)\xi + (R_1 - R_2)}{(K_1 + K_2)\xi + (R_1 - R_2)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right]$$

wodurch auch dieser Aufgabe entsprochen ist. — Wir haben hier absichtlic Renten R_1 und R_2 so angenommen, dass die ersteren in positivem, die letzt in negativem Sinne auf das Anfangscapital K einwirkt, um anzudeuten, das allgemeinen Formeln für alle Fälle anwendbar sind.

s sei nun z. B. die Frage aufgestellt: Jemand hätte auf eine Realität :huldenlasten, die an ein und denselben Gläubiger in Annuitäten mit nem Zinsfuss und verschiedener Rückzahlungsdauer jährlich zu leisten Auf welche Art wäre es möglich, dieselben mit einem Durchschnitts- in gleicher Dauer zu tilgen, ohne die Annuitätenraten zu erhöhen.

er erste Satz wäre ein Betrag von 10.000 fl. zu 4% mit jährlichen tenraten in 15 Jahren zu tilgen; der zweite, ein Betrag von 12.000 fl. n höheren Zinsfuss von 6% mit jährlichen Annuitätenraten in 25 Jahren ılen. Diesen beiden Aufgaben werden daher die Relationen

$$R_1 = \frac{10000 \,.\, (1\cdot04)^{15} \,.\, 0\cdot04}{(1\cdot04)^{15} - 1} = 899\cdot46$$

$$R_2 = \frac{12000 \,.\, (1\cdot06)^{25} \,.\, 0\cdot06}{(1\cdot06)^{25} - 1} = 938\cdot72$$

:hen, und zwar nach der Formel

$$K_n = 0 = \mathrm{K}\,(1+p)^n - \frac{R}{p}[(1+p]^n - 1]$$

lcher sich die für obige Gleichungen massgebende Relation

$$R = \frac{K.(1+p)^n \,.\, p}{(1+p)^n - 1}$$

daher als Resultatsform für unsere Hauptfrage

$$R_1 + R_2 = \frac{(K_1 + K_2)\,(1+x)^t \,.\, x}{(1+x)^t - 1}$$

e Hilfsform

$$\frac{K_1\,(1+p)^t p}{(1+p)^t - 1} + \frac{K_2\,(1+q)^t q}{(1+q)^t - 1} = \frac{K_1\,(1+p)^n \,.\, p}{(1+p)^n - 1} + \frac{K_2\,(1+q)^m q}{(1+q)^m - 1}$$

nach erfolgter Substitution der Werthe folgendermassen lauten wird:

$$\frac{10000\,(1\cdot04)^t\,0\cdot04}{(1\cdot04)^t - 1} + \frac{12000\,(1\cdot06)^t \,.\, 0\cdot06}{(1\cdot06)^t - 1} = R_1 + R_2 = 1838\cdot18$$

'erner erhalten wir für den Zinsfuss mit Hilfe der ermittelten Durch- tsdauer die Substitutionsgleichung. (Siehe S. 5, I.)

$$u = \mathop{\mathrm{E}}_{0<\xi<1}\left[1 + \frac{R_1 + R_2}{K_1 + K_2}\,(1 - \xi)\right]^{-t}$$

$$u = (1+x)^{-t}$$

t, und demzufolge

$$x = u^{-\frac{1}{t}} - 1$$

s ergibt sich daher nach durchgeführter Substitution $t = 19$ und $x = 0\cdot05116$, er Contrahent könnte die genannten beiden schuldigen Capitalien von und 12.000 Gulden in 19 Jahren mit der unveränderten für beide zu enden jährlichen Annuitätenrate von fl. 1838·18 tilgen und wäre der hnittliche Zinsfuss 5·116%, wobei das Interesse sowohl des Gläubigers, h des Contrahenten in jeder Beziehung gewahrt bliebe.

Mathematische Behelfe zur Berechnung eines Tarifes für die Versicher von Abgelehnten.

Um dem bedeutend höheren Risico bei dieser Art von Versicherun Rechnung zu tragen, seien die zu Versichernden je nach der Art ihres brechens in verschiedene Kategorien eingetheilt, deren nähere Beziehung und Einreihung wir dem medicinischen Gutachten überlassen wollen.

Je nach der den einzelnen Kategorien entsprechenden Lebenswahrsch lichkeit möge ein Modus getroffen werden, welcher die Annahme einer höh Altersclasse, als die bei dem zu Versichernden bestehende, um einen gewi Zeitabschnitt gestattet, nach welcher die für diesen Fall zu erheischende Prä festzusetzen ist.

Dieser Zeitabschnitt möge aber auch von dem durch den Arzt constati Befunde über den Fortschritt des Gebrechens abhängen; weshalb jede Kateg in mindestens zwei bis drei Gefahrenclassen einzutheilen wäre, welche wi durch einen Percentsatz der höchsten Gefahrenclasse die Höhe jenes Zeit schnittes zu bestimmen hätten.

Nach dem Gesagten würde sich die Rechnung auf folgende Weise gestalt Es seien A, B, C, D etc. die genannten Kategorien, welchen die Erlebensw scheinlichkeiten a, b, c, d entsprechen sollen.

Jede dieser Kategorien sei in drei Gefahrenclassen getheilt, und zwar m die römischen Ziffern I, II, III dieselben bezeichnen, wobei α, β und γ die sprechenden Percentsätze der höchsten Gefahrenclasse auszudrücken hätten.

Natürlicherweise könnte ein der höchsten Gefahrenclasse vollends sprechender zu Versichernder nicht mehr angenommen werden, und würd jedem Anderen der Percentsatz uns die relative Höhe des Risicos angeben.

Es sei nun z. B. ein 35jähriger Mann nach der Kategorie A, Gefa classe II zu versichern, so müsste, wenn w_{35} das zu erreichende Alter nac gewöhnlichen Erlebenswahrscheinlichkeit für einen 35jährigen Menschen den Tabellen der 17 englischen Gesellschaften bezeichnet, die Prämie folgender Altersclasse festgesetzt werden.

Der Kategorie A entspricht die Erlebenswahrscheinlichkeit a, somit d Anbetracht zu kommende Zeitabschnitt $w_{35} - a$, welcher der höchsten Gefa classe entspricht. Da nun die Gefahrenclasse II, respective der Percent hier in Betracht kommt, so wäre der Zeitabschnitt durch die Formel

$$z = (w_{35} - a)\,\beta$$

ausgedrückt.

Ferner besitzt ein 35jähriger Mensch die mittlere Erlebenswahrschein 31·4, demgemäss wird sein wahrscheinlich zu erreichendes Alter $w_{35} = 66·4$ sein. Nehmen wir nun an, die Kategorie A würde dem wahrscheinlichen L alter von 45 Jahren entsprechen, und die Gefahrenclasse II die Höhe $\beta =$ betragen, so wird der genannten Relation folgende Rechnung entspreche

$$z = (66·4 - 45)\,\frac{50}{100} = 10·7$$

d somit wird die Altersclasse des zu versichernden 35jährigen Menschen um 7 Jahre zu erhöhen sein und nach dieser auch die zu zahlende Prämie be- hnet werden.

Das Risico bleibt aber in Anbetracht der Unzuverlässigkeit des angenom- nen wahrscheinlichen Lebensalters von medicinischem Standpunkte trotz dieser ssregeln ein variables, und müssen wir zu diesem Behufe, um die Anstalt besonderen Verlusten zu schützen, Folgendes einräumen.

Das versicherte Capital sei erst nach einer bestimmten, von der Gefahren- sse abhängigen Dauer in seinem vollen Werthe rechtsgiltig, bis dorthin habe selbe in progressiver Steigung zuzunehmen, und zwar in dem Sinne, als mit ginn der ersten Prämie blos ein gewisser Theilbetrag des genannten als eigent- versichert anzusehen ist. Diese Dauer möge mit dem Zeitabschnitt z die che sein, und zwar aus dem Grunde, weil der Versicherte erst mit dem Er- hen der Altersclasse, in welche derselbe nach seiner Prämie eingereiht ist, Berechtigung eines gewöhnlichen Versicherten geniesst.

Die bis dahin angesammelte Prämienreserve ist gewissermassen der das rrisico bezeichnenden Quote gleichzustellen.

Wenn daher z die bekannte Altersclassenerhöhung, respective die Ergän- dauer für das versicherte Capital darstellt, so gilt die Frage: Wie gross as letztere zu Beginn der Versicherung, wenn es bei einem Zuschuss von der einzuzahlenden Prämie pro Jahr und Prämienanzahl, mit Zinseszinsen chnet, die volle Höhe erreicht?

Diese Frage ist nach den Auseinandersetzungen im vorigen Abschnitt über curanz-Combinationen leicht löslich.

Zu diesem Behufe wollen wir noch Folgendes vorausschicken: In unserem wird wohl der genannte Zuschuss in die einzuzahlende Prämie eingerechnet und ist nur die Frage, wie viel derselbe im Verhältniss zur Differenz der n betragen muss, um den Anforderungen zu entsprechen. Wenn wir nun s in Form einer Relation darstellen wollen, so wird, da $M = 100m$ und N Nettoprämie bedeutet, die Relation gelten

$$\frac{x}{N - x} = k$$

n x denjenigen Betrag angibt, welcher durch den genannten Zuschuss in Dauer z absorbirt wird, wogegen k denselben als Bruchtheil der Original- prämie, unter welcher wir die den Zuschuss nicht involvirende verstehen, sentirt.

Um jedoch ein richtiges Verhältniss zwischen dem eigentlichen versicherten tal und dem ursprünglichen nach Zahlung der ersten Prämie giltigen her- llen, wollen wir als Basis für dasselbe das Verhältniss einer normalen zu erhöhten Prämie annehmen, und zwar wird demgemäss das eigentliche cherte Capital sich zum ursprünglichen nach Zahlung der ersten Prämie en verhalten, wie die erhöhte Prämie zur normalen (d. h. der der eigent- n Altersclasse des Versicherten entsprechenden).

Dem Gesagten zufolge wird daher der Rechnung in der Weise entspr dass dem ursprünglichen, nach Zahlung der ersten Prämie giltigen versic Capital durch die jährlichen Zuschüsse in der Dauer z die Höhe des Eigen zugemittelt wird.

Nehmen wir nun die Formel

$$G = m N_1 \left(\frac{1+p}{p} \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right) \tag{2}$$

in Anspruch, so ist G die Differenz der beiden genannten Capitalien, $N_1 = N - x$ die Originalnettoprämie, n die Dauer z und $P = 100\,p$ als g licher Zinsfuss gilt. Wir erhalten somit

$$m N_1 = m(N - x) = \frac{G}{\left(\frac{1+p}{p} \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right)} \tag{3}$$

Ferner da der Quotient

$$\frac{k}{m} = \frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)\,[(1+p)^n - 1]} \tag{4}$$

ist und die Formel (1) in Betracht kommt, welche durch m dividirt sich dermassen gestaltet:

$$\frac{x}{m(N-x)} = \frac{k}{m},$$

so erhalten wir nach Substitution der Werthe von (3) und (4) das Result

$$x = \frac{G \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)[(1+p)^n - 1]}\right)}{\frac{1+p}{p} \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}} = \frac{G \cdot p}{(1+p)[(1+p)^n - 1]} \tag{5}$$

Mit dem bekannten Werthe des x wird auch k, m und N_1 bekannt.

Um nun unserem Beispiele auch in dieser Weise zu entsprechen, wir dasselbe mit Hinzuziehung der neuen Daten zur Durchführung bringe

Die Nettoprämie per 100 fl. versichertes Capital für einen 35jährig 1·987, die erhöhte Prämie für denselben um 10·7 Jahre der Altersclasse ist somit das ursprünglich versicherte Capital sich zum eigentlichen verhä 1·987 : 3·000; bei einem eigentlich versicherten Capital von 10.000 fl. wird nach eingezahlter erster Prämie blos der Betrag von fl. 6623·33 nach Verhältniss versichert sein. Der Werth von G ist daher fl. 3376·67 u $P = 100p = 4$ wird $x =$ fl. 240·45 bei einer erhöhten Nettoprämie von demnach ist $k = 4·0377$, $M = 100m = 79·37$ und $N_1 =$ fl. 59·55.

Im Falle des Ablebens vor Ablauf der Frist von 10·7 Jahren wird die Formel (2) mit Hinzuziehung obiger Daten und Substitution der entspr den Versicherungsdauer für die Grösse n uns die Höhe des auszubezah versicherten Capitales fixiren.

Dr. Ludwig Grossmann's

eorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen d ihre Anwendung zur Berechnung von Prämientarifen einiger Assecuranz-Combinationen.

Um die praktische Brauchbarkeit dieser Theorie und ihre Wichtigkeit in zug auf die Berechnung gewisser bis jetzt in der Versicherungsmathematik ch nicht oder nur theilweise beantworteter Fragen schärfer zu beleuchten, gen einige derselben einer näheren Erörterung in diesem Sinne unterzogen rden. Zu diesem Behufe mag folgende Frage gelten.

Eine Lebensversicherungsanstalt hätte die Absicht, ihren Versicherten einen us in Form einer $M^0/_0$ betragenden jährlichen Gewinnbetheiligung der Netto- mieneinnahme zu gewähren, und zwar in dem Sinne, dass dem Versicherten lich sovielmal $M^0/_0$ des Nettoprämienbetrages zugesprochen werden, als die ahl der eingezahlten Prämien beträgt. Er würde demgemäss nach dem ersten e $M^0/_0$, nach dem zweiten $2M^0/_0$, nach dem dritten $3M^0/_0$ u. s. f. erhalten. e sammt Zinsen und Zinseszinsen in Rechnung gezogenen und summirten innbetheiligungen würden sodann zur Erhöhung des versicherten Capitales agen.

Natürlicherweise müsste die Prämie derjenigen Versicherten, welche dieser innbetheiligung theilhaftig werden wollten, in entsprechender Weise modifi- werden, und ist nun die Frage, in welcher Art dies geschehen müsste.

Es sei:

N die Nettoprämie;

w_t die Erlebenswahrscheinlichkeit für das Alter t nach den Tabellen der zehn englischen Gesellschaften;

$P = 100 . p$ der Zinsfuss, mit welchem die Capitalien bei der betreffenden talt verzinst werden;

R_n der Gewinnantheil $= (M^0/_0) . N . n$, resp. $m . N . n$, wobei $M = 100\,m$ und n Anzahl der bereits gezahlten Prämien, resp. die bereits zurückgelegte Dauer Versicherung bezeichnet; dann wird sich folgende Rechnungsart ergeben, zwar gelten als fortlaufende Jahresgewinnbetheiligungen:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= m\,N(1+p)^{n-1} \\
R_2 &= m\,2\,N(1+p)^{n-2} \\
R_3 &= m\,3\,N(1+p)^{n-3} \\
&\vdots \\
R_{n-2} &= m\,(n-2)\,N(1+p)^2 \\
R_{n-1} &= m\,(n-1)\,N(1+p) \\
R_n &= m\,n\,N
\end{aligned}
$$

ihrem durch Zinsen und Zinseszinsen angewachsenen Endwerthe dargestellt

Um nun den Gesammtwerth G dieser Beträge durch eine Formel [...]stellen, ist es nothwendig, obige Formen zu summiren, und zwar wird

$$G = mN([(1+p)^{n-1}+(1+p)^{n-2}+(1+p)^{n-3}\ldots+(1+p)^2+(1+p)+ \ldots$$
$$+[(1+p)^{n-2}+(1+p)^{n-3}+(1+p)^{n-4}\ldots(1+p)^2+(1+p)+ \ldots$$
$$+[(1+p)^{n-3}+(1+p)^{n-4}\ldots+(1+p)^2+(1+p)+1]+\ldots$$
$$\ldots+[(1+p)^3+(1+p)^2+(1+p)+1]+[(1+p)^2+(1+p) \ldots$$
$$+[(1+p)+1]+1)$$

und falls wir jede einzelne der sich innerhalb der Klammern befindlichen [...] summiren, so erhalten wir schliesslich

$$G = m\,N\left(\frac{(1+p)^n-1}{p}+\frac{(1+p)^{n-1}-1}{p}+\frac{(1+p)^{n-2}-1}{p}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(1+p)^2-1}{p}+\frac{(1+p)-1}{p}\right)=$$

$$G = mN.\left(\frac{1+p}{p}\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p}-\frac{n}{p}\right) \tag{1}$$

welche Form den Gesammtwerth jener Gewinnbetheiligungen repräsenti[...] muss daher der versicherte Betrag sich um G vergrössern.

Es bleibt uns noch übrig, die Frage zu beantworten, in welcher We[...] Modification der Prämie N durchzuführen ist.

Betrachten wir daher $k.N$ als eine zu bezahlende jährliche Rente [...] Dauer der Lebenswahrscheinlichkeit des Versicherten vom Zeitpunkte d[...] gegangenen Verpflichtungen der Anstalt gegenüber, und wir erhalten, w[...] als Endcapital der mit Zinsen und Zinseszinsen anwachsenden vorschuss[...] Jahresrenten angesehen wird, die Form:

$$kN\frac{1+p}{p}[(1+p)^n-1]=G \tag{2}$$

und wenn wir die Form (1) in Betracht ziehen, so erhalten wir

$$k = \frac{m\left(\frac{1+p}{p}\;\frac{(1+p)^n-1}{p}-\frac{n}{p}\right)}{\frac{1+p}{p}\;[(1+p)^n-1]} \tag{3}$$

als Formel für den Zuschlag zur Nettoprämie zur Ausgleichung der gew[...] Gewinnbetheiligung. Führen wir die Division in obiger Formel durch, so [...] sich als endgiltiges Resultat

$$k = m\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{(1+p)[(1+p)^n-1]}\right) \tag{4}$$

Wenn wir dieses Resultat näher in Augenschein nehmen, so seh[...] offenbar, dass der Factor k keine constante Grösse ist, sondern von der [...] der Jahre abhängt, innerhalb welcher die Prämienzahlung von Seite de[...] sicherten erfolgt ist. Diese Anzahl ist hier durch die Grösse n ausge[...] während p eine constante Grösse bedeutet. Dass dem so ist, mögen fo[...] Daten beweisen:

Für $p = 0{\cdot}04$, d. i. 4% und $n = 10$ wird $k = 5{\cdot}00\, m$
$n = 15$ $k = 7{\cdot}00\, m$
$n = 20$ $k = 8{\cdot}80\, m$
$n = 25$ $k = 10{\cdot}57\, m$

Es bleibt uns nun die Frage übrig, in welchem Intervalle k den geringsten iationen unterworfen ist. Nach den oben angeführten Daten dürfte sich dase zwischen dem 15ten und 20ten Jahre des Bestandes der eingegangenen sicherung befinden, und ist es auf diese Weise möglich, für k den Mittelwerth finden, welcher in jeder Hinsicht den Anforderungen Rechnung tragen würde, besondere, als sich in diesem Intervalle auch die mittlere Lebenswahrscheinkeit, vom Zeitpunkte der eingegangenen Versicherung gerechnet, befindet.

Um diese Frage zu beantworten, werden wir aus der Formel (4) die riable n durch k und die vorhandenen Constanten auszudrücken suchen, und alten demgemäss

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{k}{m}\right)(1 + p) = \frac{n}{(1 + p)^n - 1}$$

Bezeichnen wir nun in dieser Gleichung den links vom Gleichheitszeichen enden Ausdruck mit v, so erhalten wir:

$$\left(\frac{n + v}{v}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + p$$

hieraus, wenn wir die Ausdrücke beiderseitig zur $v$ten Potenz erheben,

$$\left(\frac{n}{v} + 1\right)^{\frac{v}{n}} = (1 + p)^v.$$

hierin endlich $\frac{n}{v} = z$ gesetzt, liefert

$$(z + 1)^{\frac{1}{z}} = (1 + p)^v$$

Wie ersichtlich, werden dieser Gleichung für jeden Werth des v zwei verdene Wurzeln entsprechen, und zwar ist die erste $z_1 < 1$, und die zweite 1, denn die Gleichung (7) entspricht offenbar dem Ausdrucke

$$\frac{1}{z} lg(z + 1) = v\, lg(1 + p), \text{ resp. für } z + 1 = u$$

$$u \,.\, v\, lg(1 + p) - lg u = v\, lg(1 + p),$$

t ein specieller Fall für die Form

$$a = bx - c\, lg x$$

he in der theoretischen Abhandlung ($S.13.\beta$) einer näheren Untersuchung iesem Sinne unterzogen würde, und somit obige Behauptung gerechtfertigt heint.

Der Form (7) entspricht die Ersatzgleichung

$$8) \qquad z = \underset{q \lesseqgtr 1}{\mathrm{E}} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{lg(1+q)}{lg(1+p)} \right)$$

worin q den Näherungswerth bedeutet und in welcher wir also für je des v zwei Werthe für z erhalten, und zwar wird

$$z_1 = \underset{q > 1}{\mathrm{E}} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{lg(1+q)}{lg(1+p)} \right)$$

und

$$z_2 = \underset{q < 1}{\mathrm{E}} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{lg(1+q)}{lg(1+p)} \right)$$

da nun aber $z = \frac{n}{v}$, so ergibt sich daraus, dass jedem Werthe des z des n entsprechen wird. Betrachten wir ferner Folgendes: Für $z = 1$ v sein und einwerthig werden, d. h. $z_1 = z_2$ und diese Relation dürfte Anhaltspunkt für jene gesuchte kleinste Variabilität liefern.

Der Gleichung (7) zufolge ist unter dieser Voraussetzung

$$(1+p)^v = 2, \text{ für } z = 1, \text{ d. h. } v = \frac{lg\,2}{lg\,1+p}$$

Nehmen wir $p = 0{\cdot}04 = 4\%$ wie zuvor an, so ergibt sich

$$v = 17{\cdot}673 = n$$

da nun aber eigentlich $v = \left(\frac{1}{p} - \frac{k}{m}\right)(1+p)$, so finden wir den Mittelwerth des $k = 8 \;.\; m$ für die mittlere Lebenswahrscheinlic 17·673 Jahren.

Ziehen wir noch überdies die der Gleichung (8) entsprechende Betracht, so finden wir, dass der dem Mittelwerth entsprechende Pun genannter Wendepunkt derselben ist.

Es sei nun schliesslich die Frage aufgeworfen, in welcher Weise d bei der Bestimmung des Prämienzuschlages kN bei den verschieden classen vorgehen müsste, welche leicht beantwortet werden kann, wen die den Altersclassen entsprechenden Erlebenswahrscheinlichkeiten hin zur Grundlage bei der numerischen Berechnung obiger Formen an werden müssen. Selbstverständlich kann hier blos die einfache Todesfa rung auf ein Leben, wobei die Prämie lebenslänglich gezahlt wird, ge

Aber auch in anderer Beziehung lassen sich obige Formen vorth wenden. Z. B. es bestände die Frage, durch wie viele Jahre eine 2% gezahlten Nettoprämien betragende Gewinnbetheiligung in obigem Si Zinsen und Zinseszinsen zur Vergrösserung der versicherten Summe könnte, wenn die Anstalt einen 20%igen Nettoprämienzuschlag dem Ve auferlegen würde.

m diese Frage zu beantworten, ist es nothwendig, die Formel (8) in ng zu ziehen, und zwar wird in derselben $M = 100$ $m = 2$, $k = 20$, $) p = 4, n?$, respective in Bezug auf die Substitution in der Formel (8) 6, und q (als Näherungswerth von z) > 1 und z?
s ist daher

$$z = \underset{q>1}{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{15 \cdot 6}\ \frac{lg(1+q)}{lg\,1 \cdot 04}\right)$$

, $q_1 = 1 \cdot 29$, $q_2 = 1 \cdot 36$, $q_3 = 1 \cdot 44$, $q_4 = 146$, $q_5 = 1 \cdot 475$, $q_6 = 1 \cdot 49$, 492, $q_8 = 1 \cdot 4924$, $q_9 = 1 \cdot 4928$

$$z = 1 \cdot 4928 = \frac{n}{v}$$

$$n = 15 \cdot 6 \, . \, (1 \cdot 4928) = 23 \cdot 3 \text{ Jahre.}$$

n jedoch für alle Fälle eine Handhabe zu liefern, wollen wir noch bei rocentsatz der Prämie und Gewinnbetheiligung für eine bestimmte Anzahl ren, welche der Erlebenswahrscheinlichkeit entsprechen, oder für welche ich der Versicherte im Vorhinein verpflichtet hat, die Eventualität eines en Zinsfusses in Anbetracht ziehen.

n hierin zum Resultate zu gelangen, müssen wir abermals die Formel (4)

$$k = m\left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)[(1+p)^n - 1]}\right)$$

e ziehen und werden folgendermassen vorgehen.

s der obigen Form erhalten wir zumal

$$\left(1 - \frac{k}{m} \cdot p\right)[(1+p)^n - 1](1+p) = np$$

chbedeutend ist mit der für unseren Fall zurechtgemachten

$$\left(1 + \frac{k}{m} - (1+p)\frac{k}{m}\right)[(1+p)^n - 1](1+p) = n(1+p) - n$$

ch die Substitution von x für $1 + p$ vereinfachten Relation

$$\left(1 + \frac{k}{m} - x\frac{k}{m}\right)(x^n - 1)x = nx - n$$

eraus folgert nun:

$$x^{n+1} = \frac{n(x-1)}{1 - \frac{k}{m}(x-1)} + x$$

aus ergibt sich die gesuchte Ersatzgleichung

$$x = \underset{q>1}{\mathrm{E}}\left(\frac{n(q-1)}{1 - \frac{k}{m}(m-1)} + q\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

e Unbekannte

$$x = 1 + p$$

Wir werden in dieser Form, um der Genauigkeit des ersten Näherun werthes Ausdruck zu verleihen, der bekannten Relation $P = 100p$ Rechn tragen und werden die Differenz zwischen q und 1 blos um einige Hunde feststellen, wodurch uns der Vortheil erwächst, dass wir viel rascher zum Result gelangen.

Die Frage, welche durch die Form (9) beantwortet erscheint, wird da lauten:

Zu welchem Zinsfusse $P = 100p$ werden sowohl die Gewinnbetheilig $m\,N$, wie auch der zur Bestreitung derselben nothwendige Prämienzusch $k.N$ bei einer bestimmten Anzahl von Jahren n sich verzinsen müssen, sich gegenseitig zu absorbiren?

Um ein Bedeutendes vereinfacht sich dieses Problem in dem Momente, der Versicherte eine gewisse im Vorhinein bestimmte Anzahl von Jahren Prämien zu zahlen sich verpflichtet. In diesem Falle lässt sich mit Genauigk bei einem gegebenen constanten Prämienzuschlag die Höhe der Jahresgew betheiligungen und umgekehrt für einen bestimmten Percentsatz derselben der Nettoprämie der entsprechende Prämienzuschlag bestimmen. Es ist dies e ganz natürliche Folge, da hier die Variabilität, welche sich in Bezug auf vorhergehenden Fall in der Sterblichkeit kundgibt, ihre Berechtigung ver und dieselbe blos in begrenztem Sinne auf einen anderen Factor ausdehnt.

Es sei die Frage zu beantworten: Welcher Zuschlag wird der Nettoprä N zugedacht werden, wenn derselbe einen $M\%$ von der eingezahlten Anzahl Nettoprämien betragenden Jahresgewinn ermöglichen soll, und zwar in Sinne, als die Dauer der Prämienzahlung im Vorhinein bestimmt, das versich Capital jedoch erst nach dem Tode des Versicherten auszuzahlen wäre; ferner auch nach abgelaufener Frist der Prämieneinzahlung der Jahresgewinn von bis dahin eingezahlten Prämienanzahl fortbestehen soll, und zwar bis zum w scheinlichen Tode des Versicherten, in welcher Zeit auch die Jahresgew betheiligungen mit Zinsen und Zinseszinsen capitalisirt als Zuschlag zum sicherten Capital ausbezahlt werden sollen.

Um hier zum Resultate zu gelangen, müssen wir vor Allem wieder Gesammtbetrag der Gewinnbetheiligungen zu bestimmen suchen, und zwar wenn wir die Dauer der Prämienzahlung mit n, die Erlebenswahrscheinlic für das Alter t mit w_t abermals bezeichnen, folgende Relation statthaben.

Für die Dauer n gilt bekanntlich die Form

$$11) \quad \ldots\ldots \quad G = m\,N\left(\frac{1+p}{p}\;\frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right)$$

ferner für die Zeit von $w_t - n$ weiter gerechnet, gilt die Form für nachsc weise Rente für das Endcapital F,

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{m.N.n[(1+p)^{w_t - n} - 1]}{p}$$

daher der Gesammtbetrag der Gewinnbetheiligungen für obige Frage, wenn denselben mit G_1 bezeichnen

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G_1 = G(1+p)^{w_t - n} + F$$

$$n N \left[\frac{(1+p)^{w_t - n + 1}}{p} \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n(1+p)^{w_t - n}}{p} + \frac{n[(1+p)^{w_t - n} - 1]}{p}\right]$$

nach Vereinfachung dieser Form

$$. \quad . \quad . \quad G_1 = m N \left[\frac{(1+p)^{w_t - n + 1}}{p} \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right]$$

)ie jenen Gewinnbetheiligungen entsprechenden Nettoprämienzuschläge n wir offenbar als vorschussweise Rente vom Anfang des zweiten Jahres ämienzahlung betrachten und wird die Dauer dieser Renten mit der ge- n aufhören, jedoch die Verzinsung der Gesammtzuschläge bis zum wahr- lichen Tode des Versicherten fortdauern. Es ergibt sich daher, wenn k igen Bruch repräsentirt, der uns die Quote der fraglichen Zuschläge im tniss zur Nettoprämie bezeichnet,

$$= k N [(1+p)^n - 1) \frac{1+p}{p} (1+p)^{w_t - n} = k N [(1+p)^n - 1] \frac{(1+p)^{w_t - n + 1}}{p}$$

araus durch Vergleich der beiden letzten Formen

$$\left[\frac{(1+p)^{w_t - n + 1}}{p} \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right] = k[(1+p)^n - 1] \frac{(1+p)^{w_t - n + 1}}{p}$$

mzufolge

$$. \quad . \quad . \quad . \quad k = m \left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)^{w_t - n + 1} \cdot [(1+p)^n - 1]}\right]$$

ultat.

uf diese Weise haben wir eine allgemeine Formel für alle möglichen efunden, und zwar liefert uns die letzte Formel für den Fall, als wir elben $n = w_t$ setzen, die bekannte Formel (4); es ist dies auch selbstver- ch, da unter dieser Bedingung die voraus bestimmte Dauer der Prämien- g mit der Dauer der Erlebenswahrscheinlichkeit gleich gross werden muss. ieselbe etwas näher zu erörtern, wollen wir ein Beispiel durchführen, rar:

Es sei $M = 100\,m = 2$, $P = 100\,p = 4$, $n = 20$, $t = 30$, $w_t = 35$ und k?

)emzufolge ergibt sich als Resultat nach vollzogener Substitution und eführter Rechnung

$$k = 0{\cdot}306$$

der Zuschlag, den die entsprechende Nettoprämie in diesem Falle erfahren ist 30·6% der Nettoprämie.

ls nächste Frage gelte folgende:

uf welche Weise ist es möglich, die Dauer der Prämienzahlung n ohne icht auf das versicherte Capital mit Hilfe der Gewinnbetheiligung m, dem hen entsprechenden Prämienzuschlag k und dem gegebenen Zinsfuss 00p zu bestimmen.

Zu diesem Behufe wollen wir aus der Gleichung (15) die Grösse bestimmen suchen und erhalten daher:

$$n \frac{(1+p)^{n-(w_t+1)}}{(1+p)^n - 1} = \frac{1}{p} - \frac{k}{m}$$

setzen wir nun hierin den Ausdruck $(1+p)^n = x$, so erhalten wir

$$\frac{lg\, x}{lg\,(1+p)} \cdot \frac{x^{-w_t-1}}{x-1} = \frac{1}{p} - \frac{k}{m}$$

und demzufolge

$$x^{-w_t-1} = \frac{(x-1)\, lg\,(1+p)}{lg\, x} \left(\frac{1}{p} - \frac{k}{m}\right) \text{ oder}$$

$$x = \left(\frac{lg\, x}{(x-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{k}{m}\right) lg\,(1+p)}\right)^{\frac{1}{w_t+1}}$$

und dementsprechend die gesuchte Ersatzgleichung

$$16) \qquad x = \underset{q>1}{\mathrm{E}} \left[\frac{lg\, q}{(q-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{k}{m}\right) lg\,(1+p)}\right]^{\frac{1}{w_t+1}}$$

worin q den Näherungswerth bedeutet.

Nach vollzogener Substitution ergibt sich $n = \frac{lg\, x}{lg\,(1+p)}$ als gesuchtes Resu

Es wäre nicht uninteressant, diese Frage einer praktischen Anwend zuzuführen, insbesondere da dieselbe angesichts der in unserer Zeit zunehmenden Concurrenz im Versicherungswesen und der sich immer erschwerenden Aufgabe, Acquisitionen zu machen, das Bedürfniss vorw jegliche Vortheile, welche durch die Assecuranz geboten werden, dem Publi so greifbar als möglich vor die Augen zu führen, mehr als je in den Vor grund tritt. Hauptsächlich könnte durch entsprechende Modification ein M gefunden werden, welcher bei der Versicherung von Abgelehnten insof in Betracht käme, als derselbe das Risico, welches bekanntlich in di Falle den Anstalten in ungleich grösserem Masse erwächst, auf das entsprech Niveau herabsetzen würde, da ein Theil der versicherten Summe nichts And als ein durch Rentenverzinsung angewachsenes Capital repräsentiren würde.

Die Formen (1) und (14) sind überdies vom Standpunkte der Allgem heit auch in dem Sinne anwendbar, als dieselben für eine in arithmetischer R steigende Jahresrente die Capitalisirung darstellen und zwar die Form (1) den Fall, als die Rente durch die ganze Dauer und der Form (14) gemäss d eine bestimmte Anzahl von Jahren eingelegt wird und letzterenfalls nach Ab dieser Zeit die höchste Rente als einfache Jahresrente weiter einfliesst, w G und G_1 beziehungsweise das entsprechende Endecapital repräsentiren.

DIE MATHEMATIK

im

enste der Nationalökonomie

mit Hinweis auf die

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen

neuen wissenschaftlichen Errungenschaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik:
nen Fundamenten für die Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik im Allgemeinen

Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

DR LUDWIG GROSSMANN

des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

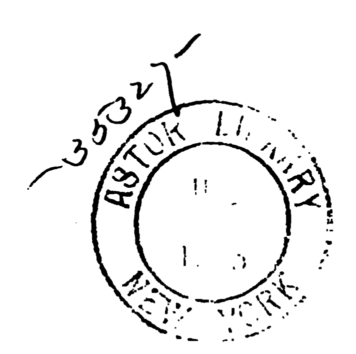
Zweite Lieferung.

WIEN 1887.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 5.

Druck von Josef Bayer & Comp., I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Die wichtigsten Postulate volkswirthschaftlichen Strebens sind unbestreitbar Institutionen des Versicherungs- und Bankwesens. Selbe bieten im Allgemeinen unumschränktesten Mittel zur Conservirung der Arbeit, und geben auf diese Weise Individuum Gelegenheit, nicht nur sein erworbenes Gut in rationeller Weise zu wenden, um in Zeiten der Arbeitsunfähigkeit vom Ueberschusse des seinerzeitigen eitsertrages seine Existenz fristen zu können oder unmündige und erwerbsuntüch- Mitglieder seiner etwaigen Familie vor Nahrungssorgen zu schützen, sondern auch nöthiges Capital, den Motor der im Allgemeinen so schwerfälligen Erwerbs- ngungen auf dem Wege des Credites zu erreichen. Es ist daher zum nicht geringen ile das Hauptverdienst dieser beiden Institutionen, dass der in unserer Zeit so nenden socialen Frage in mancher Beziehung ein Damm gesetzt werden kann, muss man mit Befriedigung wahrnehmen, wie der moderne Staat die Dienste Beiden sich zu Nutze macht, um das Los Derjenigen zu mildern, auf denen diese ge bleiern lastet.

Sowohl das Versicherungs- als auch das Bankwesen sind volkswirthschaftliche Er- nschaften, deren Entwicklung und Kräftigung mit der Wissenschaft und Forschung verknüpft ist. Das Gleichgewicht in der Forderung und Gewährung der Vortheile ustellen, ist Aufgabe theils der erfahrungsgemässen Schätzung, theils der rech- gsmässigen Ermittlung. Statistik und Mathematik gehen hier Hand in Hand dem- en Ziele entgegen.

Getreu diesen Principien habe ich mich bestrebt, Neues und Interessantes diesen Gebieten der praktischen Anwendung zuzuführen. Sowohl der Assecuranz- n als auch der Finanzpolitiker findet in diesem Buche Anregung und fachliche itung für viele in ihrer Wichtigkeit anerkannte Fragen, und hoffe ich somit den ressen der bezüglichen Fachkreise vollends zu entsprechen, wenn ich hierin einen hl vom praktischen als auch vom fachlichen Standpunkte schätzenswerthen Behelf die geschäftliche Gebahrung dieser beiden Institutionen biete.

Wien, im April 1887.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler:

Auf Seite 68. Die letzte Zahlenform soll heissen anstatt

$$R' = 0{\cdot}233351 + \left(\frac{0{\cdot}75143 - 0{\cdot}33333}{0{\cdot}75143}\right) . 1{\cdot}2 . 6{\cdot}13 = 2{\cdot}67‰$$

richtig:
$$R' = 0{\cdot}23335 \left(1 + \frac{0{\cdot}75143 - 0{\cdot}33333}{0{\cdot}75143}\right) . 1{\cdot}2 . 6{\cdot}13 = 2{\cdot}67‰$$

Auf Seite 23. Dritte Zeile unterhalb der Form 3) soll stehen anstatt „in wel
richtig: in welchen der Effect gleich 0 wird.

Dr. Ludwig Grossmann's

[Ma]thematische Principien für die Conversion von Tilgungsrenten.

I.

Bekanntermassen unterscheidet sich die Tilgungsrente von der gewöhnlichen [d]urch, dass bei der ersteren nicht nur das Capital verzinst, sondern zum Unter[sch]iede von der letzteren zu gleicher Zeit durch Theilquoten getilgt wird, die mit Zinsen einen aliquoten Theil des Ganzen der Tilgungsdauer gemäss aufgezinsten [Betr]ages bilden.

Die Conversion gewöhnlicher Renten geschieht zu dem Behufe, um eine höher [verz]insliche Rente auf eine niedriger verzinsliche zu verwandeln und hiedurch ein [Zi]nsersparniss herbeizuführen. Demnach wird der im Umlaufe sich befindliche [Betr]ag an Renten-Obligationen gekündigt und eine Frist eingeräumt, bis zu welcher [diese]lben zur Zahlung präsentirt werden müssen. Gewöhnlich nach Ablauf dieser [Frist] wird eine neue Emission der dem gleichen Betrage entsprechenden, niedriger [verzi]nslichen Rente ausgeschrieben und die Kosten dieser Transaction zumeist durch [...]rte Intercalarzinsen hereingebracht. Anders verhält es sich jedoch bei einer zu [conv]ertirenden Tilgungsrente, die schon ihrer Beschaffenheit gemäss eine solch' ein[fache] Transaction nicht zulassen kann, weil hier neben dem Zinsfuss die vorbedingte [Tilgu]ngsdauer in Betracht kommen muss und der seit der Emission getilgte Betrag [in A]brechnung kommt. Hat man es blos mit einer einzigen Emission zu thun, so [ist w]ohl die Art der Transaction eine minder complicirte und wird einfach blos der [noch] zu tilgende Betrag für die nach erfolgter Kündigung präsentirten Obligationen [zurüc]kgezahlt, um denselben durch eine neue Tilgungs-Rentenemission bei kürzerer [Tilgu]ngsdauer und gleichem Zinsfuss, oder gleicher Tilgungsdauer, jedoch kleinerem [Zinsf]uss, oder schliesslich bei Herabsetzung sowohl des Zinsfusses als auch der [Tilgu]ngsdauer wieder in Umlauf zu setzen.

Es sei K der ursprünglich emittirte Betrag, $P = 100\,p$ der Zinsfuss und n [die T]ilgungsdauer, so erhalten wir als jährliche Tilgungsquote für Capital sammt [Zinse]n:

$$Q = \frac{Kp\,(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

Soll nun nach Ablauf von m Jahren, also vor der abgelaufenen Tilgungsfrist n [die] Conversion obiger Rente erfolgen, so muss zur Ermittlung des Werthes der [noch] im Umlaufe sich befindlichen Obligationen folgende Formel in Anwendung [ko]mmen.

Im Ganzen wurden an die Besitzer von Renten-Obligationen m Tilgu
bezahlt; nun hat aber das Capital K mit dem Zinsfusse $P = 100p$ au
aufgezinst, den Werth $K(1+p)^m$ erreicht; hievon kommt die jeweilig un
wartedauer weniger verzinste Tilgungsquote in Abzug, daher der entsprech
mehrige Werth der Renten-Obligationen

$$2) \qquad W = K(1+p)^m - \frac{Q}{p}[(1+p)^m - 1],$$

respective

$$3) \quad \ldots \quad W = K(1+p)^m - \frac{K(1+p)^n[(1+p)^m - 1]}{(1+p)^n - 1}$$

$$\text{d. i. } W = K\frac{(1+p)^n - (1+p)^m}{(1+p)^n - 1}$$

Dieser Betrag W ist nun der der neuen Emission entsprechende und w
Falle wir den neuen Zinsfuss mit $P_1 = 100p_1$ und die entsprechende Tilg
mit t bezeichnen, die Formel für die neue Tilgungsquote lauten:

$$4) \qquad Q_1 = \frac{Wp_1.(1+p_1)^t}{(1+p_1)^t - 1}$$

Der verhältnissmässige Werth der Obligationen wird daher von Jahr zu
gender sein:

Im Allgemeinen gelten hier die Fundamentalformeln der Zinseszins- un
rechnung und wird, wenn Q die Tilgungsquote bezeichnet, nach dem erst

$$W_1 = K(1+p) - \frac{Q}{p}[(1+p) - 1],$$

nach dem zweiten Jahre

$$W_2 = K(1+p)^2 - \frac{Q}{p}[(1+p)^2 - 1],$$

nach dem dritten Jahre

$$W_3 = K(1+p)^3 - \frac{Q}{p}[(1+p)^3 - 1] \text{ u. s. f.}$$

den al pari-Werth der Tilgungsrenten bezeichnen.

Soll nun der jeweilige al pari-Werth auf Grund des ein Jahr vorher
gefunden werden und zwar in jenem Momente, wo eine neue Quote
wurde, so wird in folgender Weise verfahren werden müssen:

Die Formel

$$5) \qquad \frac{W - \frac{Q}{p}}{K - \frac{Q}{p}} = (1+p)^n$$

lie allgemeine Relation für alle bis zu n Jahren möglichen Werthe; daher das hältniss derselben in zweien aufeinander folgenden Jahren

$$\frac{W_1 - \frac{Q}{p}}{K - \frac{Q}{p}} : \frac{W_2 - \frac{Q}{p}}{K - \frac{Q}{p}} = (1+p)^n : (1+p)^{n+1}$$

$$\text{d. h.} \quad W_2 = \left(W_1 - \frac{Q}{p}\right)(1+p) + \frac{Q}{p} = W_1(1+p) - Q.$$

Wollen wir daher erfahren, welche Werthdifferenz eine Tilgungsrente erfahren zwischen zwei nacheinander folgenden Tilgungsquoten-Zahlungen, und zwar abge-n von den börsenmässigen Coursvariationen, so brauchen wir nur die Formel

$$W_2 = W_1 + \frac{W_1 P}{100} - Q$$

Betracht zu ziehen.

d. h.: Der al pari-Werth W_2 einer Tilgungsrente nach soeben voll-ener Tilgungsquoten-Zahlung ist dem ein Jahr vorher entspre-enden al pari-Werthe W_1 gemäss, die Differenz zwischen dem t dem entsprechenden Zinsfusse auf ein Jahr aufgezins-n al pari-Werthe W_1 und der festgesetzten Tilgungsquote.

Je nachdem nun, mit Bezugnahme auf die in Abrechnung gekommene Tilgungs-e, der zu dieser Zeit an der Börse gangbare letzte Cours eine höhere oder drigere Notirung als der ein Jahr vorher geltende aufweist, ist die Tendenz für die ughabende Tilgungsrente eine steigende oder fallende.

Nehmen wir nun an, der Cours der Tilgungsrente würde zur Zeit zweier heinanderfolgenden Tilgungsquoten-Zahlungen auf einem und demselben pro-tionalen Niveau sich befinden, so müsste der Form

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

lends entsprochen sein, wobei C_1 der ein Jahr vorher, C_2 dagegen der gegenwärtige gbare Börsencours ist. Demgemäss würde sich sodann folgende Relation ergeben: Falle $C_1 : C_2$ kleiner ist als $W_1 : W_2$, so muss offenbar C_2, d. i. der gegen-rtige Cours, sich über dem proportionalen Niveau, dagegen wenn $C_1 : C_2$ grösser $W_1 : W_2$ ist, unter dem proportionalen Niveau des Vorjährigen befinden; d. h.

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{C_1}{C_2} \pm \vartheta$$

wobei $\pm \vartheta$ die eventuelle Differenz der beiden Quotienten bedeutet. Um sodann zu ...ren, um wieviel die beiden Course C_1 und C_2 von einander differiren, beziehungs-

von 21—42, wie es den Anforderungen des Landsturmgesetzes entspricht, gerechn
Nun wissen wir, dass die jüngeren Jahrgänge erstens der Landsturmpflicht län
zu genügen haben, daher die Wahrscheinlichkeit eines während dieser Zeit möglic
Krieges eine grössere ist, und zwar steigt dieselbe mit der Anzahl der Jahre, du
welche der Versicherte noch landsturmpflichtig bleibt; zweitens würden im F
eines Krieges die jüngeren Jahrgänge zum Kriegsdienste herangezogen werden,
gegen die älteren im eventuellen Einberufungsfalle blos im Innern des Lan
zur Verwendung kämen. Wir können daher für die Berechnung des Coëfficien
folgende Relation aufstellen:

Die Coëfficienten der zu zahlenden Kriegsprämien v
halten sich zu einander im umgekehrten Verhältnisse d
denselben entsprechenden Altersclassen. Es kommt jedoch n
ein anderer Factor in Betracht, und zwar die der Altersclasse entsprechende
lebens-Wahrscheinlichkeit, welche im eventuellen Falle durch das Ableben des V
sicherten in Folge der Kriegspflicht die mathematischen Voraussetzungen der Ans
ehlings aufheben würde, und zwar wäre der Verlust in demselben steigenden V
hältniss, als der Versicherte den Sterblichkeits-Tabellen gemäss, noch Jahre zu le
at. Hieraus geht nun hervor:

Die Coëfficienten der zu zahlenden Kriegsprämien v
halten sich zu einander, wie die Erlebens-Wahrscheinli
keiten der denselben entsprechenden Altersclassen.

Demzufolge ergibt sich folgende Rechnung:

$$C_m : C_{m+k} = \frac{1}{m} : \frac{1}{m+k},$$

wo m und $m + k$ die entsprechenden Altersclassen bezeichnen.

Ferner:

$$C_m : C_{m+k} = W_m : W_{m+k},$$

wo W die der Altersclasse entsprechende Erlebens-Wahrscheinlichkeit ist.
Demgemäss wird zum Beispiel zwischen den Coëfficienten der beiden Al
25 und 35 folgendes Verhältniss bestehen, wenn 38·5 und 31·4 die
weisen Erlebens-Wahrscheinlichkeiten bezeichnen.

$$C_{25} : C_{35} = \frac{1}{25} : \frac{1}{35}$$

$$= 38{\cdot}5 : 31{\cdot}4$$

und somit $$C_{25} : C_{35} = 1{\cdot}54000 : 0{\cdot}89857.$$

Für die Altersclassen 25 und 42 auf ebendieselbe Art:

$$C_{25} : C_{42} = \frac{1}{25} : \frac{1}{42}$$

$$= 38{\cdot}5 : 25{\cdot}4,$$

somit $$C_{25} : C_{42} = 1{\cdot}54000 : 0{\cdot}60476.$$

Wenn wir daher den höchsten Coëfficienten C_{24} als Einheit betrachten un
übrigen zu dieser in ein Verhältniss bringen, so ergibt sich die Resultatsform:

$$P.q.C_m$$

Beiträge zur Berechnung der Kriegsprämie.

In Folge des in Oesterreich-Ungarn zur Einführung gelangenden Landsturm-
etzes tritt an die Lebensversicherungs-Anstalten die Frage heran, auf welche
es möglich wäre, im Falle eines Krieges das hiedurch bedeutend erhöhte
ico der Versicherungen für den Todesfall durch eine an die jeweilige Anstalt zu
lende Kriegsprämie zu decken.

Die Frage an und für sich wäre nicht schwer zu beantworten und könnte man
fach der normalen Prämie ein gewisses Percent als Kriegsprämien-Zuschlag bei-
en, wenn hier nicht andere Momente von Belang wären, welche geeignet sind,
richtige Vertheilung im Verhältnisse zum Risico bedeutend zu erschweren. Wir
llen es versuchen, einige Anhaltspunkte für die systematische Durchführung dieser
age zu liefern.

In erster Linie müsste folgende Norm statutarisch festgestellt werden: Der-
ige zur Landsturmpflicht einberufene Versicherte, dessen Tod nachweislich im
fechte, durch Kriegsstrapazen oder durch eine in der Armee epidemisch oder
ctiös aufgetretene Krankheit herbeigeführt wurde, ist, im Falle derselbe für
Kriegsgefahr separat nicht versichert war, des Vertragsrechtes seiner Polizze
lustig erklärt und erhalten seine Erben blos die den eingezahlten Prämien
prechende Prämienreserve, respective den zur Zeit seines Todes mathematisch
gestellten Polizzen-Baarwerth ausbezahlt. Jeder landsturmpflichtige Versicherte
die Kriegsprämie entweder jährlich vom Beginn der eingegangenen Lebens-
icherung bis zu seinem zurückgelegten 42. Lebensjahre, mit welchem bekanntlich
Landsturmpflicht aufhört, oder unter einer gewissen Bedingung in einer Kriegs-
nie blos für die Kriegsdauer bezahlen. Im Falle jedoch vor der Zurücklegung
s 42. Lebensjahres mehrere Kriege ausbrechen, müsste der Letztere für jede
lne Kriegsdauer eine neue Prämie entrichten.

Was nun die Höhe der zu zahlenden jährlichen Prämien anbelangt, so sind
lben in erster Linie von der für die gewöhnliche Versicherung zu leistende
nalprämie abhängig und ist es Sache der jeweiligen Anstalt einen bestimmten
entsatz derselben für die Kriegsprämie zu bestimmen, und zwar je nach der,
Verhältniss sämmtlicher Versicherten entsprechenden Anzahl von Landsturm-
htigen, da offenbar durch das Risico für Kriegsgefahr ausser der durch die
gsprämie zu bildenden Prämienreserven auch der allgemeine Prämienreserven-
belastet wird.

Wir wollen diesen, die Kriegsprämie in ein Verhältniss zur Normalprämie stel-
n Percentsatz mit q bezeichnen und wäre daher, wenn P die Normalprämie
ichnet und K die Kriegsprämie,

$$K = \frac{P\,q\,C}{100}$$

n C einen noch näher zu bestimmenden Coëfficienten bezeichnen mag. Da hier
er die Voraussetzung gilt, dass sämmtliche Versicherte als gesund anerkannt sind,
zwar zur Zeit der jeweilig eingegangenen Versicherung, so lässt sich der Coëfficient
zu zahlenden Kriegsprämie auf folgende Weise berechnen. Es seien die Altersclassen

n ausgiebigen Reservefonds für Kriegsversicherung sorgen können, ist eine solche Enttäuschung in den Voraussetzungen bezüglich des , wie hier.
der bekannte Assecuranz-Fachmann, sagt in einem seiner Artikel: m des Todes oder die Disposition zu irgend einer Todeskrankheit ist chlichen Organismus schlafend vorhanden. Jemehr innere und äussere chgewicht in den Lebensfunctionen, je weniger wird jener Keim oder zur Thätigkeit geweckt. Daher ist jeder Uebergang von einer iehungsweise Beschäftigung zu einer anderen, umso viel mehr die höhend, als er plötzlich und schroff eintritt. In dem älteren Beamten- Beispiel eine erhöhte Sterblichkeit ein, kurz nachdem die Beamten n den Ruhestand versetzt sind. Bei den Soldaten tritt eine solche ch der Aushebung ein.
Wenige von Denjenigen, welche bei der Aushebung von den Aerzten gesund erkannt wurden, müssen als untauglich, ja sogar als Todes- en ersten Wochen der Recrutenzeit fortgeschickt werden.
machung einer Armee ist gleichfalls ein solcher kritischer Ueber- umsomehr, je schneller sie bewirkt werden muss und mit je r Aufregung sie verbunden ist. Hier tritt uns bereits das erste öhten Sterblichkeit der Combattanten entgegen. Nun erfolgen die Märsche nach dem Kriegsschauplatze; tagelang werden die Respira- ch die stark mit Staub erfüllte Atmosphäre stark benachtheiligt; ze, Ueberanstregung, Trinken von Brunnenwasser in dem aufgeregten ustande, werden Viele krank und Andere sterben auf der Stelle; eite Moment der erhöhten Sterblichkeit. Bevor die Armee vor dem nd viele Hunderte todt und viele Tausende krank. Das Bivouakiren, haltend feuchtem Wetter oder in der Winterkälte wirft Tausende lager, wo sehr viele sterben; bei Anderen wird der todeskrank- zur Thätigkeit geweckt und das langsame Hinsiechen nimmt seinen das dritte Moment der erhöhten Sterblichkeit. Die vielen nach- kungen des Feldlebens sind besonders die constitutionellen Krank- — Cholera, Typhus u. dgl. Infections-Krankheiten sind gewöhn- es Krieges, somit ist hier das vierte Moment der erhöhten Sterb- es ist sehr gewichtig, da die Erfahrung überall die Richtigkeit des : Im Kriege sterben weit mehr an Krankheiten als auf dem bestätigt hat.
gelangen wir an das Kämpfen auf dem Schlachtfelde als das fünfte blichkeit im Kriege. Die Zahl der Todten auf dem Schlachtfelde r lange nicht die ganze, durch den Krieg hervorgerufene Sterb- ich hat der Feldzug ein Ende; er hat bei Vielen den Todeskeim n sie auch als Civilpersonen sterben, so ist doch die Sterblichkeit das sechste und letzte Moment der durch den Krieg erfolgten keit zu betrachten."

Dr. Ludwig Grossmann's

thematische Principien für die Conversion von Tilgungsrenten.

II.

Nachdem bereits das Verhältniss des Börsencourses zum al pari-Werthe der ungsrente genügend erörtert wurde, fällt es nicht schwer, den entsprechenden, dem Course abhängigen Zinsfuss der Rente zu ermitteln und mag hier blos zur pletirung die hiefür allgemein giltige Form angeführt sein.

Der jeweilige gangbare Werth oder Cours der Rente ist für den Percentsatz, welchem sich die Obligation derzeit verzinst, ausschlaggebend, da sich der ntsatz im umgekehrten Verhältnisse zum Course verhält; und dasjenige des ri-Werthes zum festgesetzten Zinsfusse ein unverändertes bleibt.

Bezeichnet man das jeweilige von der Coursvariation abhängige Zinsenverhält- per 100 mit P', so ergibt sich die Form

$$P' = \frac{W_n}{C_n} P$$

n P den festgesetzten Zinsfuss bezeichnet; d. h. das Percent, mit welchem eine Rente zu einem gewissen Zeitpunkte mit Rücksicht en ihr entsprechenden Cours verzinst, wird eruirt, wenn den festgesetzten Renten-Zinsfuss mit dem Quotienten, sich aus dem jeweiligen al pari-Werthe und derzeitigen sencourse ergibt, multiplicirt.

Conversion von Tilgungsrenten mittelst Kürzung der Tilgungsdauer.

Die Conversion mittelst Kürzung der Tilgungsdauer ist nach mathematischen riffen die einfachste und vom finanztechnischen Standpunkte die vortheilhafteste, dieselbe in gewissen Fällen unvermittelt durchführbar ist, und aus diesem le eine Ersparniss der oft sehr grossen Transactions-Spesen zulässt. Es f dies keiner näheren Erklärung, wenn wir in Betracht ziehen, dass die te Kürzung einfach auf administrativem Wege durchgeführt werden kann, der directe Einfluss der Tilgungsdauer auf den Zinsfuss bei unverändert blei- n Tilgungsquoten und das gerade Verhältniss der beiden zu einander als endes Argument für diese Behauptung eintritt.

Die Kürzung der Tilgungsdauer einer Rente kann in dem genannten Sinne mit Beibehaltung der jährlichen Tilgungsquote und des zu tilgenden Capitals osten des Zinsfusses geschehen. Es gilt daher die Frage, den durch die Kür- der Tilgungsfrist veränderten, beziehungsweise herabgesetzten Zinsfuss in einer Form zu ermitteln und den hiedurch veränderten Tilgungsmodus der Form entsprechend festzusetzen.

Da nun bezüglich des ursprünglichen ein verhältnissmässig grösserer Th der unverändert gebliebenen jährlichen Tilgungsquote zur Tilgung beitragen mu da die Dauer eine kürzere geworden ist, so wird offenbar hiedurch der vorbedin Zinsfuss beeinträchtigt und, was im Grunde genommen der Zweck der Convertir ist, auf das entsprechende Niveau herabgesetzt.

Um das Gesagte in eine mathematische Form zu kleiden, wollen wir u des allgemeinen, für Tilgungsrenten giltigen Ausdruckes, den wir schon Abschnitt I als Grundlage angenommen haben, auch weiter bedienen und lau derselbe:

$$Q = \frac{Kp\,(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} \tag{1}$$

worin n die vorbedingte Tilgungsdauer bezeichnet.

Es soll nun nach dem $m$ten Jahre — $m < n$ angenommen — die Kür der noch übriggebliebenen Tilgungsdauer $n - m$ erfolgen; demgemäss wird der n zu tilgende Werth der Obligationen durch folgende Form ausgedrückt:

$$W = \frac{K(1+p)^{n-m} - 1}{(1+p)^{n-m} - (1+p)^{-m}} \tag{2}$$

worin m eine bestimmte Grösse ist und daher nur die Kürzung des n, das ist ganzen vorbedingten Tilgungsdauer als zulässig betrachtet werden kann, jedoch Einfluss derselben ausschliesslich auf die Differenzdauer $n-m$, beziehungsweise den während dieser Zeit massgebenden Zinsfuss einwirkt. Bezeichnen wir d $n-m = k$. In der Form (2) ist bekanntlich (Siehe Abschnitt I, Form 3) die gungsquote eliminirt, da selbe, wie dies der Rechnung entspricht, unverändert bl und daher durch den in der Form (1) bezeichneten Werth substituirt werden k Wir erhalten demgemäss, wenn wir die Kürzung um λ Jahre vornehmen, die Di renz $k-\lambda$ als neue, der gekürzten ursprünglich vorbedingten Tilgungsdauer sprechend; und da die unveränderte Tilgungsquote mit Bezugnahme auf den n zu tilgenden Werth W der Obligationen der Form

$$Q = \frac{Wp_1\,(1+p_1)^{k-\lambda}}{(1+p_1)^{k-\lambda} - 1} \tag{3}$$

entsprechen muss, so erübrigt uns nur noch, den Werth von p_1 aus der Gleichung zu berechnen.

Die Formel (27) der „Praktischen Anwendung der Theorie und Lösung irreductiblen transcendenten Gleichungen auf die Zinseszins- und Rentenrechnu II. liefert uns für diese Aufgabe diejenige Form, die den Anforderungen der Co nuität entspricht, und zwar gilt für die Fundamental-Form

$$A\,(1+p)^n - \frac{R\,[(1+p)^n - 1]}{p} = K$$

für den speciellen Fall wo $K < A$ ist, die Ersatzgleichung

$$u \underset{m > 1}{\overset{K < A}{=}} E \left[1 + \frac{R\,(m-1)}{A\,m - K}\right]^n$$

in der Voraussetzung

$$p = u^{\frac{1}{n}} - 1$$

hnung getragen ist.

Für den vorliegenden Fall wird in obiger Form $K = 0$, $A = W$, $R = Q$ $n = k - \lambda$, wir erhalten daher bei der Voraussetzung, dass der Formel 4)

$$p_1 = u^{\frac{1}{k-\lambda}} - 1$$

sprochen wird, die unseren Anforderungen Genüge leistende Ersatzgleichung, worin den Näherungswerth bedeutet.

5) $$u = \underset{m_0 > 1}{\overset{K = 0}{E}} \left[1 + \frac{Q\,(m_0 - 1)}{W m_0} \right]^{k - \lambda}$$

he uns nach vollzogener Substitution in die Formel (4.) den durch Kürzung Tilgungsdauer veränderten Zinsfuss bestimmt.

Die nun ebenfalls durch diese Procedur von Jahr zu Jahr rascher abnehmden al pari-Werthe der Rente werden auf dieselbe Weise ermittelt, wie wir sie Abschnitt I erörtert haben, wobei selbstverständlich der neue zur Einführung ngte Zinsfuss p_1 anstatt p in Rechnung kommt.

Es wäre zum Beispiel die Conversion einer vierpercentigen Tilgungsrente, en Tilgungsdauer 30 Jahre beträgt, auf die besagte Art durchzuführen, und r nachdem seit der Emission derselben bereits acht Jahre verstrichen sind; es ie Frage, auf welche Weise ist es möglich, den Einfluss, der durch die ung der noch übriggebliebenen Tilgungsdauer von 22 Jahren auf den Zinsfuss geübt wird, zu ermitteln und zwar, wenn eine Kürzung um fünf Jahre voll- en wird, daher noch eine Tilgungsfrist von 17 Jahren zurückbleibt.

In erster Linie muss die Tilgungsquote für eine 100 Gulden-Renten-Obli- tion obiger Emission festgestellt werden, bevor wir daran gehen, den noch übrig- bliebenen zu tilgenden Betrag derselben nach acht bezahlten Tilgungsquoten er näheren Untersuchung mit Rücksicht auf obige Transaction zu unterziehen; ngemäss erhalten wir nach Form (1.)

$$Q = \frac{100 \,.\, 0{\cdot}04 \,.\, (1{\cdot}04)^{30}}{(1{\cdot}04)^{30} - 1} = 5{\cdot}78$$

jährliche Tilgungsquote. Der al pari-Werth obiger Obligation nach achtjähriger lgungsquoten-Zahlung ist

$$W = 100\,(1{\cdot}04)^{8} - \frac{5{\cdot}78\,[(1{\cdot}04)^{8} - 1]}{0{\cdot}04} = 83{\cdot}60$$

Nun handelt es sich darum, dass der Betrag W anstatt in 22 Jahren schon 17 Jahren bei gleichbleibender Tilgungsquote von fl. 5·78 getilgt werde, was ürlicher Weise blos auf Kosten des Zinsfusses geschehen kann. Demgemäss wird Formel für den herabgesetzten Zinsfuss nach (4) und (5) folgendermassen lauten:

2*

Für $\lambda = 5$ ist $p_1 = u^{\frac{1}{17}} - 1$ und

$$u = \frac{E}{m_0 > 1} \left[1 + \frac{5\cdot78\,(m_0 - 1)}{83\cdot60\, m_0} \right]^{17}$$

und das der Rechnung entsprechende Resultat wird demgemäss

$u = 1\cdot371$ sein; und hieraus

$p_1 = 0\cdot018734$, d. i. die Rentenzinsen h
durch eine 5jährige Kürzung der Tilgungsdauer um mehr als die Hälfte ve
somit der Percentsatz

$$P = 1\cdot87\ \%.$$

Natürlicherweise kann dies nur als theoretisches Beispiel betrachtet
und wurde absichtlich eine so bedeutende Kürzung vorgenommen, um den
derselben auf den Zinsfuss so recht hervortreten zu lassen.

Nun kommt noch die Frage in Betracht, wie weit man in der Kür
Tilgungsdauer gehen kann, um den ursprünglichen Zinsfuss auf ein gewisse
herabzusetzen.

Der Formel (3) gemäss erhalten wir den Ausdruck

$$(1 + p_1)^{k - \lambda} = \frac{Q}{Q - W p_1}$$

daher 6)

$$k - \lambda = \frac{lg\, Q - lg\, (Q - W p_1)}{lg\, (1 + p_1)}$$

als die gesuchte, dieser Frage entsprechende Formel, nach welcher unserem
gemäss bei einer beabsichtigten Herabsetzung des Zinsfusses blos um $^1/_2$
die Kürzung der Tilgungsdauer folgendermassen hätte durchgeführt werden

Da der ursprüngliche Zinsfuss 4 Percent ist, so haben wir es nun m
solchen von $3^1/_2$ Percent zu thun und erhalten wir demgemäss aus Form (

$$22 - \lambda = \frac{lg\ 5\cdot78 - lg\ [5\cdot78 - (83\cdot60)\,.\,(0\cdot035)]}{lg\ 1\cdot035} = 20\cdot5$$

Daher $\lambda = 1\cdot5$; sonach müsste für die beabsichtigte Herabsetzung d
fusses um $^1/_2$ Percent die noch vorhandene Tilgungsdauer von 22 Jal
1·5 Jahre gekürzt werden.

iegsprämienzuschlag vom mathematischen Standpunkte.

er dem Kriegsprämienzuschlag versteht man im Allgemeinen denjenigen den die Prämie einer gewöhnlichen Versicherung für den Todesfall erfährt, be auch auf eine Versicherung für den Kriegsfall ausgedehnt wird.

anntlich ist nun das auf Grundlage der normalen Sterblichkeit sich Risico in keinem Verhältniss zu jenem im Kriegsfalle insbesondere, wo es m handelt die rüstigsten Altersclassen, bei welchen das Risico ein fast dendes ist, einem sozusagen unbegrenzten Kriegsrisico zu unterordnen; das mgesetz zieht alle vom 24. bis zum 42. Lebensjahre inbegriffenen Alters- um Kriegsdienste für eventuelle Fälle heran. Nun fragt es sich, welche ist scheinlichkeit eines auszubrechenden Krieges und wann tritt in diesem Eventualität der Heranziehung der Landsturmpflichtigen zum Kriegsdienste

se beiden Fragen, von denen gewissermassen die letztere die Function der ist, lassen sich absolut nicht einmal annäherungsweise bestimmen und liesse stens ein Approximativsystem derart zuwege bringen, dass aus historisch en Erfahrungen das Wahrscheinlichkeits-Verhältniss des Krieges zum in der Dauer eines Jahres festgestellt werden könnte; was eigenlich im enommen desto verlässlicher wäre, als das arithmetische Mittel von vielen erten den geringen Anhaltspunkten, die aus der Zufälligkeit erwachsen, das vicht halten würde.

eichnen wir dieses noch näher zu bestimmende Verhältniss in folgender

Wahrscheinlichkeit eines Krieges im Laufe eines Jahres sei a, die des $1-a$, da unbedingt die Wahrscheinlichkeit des Friedens und des Krieges

it ergibt sich das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit eines Krieges zum nnerhalb eines Jahres:

$$\frac{K}{F} = \frac{a}{1-a}$$

Grund dieser Relation lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Krieges inner- r beliebigen Anzahl von Jahren bestimmen, welche für die Fixirung des zes q von Belang ist, wenn von der verschiedenen Diensttauglichkeit der nten Altersclassen abgesehen, blos die denselben entsprechende Dienst- spective die mit derselben wachsende Einberufungs-Wahrscheinlichkeit für sdienst in Betracht gezogen wird.

nun oben bemerkt wurde, ist auch im Falle eines Krieges die Dispen- r Landsturmpflichtigen vom Kriegsdienste möglich und ist daher die Mög- er Einberufung M eine Function obiger Wahrscheinlichkeit.

Wir erhalten daher

$$M = f\left(\frac{a}{1-a}\right) \qquad 2)$$

als eigentlichen Möglichkeits-Coëfficienten der Einberufung zum Kriegsdienst[e] einer früheren Abhandlung über dieses Thema unter dem Titel „Beiträg[e] Berechnung der Kriegsprämie", wurden die Schwierigkeiten hervorgehoben[,] denen die Fixirung der Kriegsprämie, beziehungsweise des Kriegsprämien-Zusc[hlages] verbunden ist. Es wurde daselbst auf diejenigen Momente hingewiesen, die ge[eignet] sind, die Dehnbarkeit des im Kriegsfalle für die Anstalten vorwaltenden [...] tenden Risicos in gewisse Grenzen einzudämmen; und wurden die Bedingung[en in] Vorschlag gebracht, mittelst welcher man die genannten Schwierigkeiten zum [...] oder gänzlich beheben könnte.

Die einzelnen Punkte, die es den Versicherungs-Gesellschaften ersch[weren,] den fast noch ohne jede auf mathematischer Basis beruhende Sicherheit und [Z]uverlässigkeit fussenden Geschäftszweig ins Leben zu rufen, wurden der Reihe [nach] aufgezählt und Mittel gefunden, dieselben ihres schädlichen Einflusses zu entkl[eiden.] Der Kriegsprämien-Zuschlag wurde durch eine geschlossene mathematische [Formel] ausgedrückt, worin die auf directem Wege unerreichbare Genauigkeit der Fa[ctoren] durch Relationen zuwege gebracht wurde, die zwar auf indirectem Wege gef[unden,] jedoch auf einer desto verlässlicheren Grundlage aufgebaut wurde.

In der Schlussrelation für den Kriegsprämien-Zuschlag ist der das Verh[ältniss] der Kriegsprämie zur Normalprämie bezeichnende Percentsatz q als eine noch [...] näher zu bestimmende Grösse hingestellt worden.

Wir wollen nun versuchen, die Grösse q auf demselben Wege in Grenz[en] zuzwängen, wie wir dies bereits in der vorigen Abhandlung beim Coëfficien[ten] gethan haben und hier insbesondere diejenigen dort angeführten Momente ins [Auge] fassen, die uns für diese Aufgabe geeignet erscheinen.

Vor allen Dingen ist es von Belang, den Percentsatz der landsturmpflich[tigen] Versicherten für den Todesfall von sämmtlichen Versicherten dieser Kategor[ie] der jeweiligen Anstalt zu bestimmen, ferner ist es nothwendig, das Verhältnis[s der] landsturmpflichtigen Versicherten der einzelnen Altersclassen zu einand[er zu] bestimmen und zwar nach ihrer ziffermässigen Vertheilung. Da jedoch dieses [Ver]hältniss von Jahr zu Jahr ein veränderliches ist, so mag dasselbe als ein d[urch]schnittsmässiges aus einer gewissen Anzahl von Jahrgängen angenommen w[erden.]

Da nun jede einzelne Altersclasse einer gewissen der Verwendung im K[riege] entsprechenden Gefahrenclasse entspricht, welche in continuirlicher Weise ziffer[mässig] sich ausdrücken lässt, so erhalten wir durch Multiplication der jeweiligen [einer] gewissen Altersclasse angehörenden Individuenanzahl mit der ihnen entsprech[enden] Gefahrenclassenziffer und Summirung dieser Producte diejenige Ziffer der Versich[erten,] die eventuell im Kriegsfalle durch Tod abgehen könnte.

Hiedurch ist der Hauptfactor des Risicos annäherungsweise festgestellt.

Nehmen wir z. B. an, dass die Gefahrenclasse der Alter vom 24. bis 32. Lejahre $^1/_{20}$ ist und vom 32. bis 42 Lebensjahre bis zu $^1/_{40}$ sich verringert — Anzahl der Versicherten der einzelnen Altersclassen mag durch die Grössen c, d, e, f . . . . bezeichnet sein — so ergibt sich als annäherungsweiser Mass- des Risicos die Form

$$R = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{20} +$$

$$\frac{i}{22} + \frac{k}{24} + \frac{l}{26} + \frac{m}{28} + \frac{n}{30} + \frac{o}{32} + \frac{p}{34} + \frac{q}{36} + \frac{r}{38} + \frac{s}{40}$$

wir nun in Betracht ziehen, dass die Versicherung für den Kriegsfall blos einen gewissen noch näher zu fixirenden, von dem Gutachten der jeweiligen abhängigen Betrag ausgedehnt werden kann; und das arithmetische Mittel licher auf ein einzelnes Risico versicherter Beträge als Grundlage zu einem herungs-Durchschnittsbetrage vollends hinreicht um durch Multiplication des- mit der Grösse R den im Kriegsfalle eventuell an die Hinterbliebenen zu den Betrag annäherungsweise festzustellen, so lässt sich leicht die Tragweite mathematischen Combination ermessen.

Auf Grund der vorhandenen Factoren ist es dann ein Leichtes das Verhältniss riegsprämie zur Normalprämie zu bestimmen, indem uns dann das Risico t ist.

ur richtigen Bestimmung der oben beispielsweise angeführten Gefahrenclassen die authentischen Berichte der Todtenziffern auf den Schlachtfeldern mit auf die Anzahl der Combattanten dienen, wodurch jene Gefahrenclassenziffern, unserem Beispiele mehr von der möglichen Betheiligung der jeweiligen lassen an Schlachten abhängig gemacht wurden, einer Genauigkeit zugeführt können, die den Anforderungen in jeder Beziehung entsprechen könnte.

Als zweiter Factor des hier vorwaltenden Risicos ist die durch den Krieg ver- nachträgliche Sterblichkeit der ehemaligen Combattanten, die wohl lebend Schlachtfelde zurückkamen, jedoch durch die übermässigen, ungewohnten zen an ihrer Gesundheit Schaden gelitten haben.

Es muss daher in die Kriegsprämie auch dieses Moment der Risico-Erhöhung gen werden, denn Derjenige, der sich seine Todesfall-Versicherung nicht auch n Kriegsfall ausgedehnt hat, muss im Falle seiner Rückkunft aus dem Kriege, ne neuerliche ärztliche Untersuchung seiner Gesundheit vorbereitet sein, und derselbe im Falle eines durch die Kriegsstrapazen hervorgebrachten krank- Zustandes sein Versäumniss schwer zu bereuen haben, da in diesem Falle der herungsvertrag von Seite der Anstalt gelöst werden würde, und das mit vollem e, weil man es keiner Anstalt zumuthen kann, ein durch die Prämie nicht tfertigtes Risico zu übernehmen.

Um nun den verhältnissmässig ziemlich hohen Kriegsprämien-Zuschlag auf em Verhältniss der Höhe der Normalprämien entsprechendes Niveau zu bringen,

müsste das bereits in unserer früheren Abhandlung erwähnte sogenannte R
einen Theil der Jahresprämie decken und zugleich den Anstalten Gelegenheit
aus demselben eine Kriegsprämien-Reserve zu bilden. Was jedoch insbesonde
Belang wäre, ist hier der am meisten in Betracht kommende Factor, dass
der sich gleich oder für später seine Versicherung für den Kriegsfall aus
wollte, dieses Reugeld als einmalige Prämie zu Beginn seiner eingegangenen
fall-Versicherung entrichten müsste, um sich überhaupt das Recht dieser Ausde
für den Kriegsfall zu erkaufen. Wer dieser Anforderung nicht nachkommen
könnte wohl in vollständigen Friedenszeiten diesen Betrag mit Zinsen und
zinsen nachzahlen; was ihm jedoch im Falle kriegerischer Aussichten rundwe
weigert werden müsste.

Das Reugeld könnte mit der Mise der halben jährlichen Kriegsprämie in
einstimmung gebracht werden, wobei die andere Hälfte jährlich oder vor
ausbruch eventuell mit einem entsprechenden Zuschlag auf einmal zu zahlen

Auf diese Art würde den Versicherungs-Gesellschaften Gelegenheit
sein, sich zur Zeit mit einem genügenden Kriegsprämien-Reservefonds zu ver
u d würden im Falle lange andauernder Friedenszeiten die Versicherten de
hieraus ergebenden Nutzens insoferne theilhaftig werden, als hiedurch erste
Anstalt in die Lage versetzt werden würde, die Ausdehnung der Versiche
für den Kriegsfall auf grössere versicherte Capitalien zuzulassen und zweite
eventuellen Falle auch eine Ermässigung der jährlichen Kriegsprämie ein
könnte, da jene durch die lange Zeit angewachsene Reserve genügende Garan
eventuelle grössere Schäden bieten würde.

Eine solche, auf gesunder Basis beruhende Einführung würde erst m
Zeit sich so recht Bahn brechen und das zu versichernde männliche Publicum
es dann als selbstverständlich betrachten, seine Versicherung auch auf den Kri
ausgedehnt zu wissen; da der Mangel eines solchen unter den heutigen Um
eine Unvollkommenheit der eingegangenen Versicherung involviren würde
daher ein Missgriff jedes einzelnen Versicherten wäre, eines verhältnissmässig g
Mehrbetrages halber nicht nur für eine eventuelle Kriegsgefahr sein vers
Capital auf's Spiel zu setzen, sondern noch überdies die betreffende Versiche
anstalt während der Kriegsdauer des ihm gegenüber eingegangenen Risicos ein
entheben.

Dr. Ludwig Grossmann's

Beiträge zur Lösung der Währungsfrage.

Wenn man die Wandlungen der Valutawerthe in ihren verschiedenen Stadien
chtet hat, so muss man zur Ueberzeugung gelangt sein, dass die beiden Edel-
le Gold und Silber neben ihrem specifisch eingebildeten Werthe noch einen
en relativen Werth besitzen, auf den der erstere seinen thätigen Einfluss aus-
welcher umso grösser wird, je flüchtiger oder besser gesagt veränderlicher der
ldete Werth sich gestaltet. Diese Thatsache tritt aber umso mehr noch in
rdergrund, wenn sich die beiden genannten Werthformen eines einzelnen
talles merklich von einander entfernen; dann entsteht zwischen dem relativen
em durch eine etwaige grössere Production herabgeminderten specifisch ein-
ten Werthe eine Lücke, die eine Art Unsicherheit im Verkehre verursacht
f diese Weise verwirrend, ja oft verheerend auf die Valutaverhältnisse einwirkt.
nerhalb der Grenzen eines Staates kann freilich diese Veränderlichkeit nicht
ur Geltung gelangen, weil hier sowohl der Werth des Geldes, als auch das
niss desselben von der legislatorischen Gewalt geregelt und festgesetzt ist,
nur eine indirecte Wirkung möglich ist, die sich durch eine positive oder
e Strömung des einen oder andern Edelmetalles auswärts der Grenzen kund-
nnerhalb derselben wird der substantielle Werth vollständig durch den legis-
h zuerkannten verdrängt. Anders verhält es sich jedoch im Verkehre zweier
ehrerer Staaten untereinander, wenn nicht Münzverträge oder Gleichheit der
gung den vermittelnden Factor bilden, der die Legislative in Betreff ihrer
r innerhalb der Staatsgrenzen, auch ausserhalb derselben ersetzt. Dann treten
derinteressen in Betreff der Werthschätzung in nackten Formen hervor, und
und Nachfrage regeln unbekümmert um die internen Geldbegriffe den
erth.

m wieviel müssen sich aber diese Contraste verschärfen, wenn noch ein
Edelmetall von anderer Werthbedeutung und anderer substantieller Massgabe,
ähnlichen Processen, wie die genannten, unterworfen ist, den Geldmarkt
st; insbesondere wenn die aus der natürlichen Ungleichheit des Werthverhält-
resultirende Veränderlichkeit, durch eine im entgegengesetzten Sinne ent-
e Lücke, die zwischen dem relativen und dem durch etwaige geringere Pro-
des betreffenden Edelmetalles erhöhten specifisch eingebildeten Werthe ent-
och um ein Bedeutendes erhöht wird. Neben diesem wichtigen Umstande tritt
ch ein anderer der Erwägung noch würdigerer in Betracht; und zwar ist dies
klare Auffassung des Werthbegriffes, insoferne der Werth des einen Edel-
s mit dem des anderen gemessen wird. Berücksichtigen wir nun, dass jenes
ass einer ebensolchen Veränderlichkeit unterworfen ist wie der zu messende

Werth, so ergibt sich daraus, das wir es hier mit keinen bestimmten, sondern mit veränderlichen Werthverhältnissen zu thun haben, die von einer Unzahl wech der Factoren beeinflusst in ihrer Beschaffenheit jeder sicheren Grundlage entbe Hiezu kommen noch die verschiedenen Währungen und Münzverhältnisse der einz Staaten, infolge deren jeder einzelne derselben seine Interessen in anderer Wei vertreten gezwungen ist, wodurch ein einheitliches Zusammengehen in Währ Angelegenheiten fast unmöglich wird.

Die Werthrelation der beiden Edelmetalle ist mit Ausnahme Englands in europäischen Staaten die gleiche und zwar ist das Werthverhältniss in Bezu Feingehalt zwischen Gold- und Silbermünzen gleichen Nominalwerthes wie 1 : d. h. ein Silbergulden hat 15½mal soviel Feingehalt Silber, wie ein Goldg Feingehalt an Gold besitzt.

Zur Prägung von 100 Silbergulden sind 38·623 Unzen Feinsilber nöthig der Werthrelation gemäss zu 100 Gulden Gold circa 2·5 Unzen Feingold.

Soll nun der Gehaltwerth des Silberguldens mit dem Nominalwerthe dess übereinstimmen, so muss der Werth einer Unze Feinsilbers fl. 2·59 in Ö reichischen Banknoten ohne Rücksicht auf Prägungskosten und andere Spesen in englischer Währnng ist dies bei einem Goldcours von fl. 12·60 per Pfd. St., 49· per Unze. Wäre daher die Frage gestellt, wie hoch eine Unze Silber bei irgend Goldcours stehen müsste, um für Silbergulden weder Agio noch Disagio zu er so brauchen wir nur die in einer Unze Feinsilber enthaltene Anzahl Silberg (= 2·58912) nach dem jeweiligen Goldcours per Pfund Sterling auf Pence rechnen. Wenn nun bei gleichem Goldcours die Unze Feinsilber höher als der Cours, d. i. 49·31 $\mathcal{D}$ per Unze, steht, so ergibt dies für Silbergulden ein Ag dieser Cours ein tieferer, ein Disagio.

Nehmen wir an, dass bei einem Goldcours von fl. 12·60 per Pfd. St die Unze Feinsilber 48·50 $\mathcal{D}$ kostet, so ergibt sich als Parität ohne Rücksi die Spesen fl. 98·34, d. h. 100 fl. Silber sind dem gegebenen Silbercours fl. 98·34 werth; dies ergibt ein Disagio von 1·66 Percent.

Die Parität für 100 fl. Silber ist gleich dem Lond Originalcours per 1 Unze Silber in Gulden ö. W. au drückt, dividirt durch die in einer Unze enthalt Anzahl Silbergulden (= 2·58912).

Würde nun bei gleichem Silberpreis der Goldcours bis zu einer gewissen steigen, so würde dadurch das Disagio des Silbers wieder aufgehoben werden; we Cours müsste daher der Pfd. Sterling in Gulden ö. W. erreichen, um bei Beispiel die Parität von 100 fl. herzustellen.

Die in 100 Unzen Feinsilber enthaltende Anzahl Sil gulden (= 258·912) multiplicirt mit der Anzahl Unzen bei dem betreffenden Silbercours für 1 Pfd. Ster käuflich sind, liefern uns denjenigen Cours eines Pf Sterling in Gulden ö. W., bei welchem sich die Par des besagten Silbercourses auf fl. 100 stellen, als betreffende Disagio verschwinden würde.

Für obiges Beispiel angewendet, lautet die Form folgendermassen:

$$1 \text{ Pfd. Sterling} = 258\,912 \,.\, \frac{240}{48{\cdot}5} = \text{fl. } 12{\cdot}81$$

mit würde für den Silbercours von 48·5 𝔡 per Unze bei einem Goldcours von 12·81 per 1 Pfd. Sterling die Parität von fl. 100 hergestellt sein.

In einem anderen Falle, wo zum Beispiel bei dem Goldcours von fl. 12·60 per d. Sterling die Unze fein Silber 51·25 𝔡 kostet, ergibt sich als Parität fl. 103·92, her ein Agio von 3·92 Percent. Im Falle nun hier der al pari-Cours des Silbers treten und das Agio verschwinden soll, muss der Goldcours niedriger werden. ach unserer Formel ergibt dies den Cours von fl. 12·13 per Pfd. Sterling.

Nachdem wir nun zum Behufe eines bessern Verständnisses der seit dem re 1885 sich immer steigernden Währungsmissverhältnisse Einiges vorausgeschickt ben, wollen wir die Lage des heutigen Geldmarktes näher in Augenschein nehmen. r Courssturz des Silbers hat in der zweiten Hälfte des Jahres 1886 ungeahnte mensionen angenommen und indem noch vor einem Jahre der al pari-Cours sich ziemlich behauptete, ist heute ein Disagio von 14 Percent zu verzeichnen. Diese scheinung ruft nun in den Kreisen der Währungspolitiker grosse Besorgniss her- und sinnt man allgemein auf ein Mittel, die durch einen etwaigen weiteren urssturz mögliche Demonetisirung des Silbers auf geeignete Art hintanzuhalten.

Die Mittel, die in dieser Beziehung zur Abhilfe der Silberentwerthung vor-chlagen werden, sind mannigfacher Art und verdient der Vorschlag behufs Ein-rung der Doppelwährung der besonderen Beachtung unter denselben, da hierin allein richtige Princip einer herbeizuführenden monetaren Mehrverwendung des lbers, wodurch demselben eine gewisse Sicherheit und Stabilität verschafft wird, meisten vertreten ist. Es handelt sich nur darum, in welcher Weise und unter lchen Auspicien die Doppelwährung in irgend einer Form zur Durchführung langen könnte, denn mit dem einfachen Principe einer solchen, ein bestimmtes erhältniss zwischen den beiden Edelmetallen Gold und Silber herbeizuführen, kann wohl nicht ernst sein und überdies stösst man auf ungeheuere Schwierigkeiten, n internationales Abkommen in dieser Beziehung herbeiführen zu können.

Um dem Silber eine thunlichst erweiterte monetare Verwendung neben der rincipalen Goldvaluta zu verschaffen und hiedurch einer ferneren Entwerthung und Verthschwankung des Silbers entgegenzuwirken, ist es nur nothwendig, dass wischen sämmtlichen Staaten Europas, den Vereinigten Staaten Amerikas und ndien ein Vertrag geschlossen werde, demgemäss Silbergeld ohne Rücksicht auf gio oder Disagio als legislativ anerkannte Münze mit gesetzlichem Vollwerth egenseitig als Zahlung im Nominalwerth angenommen wird. Das würde neben en einzelnen Währungen der verschiedenen Staaten nichts anderes als eine nternationale Silberwährung bedeuten; so sehr diese Idee frappiren dürfte, bedarf es nur des guten Willens, um sie zur Durchführung zu bringen. Man önnte wohl die Zahlungen mit Silber bis zu einem gewissen Betrage beschränken nd ebenso *wie in Deutschland bei* der dortigen Goldwährung gesetzlich Niemand

2*

bemüssigt ist, mehr als 20 Mark in Silber anzunehmen, so könnte auch hi Begrenzung in diesem Sinne zur Einführung gelangen und ein Modus g werden, der einem übermässigen Einströmen fremden Silbers steuern würde.

Von Zeit zu Zeit könnte ein gegenseitiger Austausch der jeweiligen f Münzen für eigene bankmässig eingeleitet, eventuell ein Ueberschuss mit Gold ausgeglichen werden. Auf diese Weise wäre auch die freie Silberprägung der führung näher gerückt und würde sich der Cours des Silbers von selber wieder erholen, dass es den Nominalwerth, eventuell vielleicht noch ein Agio er würde (natürlich nur ein theoretisches), wodurch sich die Nothwendigkeit der nationalen Silberwährung von selbst aufhören würde, um bei einer even Abbröckelung des Silbercourses wieder in Action zu treten. Differenzen, d durch diese Einführung zwischen Staaten mit Goldwährung und solchen mit währung ergeben würden, liessen sich ebenfalls durch legislative gemeinsch durchzuführende Massregeln hintanhalten.

Es sind wohl in dieser Beziehung die Schwierigkeiten nicht zu übe welche das Silber als Verkehrsvaluta im Weltmarkte heraufzubeschwören geeig jedoch können wir uns der Meinung nicht verschliessen, dass ein kleineres einem grossen, als welches der Courssturz des Silbers im Allgemeinen ang werden muss, immer vorzuziehen ist, insbesondere als diese Schwierigkeiten Massregeln, wie die oben in Bezug auf die Begrenzung des allzugrossen Silberver angedeuteten, nach Bedarf hintangehalten werden können. Unterschätze man ja die Leichtigkeit, mit welcher die obige Massnahme gegenüber anderen Vorkehr wie selbe zur Verwirklichung der Mehrverwendung des Silbers vorgeschlagen w zur Durchführung gelangen könnten. Man weiss zur Genüge, dass die Durchfü einer vollständigen Doppelwährung am europäischen Continente allein schon Ang der herrschenden Umstände auf unüberwindliche Hindernisse stösst und alle a Auskunfsmittel unzureichend sind, um Verlegenheiten, welche den heutigen markt nicht zur Ruhe kommen lassen, mit Erfolg zu beheben.

Wohl dürfte es vom Standpunkte so manchen Währungspolitikers mit denj Principien, welche den bisherigen Valutaverhältnissen zu Grunde liegen, nicht einstimmen, wenn ohne Hintansetzung der einzelnen, den verschiedenen Staaten zu nennenden, verschiedenartigen Währungen eine gemeinschaftliche Sonderwä platzgreifen sollte. Ob England, welches mit seiner totalen Goldwährung und in Bezug des Werthverhältnisses der beiden Edelmetalle neben anderen Staaten lich isolirt dasteht, sich herbeilassen wird, seine phlegmatische Behandlung Frage aufzugeben und mit in den Reigen einstimmen, um Zuständen, die i heutigen Valutaverhältnissen herrschen, ein Ende zu machen, ist eine andere und dürfte dieselbe erst beantwortet werden können, wenn der amerikanische We cours so weit sinkt, dass auch eine Disconterhöhung der Englischen Bank mehr nützt, um dem Abströmen englischen Goldes über den Ocean Einhalt zu

[illegible]athematische Limitirung der Feuerversicherungsprämie.

I.

[illegible]ie Feuerversicherung entbehrt bekanntlich jeglicher mathematischer Grund- indem die Prämienbestimmung auf vagen Erfahrungsgrundsätzen aufgebaut blos eine approximative Schätzung des Risicos zulassen. Durch die immer teigende Concurrenz in diesem Geschäftszweig sind die Prämiensätze so tief edrückt worden, dass man mit desto grösserer Vorsicht das Risico prüfen um eine demselben entsprechende Prämie taxiren zu können. Solange nämlich ämien eine gewisse Dehnbarkeit innewohnte, das heisst solange dieselben einen sico annähernd entsprechenden, doch in allen Fällen Sicherheit bietenden Werth ntirten, konnte man sich den Luxus einer approximativen Schätzung erlauben; ist die Grenze zwischen Verlust und Gewinn eine ungemein nahe, der Spiel- ein zu kleiner, als dass man nicht mit penibelster Genauigkeit das Für und erwägen sollte, welches das Risico eines eventuellen Schadens bezeichnet.

[illegible]er österreichisch-ungarische Fabriken-Versicherungen-Theilungs-Vertrag (Con- ist zwar für die gute Prämie von sehr wohlthätigen Folgen, da er über den ichen Vertragszweck hinaus die Interessen-Gemeinschaftlichkeit der jeweiligen erungsgebiete vertritt, doch bedarf es keines Commentars, um die Schwierig- darzulegen, mit denen derselbe angesichts der fremden Concurrenz zu kämpfen enn er die spontan herabgesetzten Prämien auf das richtige Niveau zu bringen ist.

[illegible]enn die übrigen Feuerversicherungs-Kategorien durch die exorbitanten e von Stufe zu Stufe sinken, so kann man es als blosses Verdienst des Con- hinstellen, dass das Fabrikrisico in einer demselben halbwegs entsprechenden sich noch leidlich gut erhält. Die Concordats-Gesellschaften kommen den iellen thunlichst entgegen, die Concessionen an die Versicherten erfolgen mit nung sämmtlicher Vertragsanstalten, so dass nicht das specielle Interesse ompagnie entscheidet, sondern die als berechtigt anerkannten Forderungen des ums und der Versicherer in Betracht gezogen werden.

[illegible]nfolge dessen beginnen es die Industriellen ihrerseits anzuerkennen, dass die chisch-ungarischen Gesellschaften, welche das Concordat vereinigt, ihren n alle mit der eigenen Sicherheit und der Solidität des Geschäftsbetriebes ereinbarenden Begünstigungen einräumen und mit geradezu unerreichbarer theit und Coulanz ihre Verpflichtungen erfüllen, wesshalb auch die Anstren- der fremden Concurrenz immer müssigere und nutzlosere werden. Das , welches in die Fabriks-Versicherung gebracht wurde, wird durch den Erfolg t; es scheint daher, dass die planlose, ohne jede Grundlage bestehende macherei der Grund dieses Niederganges der übrigen Feuerversicherungs- orien ist.

Als in Oesterreich vor vielen Jahren das Feuerversicherungsgeschäft z
führung gelangte, fehlte es an jeglichem statistischen Materiale, auf Grund
man die Prämien entsprechend den verschiedenen Risken ermitteln hätte
Man behalf sich so gut es eben ging mit den Erfahrungen der in anderen
operirenden Anstalten und suchte die einem grundverschiedenen Risico entspre
Prämien dem hiesigen Geschäfte anzupassen. Welches Lehrgeld die da
Anstalten zahlen mussten, bevor sie den aus der unzureichenden unge
Prämie entspringenden Verlusten halbwegs steuern konnten, das lehrt
Geschichte des österreichischen Feuerversicherungsgeschäftes. Nachdem n
genügende statistische Daten vorliegen, um mit Erfolg in das allgemeine
versicherungsgeschäft ein System hineinzubringen, insbesondere, als schon
Fabriksrisico erfolgreich begonnen wurde, so mögen folgende Auseinanderse
als Versuch einer ersten Etappe auf diesem Gebiete gelten.

Bei der Beurtheilung eines Risicos ist das Erwägen der einzelnen M
in Betracht zu ziehen, welche 1. die Gefahr einer eventuellen Feuersbrunst
lichen, 2. die Verbreitung derselben entweder direct oder indirect begünstig
3. das Risico durch Vertragsbedingungen steigern.

Jeder dieser drei Punkte entspricht daher einer gewissen Anzahl von Mo
welche von einander theils oder gänzlich verschieden, mehr oder weniger
Eigenthümlichkeit ihres bezüglichen Punktes zur Wirkung gelangen können
Wahrscheinlichkeit mag nun die massgebende bei der Gradbemessung de
Momenten entspringenden Gefahr sein und können dieselben daher mit
gewissen Gefahrsäquivalenten gleichgestellt werden, die bei Zugrundelegu
Normalrisicos uns ein vergleichendes Bild der Risiken im Allgemeinen zu
im Stande sind.

Sämmtliche einem bestimmten Risico anhaftende Gefahrmomente werde
die Summe der Gefahräquivalente, also eine Zahl liefern. In dem Moment
wo wir Risiken mit Zahlen messen können, ist schon die Grundbedingun
mathematischen Ermittlung der Prämie gegeben.

Bezeichnen wir daher die Anzahl der Gefahrmomente mit dem Buchst
die demselben entsprechenden Gefahräquivalenten mit v_1, v_2, v_3 . . ., also al
mit v und die dem Normalrisico entsprechende Prämie, welche schon in den
mungen des Fabriken-Versicherungen-Theilungs-Vertrages als Grundprämie ei
ist, mit dem Buchstaben g, so ergeben sich folgende Relationen:

Die Grösse eines Gefahräquivalenten ist von dem ihm entsprechenden
moment abhängig; wenn daher den Momenten

M_1 , M_2 , M_3 , M_4 . . . die Gefahräqu
v_1 , v_2 , v_3 , v_4 . . . entsprechen, s

dies die Formel

$$nM = \Sigma(v) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \ldots = s, \tag{1}$$

worin s die Summe der Gefahräquivalenten in Einheiten ausgedrückt be
Jeder Aequivalent wird daher in einer Zahl, welche die Höhe der Gefahr de

mentes proportional ausdrückt, zur Geltung gelangen. Die Bestimmung
en ist die schwierigste Partie dieses Systems, da von der richtigen Beur-
ler jeweiligen Gefahrmomente die Verwendbarkeit desselben abhängt, und
r später auf dieselbe zurückkommen. Bezeichnen wir nun die gesuchte
issen Risico entsprechende Prämie mit dem Buchstaben p zum Unter-
n der Grundprämie g, so wird durch folgende Relation der Gefahreffect ε
kt

$$\varepsilon = \frac{p}{g} - 1$$

statistischen Untersuchungen ergeben sich bei successiver Zunahme der
nente, beziehungsweise ihrer Aequivalentensummen, wenn wir dieselben als
eines Coordinatensystems betrachten, die Gefahreffecte als Ordinaten dieses
wobei die entsprechende Linie eine logarithmische ist. Die Formel für die-
llgemein durch den Ausdruck

$$\varepsilon = \frac{M_0}{n_0} lg \frac{n_0 M_0 - (n_0 - 1)}{n_0 (n_0 - 1)} \quad \text{dargestellt}$$

ren Schnitt mit der x Axe in dem Punkte n_0 verstanden, in welchem
effect der Grundprämie entspricht, d. h. n_0 bezeichnet die Anzahl der der
nie entsprechenden Gefahrmomente, in welchem der Effect gleich 0 wird.
ist der Gefahrmoment, welcher sich aus dem Verhältniss einer Anzahl
ivalenten zu der der Grundprämie entsprechenden Anzahl von Gefahr-
n_0 ergibt, mehr die Gefahrconstante 1. Der Gleichung (1) gemäss ist der
Gefahrmoment durch

$$M = \frac{s}{n} = \frac{\Sigma\ (v)}{n}$$

t. Dem Gesagten zufolge erhalten wir dagegen

$$M_0 = \frac{s}{n_0} + 1.$$

vollzogener Substitution erhalten wir aus der Gleichung 3) die Form

$$\varepsilon = \frac{s + n_0}{n_0^2} lg \frac{s + 1}{n_0 (n_0 - 1)}$$

sslich dies mit der Gleichung (2) in Verbindung gebracht, liefert die
chung für die Prämie

$$\frac{p}{g} - 1 = \frac{s + n_0}{n_0^2} lg \frac{s + 1}{n_0 (n_0 - 1)} \quad \text{und}$$

$$p = g \left(1 + \frac{s + n_0}{n_0^2} lg \frac{s + 1}{n_0 (n_0 - 1)} \right)$$

Ist daher z. B. die Anzahl der Gefahrmomente desjenigen Risicos, für die volle Grundprämie ohne Rabattnachlass gilt, $n_0 = 3$, so erhalten wir die

$$7) \qquad p = g\left(1 + \frac{s+3}{9} \, lg \, \frac{s+1}{6}\right)$$

Die Summe der Gefahräquivalente bei Giltigkeit der vollen Grundprän daher $s = 5$, für welchen Fall $p = g$ wird; bei grösserer oder geringerer der Gefahräquivalenten gestaltet sich die Prämie nach der Formel (7) in fol Weise:

Gefahr-Aequivalenten Summe s	Rabatt oder Zuschlag zur Grundprämie $g = 3·5‰$	Effective Prämie p
0	— 26%	2·60‰
1	— 21 2%	2 76‰
2	— 16·7%	2 92‰
3	— 11·7%	3 09‰
4	— 6·16%	3·28‰
5	0	3 50‰ = g
6	+ 6·7	3·73‰
7	+ 13 88%	3 99‰
8	+ 19·36%	4·18‰
9	+ 29·58%	4·54‰
10	+ 38·— %	4·83‰
u s w.	u s. w.	u. s w.

Es ist daher nur nothwendig, die verschiedenen Gefahrmomente mit dei sprechenden Aequivalenten zu versehen, um auf mathematischem Wege die erlangen zu können.

Nachdem dieser bahnbrechenden Idee in kurzen Zügen Raum gegeben ist noch hervorzuheben, dass die unserer Rechnung zugrunde liegenden M vielen mit grosser Umsicht gesammelten statistischen Daten entsprechen, aus vergleichenden Scala der Gefahrmomente und der aus den wirklichen Brands sich ergebenden Gefahräquivalente, beziehungsweise dem entsprechenden jew Gefahreffect die Steigung des Risicos analytisch dargestellt ist. Die Art und wie sich die der successiven Steigerung der Gefahreffecte entsprechenden Pr resultate dem Fachkundigen präsentiren, deuten auf eine gut durchdachte und erwogene Untersuchung der für diese Aufgabe wichtigen Voraussetzungen hin.

Dr. Ludwig Grossmann's

Mathematische Limitirung der Feuer-Versicherungs-Prämie.

II.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema haben wir die mathematischen damente zur Berechnung der Feuer-Versicherungs-Prämie mit Rücksicht auf die jeweilige Risico begründenden Gefahrmomente festgestellt. Dieselben wurden Ausgangspunkte eines Systems benützt, welches den Zweck hat, durch Summung der den Gefahrmomenten entsprechenden Gefahr-Aequivalente oder Gefahrhältnisszahlen, die Risico-Beschaffenheit oder mit anderen Worten den Gefahrt zu ermitteln. Es fragt sich nun, auf welche Weise ist es möglich, diese fahr-Aequivalente, welche doch nur mit Hilfe langjährig gesammelter Erfahrungsndsätze annäherungsweise auf dem Wege der Vergleichungs-Methode erreicht den können, mit einer den mathematischen Principien halbwegs entsprechenden auigkeit zu bestimmen.

Diese Frage dürfte sich, wenn wir den nachfolgenden Auseinandersetzungen gen, von selbst beantworten.

Wir müssen hier zum Zwecke der eingehenden Erörterungen auf eine in der handlung I aufgestellte Classification der bei Beurtheilung eines Risico in Betracht ziehenden Momente zurückgreifen; dieselben sind solche, welche 1. die Gefahr er eventuellen Feuersbrunst ermöglichen, 2. die Verbreitung derselben entweder ct oder indirect begünstigen und 3. das Risico durch Vertrags-Bedingungen gern.

Die in Punkt 1 enthaltenen Gefahrmomente sind folgender Art:

Gefahren in Bezug auf: *a*) vorsätzliche Brandstiftung, *b*) Heizungs- und erungs-Einrichtungen, *c*) Beleuchtungs-Einrichtungen, *d*) das Rauchen, *e*) Abfälle, Selbst-Entzündung, *g*) Explosion, *h*) Blitzschlag, *i*) Ansteckung von Seite fremder höfte.

Die ad *b* bis *h* genannten Gefahren würde man füglich unter fahrlässige Brandtung zusammenfassen können, da aus den betreffenden Umständen ohne irgend Fahrlässigkeit directe oder indirecte (Begehung vorschriftswidriger Handlungen r Unterlassung der nöthigen Vorsichts-Massregeln) schwerlich ein Unfall entstehen d. Selbst der durch Blitzschlag verursachte Schaden lässt sich gewissermassen auf hlässigkeit zurückführen, indem die Anbringung eines Blitzableiters unterlassen rden ist.

Je nachdem nun die zur Verhütung oder Beseitigung der Gefahr dienlichen richtungen mit Rücksicht auf die Betriebe, bei denen der fragliche Punkt besonders Gewicht fällt, mehr oder weniger in Anschlag gegenüber der Gefahr zu bringen d, wird auch das Gefahr-Aequivalent eines jeden einzelnen Momentes in Rechnung racht werden müssen.

Die in Punkt 2 enthaltenen Gefahrmomente sind:

a) Schlechte oder minder gute Bauart — (weiche Dachung, ungeflötzte Dachlen);

b) geringe oder gar nicht vorhandene Isolirung der Einzelngebäude (insbeson-
der mit feuergefährlichen Substanzen und Vorräthen gefüllten);

c) ungenügende Löschanstalten;

d) kein in der Nähe des Objectes sich befindlicher Wasservorrath;

e) geringer Schutz der Einzel-Gebäude durch den Mangel an Feuermauern.

Die in Punkt 3 enthaltenen Gefahrmomente sind:

a) Wenn von einem massiv hergestellten, hart gedeckten Gebäude nur d-
jenigen „Theile ohne Mauern" oder das Dach allein zur Versicherung beantr-
werden;

b) wenn der Bauwerth eines hart gedeckten Gebäudes, dessen Unterbau jed-
aus gemischtem Materiale oder aus Holz construirt ist, beantragt wird;

c) wenn nur das harte Dach oder dieses nebst allen Theilen des Unterba-
ohne Mauern eines aus gemischtem Materiale oder aus Holz errichteten Gebäu-
beantragt wird;

d) wenn der Inhalt (Maschinen, Vorräthe, Utensilien und dergl.) eines mas-
gebauten, aber mit weicher oder gemischter Dachung versehenen Gebäudes v-
sichert wird;

e) wenn der Inhalt eines aus gemischtem Materiale oder aus Holz erbau-
Gebäudes zur Versicherung gelangt.

Je nach der Intensität der jeweiligen Gefahr, die dem betreffenden Mome-
entspricht, wird das Gefahr-Aequivalent ein grösseres oder kleineres sein und k-
die Abschätzung desselben zwar theoretisch classificirt, jedoch im eigentlichen Si-
blos auf Grund des Gutachtens praktisch gehandhabt werden.

Dies in Betracht gezogen, lässt sich unsere Aufgabe dahin feststellen, dass je-
Gefahrmomente ein gewisses Maximal- und Minimal-Aequivalent entspricht, -
zwischen diesen beiden sich der Spielraum des praktischen Gutachtens bew-
welchem gemäss dann die Fixirung des eigentlichen in Rechnung zu bringen-
Gefahr-Aequivalenten vor sich geht, wobei die jeweiligen Umstände, bei welchen -
oder das andere Moment in Betracht kommt, massgebend sind.

Auf dieser Grundlage fussend, wollen wir die mathematischen Auseinand-
setzungen aus der Abhandlung I fortsetzen und seien zu diesem Behufe die bekann-
Formen (2) und (5) in Betracht gezogen;

$$\varepsilon = \frac{p}{g} - 1 = \frac{s + n_0}{n_0^2}\, lg\, \frac{s + 1}{n_0\,(n_0 - 1)}$$

die fragliche Prämie wird daher mit Rücksicht auf die Grundprämie folgender Fo-
entsprechen

$$p = g\,(1 + \frac{s + n_0}{n_0^2}\, lg\, \frac{s + 1}{n_0\,(n_0 - 1)})$$

worin g und n_0 willkürliche, jedoch von einander in gewisser Beziehung abhäng-
Constanten sind. Bekanntlich tritt beim Fabriken-Risico nach den Stipulationen -
Fabriken - Versicherungen - Theilungs - Vertrages erst mit dem vorhandenen drit-
Gefahr-Momente die volle Grundprämie in Action; dagegen ist hier die Minim-
prämie für Nebengebäude 1½‰ massgebend. Beim gewöhnlichen Gebäude - Ri-
kann daher als Grundprämie 1½‰ angenommen werden, welches erst beim V-

sein zweier Gefahr-Momente in Kraft tritt. Nun wird aber beim Gebäude s höchste Risico, das ist die Classe V, eine Prämie von 5‰ bestimmt, wobeim Fabriken-Risico dieselbe sogar 12½‰ erreicht.

Wir sehen daraus, dass sich die Grundprämien der beiden Risiken beiläufig so nander verhalten, wie die beziehungsweisen Maximalprämien.

Ziehen wir dieses in Betracht, so finden wir, da der Wachsthum der Prämie der Gefahräquivalenten-Summe im geraden Verhältnisse sich befindet, dass ein hräquivalent nicht nur von der Intensität des Gefahr-Momentes, sondern auch der Höhe der jeweiligen Grundprämie abhängt.

Die Gefahräquivalente werden daher percentual mit der Grundprämie bestimmt den müssen.

Wir wollen nun untersuchen, welcher Gefahr-Moment dem besten Gebäudeico individuell anhaftet, wobei selbstverständlich die Gefahrconstante 1 inclusive n Ausdrucke kommt.

Für den Effect $\varepsilon = 0$ wird offenbar

$$\frac{s + n_0}{n_0^2} \, lg \, \frac{s + 1}{n_0 \, (n_0 - 1)} = 0$$

n müssen und daher die für diesen Fall einzig mögliche Bedingung

$$s = n_0 \, (n_0 - 1) - 1$$

d hierin nun die Summe der Gefahräquivalente $s = 0$ gesetzt, liefert für n_0 folden Werth

$$n_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{\cdot}618$$

n durch die weiteren nebst der Gefahrconstante 1 sich ergebenden 0·618 Gefahrmente das, den unglücklichen Zufällen entsprechende Risico, also diejenige Gefahr n Ausdrucke kommt, die ohne Hinzuthun irgend welcher anderweitiger Gefahrmente sich ergibt.

Wenn wir nun die zu 2 Gefahr-Momenten fehlenden 0·382 als Spielraum bis m Inkrafttreten der vollen Grundprämie $g_1 = 1\frac{1}{2}$‰ betrachten, so erhalten wir r Gebäude-Risico den Werth $n_0 = 2$

Wir erhalten daher für Fabriksrisico die Formel der Prämie

$$a) \qquad p = 3{\cdot}5 \left(1 + \frac{s + 3}{9} \, lg \, \frac{s + 1}{6}\right)$$

d für einfaches Gebäuderisico

$$b) \qquad p = 1{\cdot}5 \left(1 + \frac{s + 2}{4} \, lg \, \frac{s + 1}{2}\right)$$

s allgemein giltig.

Das Gefahr-Aequivalent v wird ferner als Product einer gewissen Grösse σ d der jeweiligen Grundprämie behandelt werden müssen, d. i.

$$v = g \, . \, \sigma$$

bei σ einen positiven echten Bruch bedeutet, dessen Maximum also die Zahl 1 . Ein Gefahr-Aequivalent wird daher nie grösser als die entsprechende Grundprämie n können.

Das Minimum des Factors σ bei Fabriksrisico und Gebäuderisico, v
jedes sich anders gestaltet, erhalten wir, wenn wir in beiden Formen den W
Gefahr-Aequivalenten-Summe für den Fall bestimmen, als die Prämie mit de
prämie übereinstimmt, und dieselbe sodann mit dem Product der der Gru
entsprechenden Gefahrmomente n_0 und der Grundprämie selbst dividiren, d.

$$v_0 = \frac{s}{n_0} \text{ und } \sigma = \frac{v_0}{g}$$

Da nun beim Fabrikenrisico $n_0 = 3$ und für diesen Specialfall $s = 5$
erhalten wir für σ den Minimalwerth $^{10}/_{21}$; beim Gebäuderisico dage
$n_0 = 2$ und für diesen Specialfall $s = 1$ ist, ergibt sich als Minimalwerth
somit wird sich beim Fabriksrisico der Gefahr-Aequivalenten-Factor σ zwisc
und 1, beim Gebäuderisico zwischen $^1/_3$ und 1 bewegen, welche Intervalle
Fall einer weiteren Ausarbeitung je in drei Theile getheilt, und je nach der
intensität durch Zuschlag von 1, 2 und 3 dieser Theile zum beziehungsweis
mum, eine I., II. und III. Classe des dem Gefahrmomente entsprechenden
äquivalenten-Factors σ bilden können.

Da nun aber das eigentliche Gefahr-Aequivalent $v = g\sigma$ ist, so wird
Wirklichkeit der Werth desselben beim Fabrikenrisico zwischen $1^2/_3$ und 3
Gebäuderisico zwischen $^1/_2$ und $1^1/_2$ bewegen.

Zur besseren Erläuterung sei hier folgendes Beispiel angeführt:

Es sei ein aus gemischtem Materiale gebautes einstöckiges Gebäude m
Dachung und Feuermauern versehen, jedoch auf beiden Seiten an mit
Dachung versehene Nachbarhäuser hart anstossend, zu versichern. Der Bo
des zu versichernden Gebäudes ist zwar geflötzt, jedoch sind die Stiegen von
Parterre-Innenräume nur zum Theile gewölbt. Im Hause und in der Nachbarsc
kein feuergefährliches Gewerbe betrieben. Es sind zwar genügende communal
anstalten in der Nähe, jedoch ist Wasservorrath ziemlich entfernt. Die Vers
wird mit vollem Bauwerth beantragt.

Wie ersichtlich, kommen hier fünf verschiedene Gefahrmomente in
die wir ihrer approximativen Intensität gemäss der Reihe nach mit den
äquivalenten-Factoren $\sigma = {}^1/_2,\ 1,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3$ und 1 versehen

Demgemäss erhalten wir nach der Gebäudeversicherungs - Formel b)
Resultat;

Die Summe der Gefahräquivalenten-Factoren ist $3^1/_6$, demnach die Su
Gefahräquivalenten

$$s = 3^1/_6 \cdot g = 4{\cdot}75$$

somit

$$p = 1{\cdot}5 \left(1 + \frac{4{\cdot}75 + 2}{4}\, lg\, \frac{4{\cdot}75 + 1}{2}\right) = 2{\cdot}66\text{‰}$$

als Resultat.

Für verschiedene Aequivalenten-Summen könnten eigene Tabellen angel
den, aus denen sofort die entsprechende Prämie ersichtlich wäre, welche de
geschätzten Risico vollends entsprechen würde.

natische Reflexionen über den Boden- und Hypothekar-Credit.

I.

: jeher war die Boden- und Hypothekar-Anlage von Capitalien als anerkannt eichnet worden und dies nicht mit Unrecht, weil alle anderen Anlagen in der Verzinsung nicht rentabel genug erscheinen, oder falls dieselben in ten oder anderen von verschiedenen äusseren Einwirkungen abhängigen ver- Anlagewerthen bestehen, oft unter den empfindlichsten Coursschwankungen haben und endlich, falls allen anderen Anforderungen entsprochen wird, es ndererseits an der genügenden Sicherheit der investirten Anlage-Capitalien oder besser gesagt, dieselben nicht genug verbürgt erscheinen. Demzufolge nes der wichtigsten nationalökonomischen Momente, dass die Fructificirung en- und Hypothekar-Ertrag nach allen Richtungen hin den Anforderungen ites entspricht, vorausgesetzt, dass der letztere sich in denjenigen Grenzen um die gute Anlage des betreffenden Capitales auch dann zu rechtfertigen, e Annuitäten und Zinsen desselben im Falle eines zeitweiligen minder guten mehreremale im Rückstand geblieben sind. In diesem Falle muss schon in hätzung des zu gewährenden Credi es eine solche Eventualiät in Betracht werden, damit im eingetretenen Falle der Gläubiger nicht vor die Alternative wird, entweder rasch abzuwickeln oder über das Niveau des angemessenen hinauszugehen, eventuell einen empfindlichen Verlust zu erleiden. Im Falle r Gläubiger auch Gelegenheit hat, die Abwickelung rasch durchzuführen, schon das Freiwerden eines gut und auf lange Dauer sich verzinsenden s in den meisten Fällen einen Schaden, insbesondere wenn nicht genügende heit geboten ist, dasselbe unter gleich günstigen Bedingungen oder in ähnlicher nterzubringen.

enn wir nun fortfahren, die weiteren Punkte in Erwägung zu ziehen, die inder rigorosen Abschätzung eines zu gewährenden Credites sich zugesellen so finden wir, dass durch Ueberschwemmungen, vertheuerte Arbeitskraft, e Bewirthschaftung, minder rationelle Bebauung des Bodens oder absichtlich sige Ausbeutung desselben, der Ertragswerth des belehnten Objectes bedeutend etzt, in beiden letzten Fällen sogar oft auf mehrere Jahre ganz entwerthet kann, indem der so erschöpfte Boden brach gehalten werden muss, um sich zu erholen. Wir sehen freilich hier von den in Pacht gegebenen Gütern ganz n Ertrag an und für sich schon ein fixer und den zahlenden Tilgungsquoten sener ist, und bei welchen das Risico der schlechten Jahre auf den Pächter zt wird. Hier ist jedoch die Gefahr der absichtlichen übermässigen Aus- und der hieraus resultirenden Entwerthung des Bodens doppelt in Anschlag gen, weil oft der Pächter nach mehreren ungünstigen Jahren durch Manipu- genannter Art im letzten Jahre seines Contractes sich den bereits erlittenen so gut es geht hereinzubringen sucht. Es ist dann die Möglichkeit nicht lossen, dass die zur Tilgung des entlehnten Capitales nöthige Tilgungsquote

dasjenige Verhältniss übersteigt, in welchem sie sich zum jährlichen Durchsch
Erträgniss befinden sollte.

Ein solcher Fall muss unter allen Bedingungen vermieden werden, da hie
dem Credite das entsprechende Werthniveau entzogen wird.

Es muss aber auch im umgekehrten Sinne das Interesse des Darlehens
insofern gewahrt werden, dass derselbe sein Capital in möglichst ausgede
Maasse zu investiren in der Lage ist, wobei jedoch in keiner Weise die Sich
desselben beeinträchtigt werden darf, d. h. es soll die äusserste Grenze des Darle
werthes ermittelt werden, welchem eine allfällige Sicherheit zugemuthet werden
da in einem Falle, wo bei ausreichender Sicherheit für ein grösseres Darlehen
kleineres geboten wird, in der diesbezüglichen Differenz der beiden, eine gute Cap
anlage freiwillig und unnützerweise ausgeschlagen wird. Bedenken wir nur, das
dem von Jahr zu Jahr immer mehr sinkenden Zinsfusse es jedem Darlehens
darum zu thun sein muss, sein Capital sicher und mit einem wohl entsprech
Zinsfusse zu investiren; somit läge hierin eine Verschwendung der guten A
wenn man einen Bodencredit nicht bis zur äussersten Grenze seiner Bonit
währen sollte.

Dies zur Grundlage genommen, tritt an uns die Frage heran, auf welche
es möglich ist, einem Bodencredite im ausgedehntestem Masse zu entsprechen
die Grenzen der Bonität zu überschreiten.

Die allgemein bei Credit - Instituten usuelle Art der Credit - Gewährung
auf folgende Weise statt:

An den Ort des zu belehnenden Objectes wird eine Schätzungs - Com
entsendet, welche den nach den örtlichen Verhältnissen zulässigen Werth de
parcellenweise, und zwar Felder, Waldungen, Weideplätze, Baulichkeiten u
gesondert abschätzt, woraus sodann der Vollwerth des Objectes ermittelt wird

Zwischen einem Drittel und der Hälfte des Vollwerthes schwankt soda
Capital, mit welchem das Darlehensobject belehnt wird.

Die Communicationen, wie gut gebaute Strassen, in der Nähe sich bef
Eisenbahnen und grössere Städte, leicht zu bewerkstelligender und billiger Tr
der Fechsung nach grossen Marktplätzen, und schliesslich genügende und
Arbeitskraft sind für das Verhältniss des Darlehens zum Vollwerthe massgeb

Was nun den Zinsfuss anbelangt, so schwankt derselbe zwischen 5, 5
6 Percent und wird allgemein die jährliche Annuitätenquote in der Weise
setzt, dass die jährlichen Zinsen sammt Tilgungsquote nebst eines kleinen Zus
dieselbe repräsentiren.

Die Tilgungsdauer schliesslich schwankt zwischen 30 und 40 Jahren.

Es fragt sich nun, wie es möglich ist, dass ein einziges Bodencredit - I
oft viele Millionen Gulden auf lange Jahre hinaus investiren kann, wobei das
Capital desselben vielleicht nur den zwanzigsten oder dreissigsten Theil des
stirten repräsentirt.

Die Antwort hierauf ist sehr naheliegend. Ein Bodencredit - Institut
wissermassen die berufene Vermittlungsstelle zwischen dem Capitalisten un

werber, in sich selbst sowohl dem ersteren als auch dem letzteren gegen-
unumschränkteste Garantie bietend. So viel nämlich ein Bodencredit-Institut
lien investirt hat, so viel ist es ermächtigt, an Bodencredit-Pfandbriefen
eben, deren Verzinsung sich um 1 Percent niedriger als die des investirten
stellt. So viel nun jährlich an Annuitäten des investirten Capitales der
ufliesst, d. h. um wie viel sich das Darlehens-Capital vermindert, in dem
rd durch Verlosung der Bodencredit-Pfandbriefe das durch dieselben be-
'apital wieder rückgezahlt.

it gestaltet sich das Geschäft eines Bodencredit-Institutes in folgender Weise:
sei A ein auf eine Hypothek investirtes Capital, welches mit dem Zins-
lurch die jährliche Annuitätenrate R in n Jahren getilgt werden soll, wir
demnach die daselbst giltige Formel*)

$$A\left(1+\frac{P}{100}\right)^n-\frac{R\left[\left(1+\frac{P}{100}\right)^n-1\right]}{\frac{P}{100}}=0$$

nun der Zinsfuss, mit welchem die Anstalt die Hypothekar- und Boden-
andbriefe verzinst $P-1$ ist, so erhalten wir, falls wir die Annahme stellen
dass dieselbe Annuitätenquote, die der Hypothekar-Schuldner jährlich an die
zahlt, von derselben wieder vollständig zur Tilgung der Pfandbriefe verwendet
chfolgende Relation

$$A\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^n-\frac{R\left[\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^n-1\right]}{\frac{P-1}{100}}=-K$$

ts anderes bedeuten kann, als dass um den Werth K in n Jahren mehr an
ten bezahlt wurde, als für das zu tilgende Capital A erforderlich gewesen
der besser gesagt, die Annuität R, welche beim Zinsfusse P gerade hinge-
at, um in n Jahren das Capital A zu tilgen, wird bei einem Zinsfusse von
in derselben Dauer ein viel grösseres Capital zu tilgen im Stande sein.

ll daher $K=0$ werden, so wird offenbar A in A_1 übergehen müssen und
nel sich folgendermassen gestalten

$$A_1\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^n-\frac{R\left[\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^n-1\right]}{\frac{P-1}{100}}=0$$

Falle der Beibehaltung des ursprünglichen Capitales A wird die Tilgungs-
ine kürzere werden, demgemäss die Formel

$$A\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^{n-\lambda}-\frac{R\left[\left(1+\frac{P-1}{100}\right)^{n-\lambda}-1\right]}{\frac{P-1}{100}}=0$$

Wir benützen hier anstatt des zumeist angewendeten p für $\frac{P}{100}$ dasselbe in der letzteren
il es hier der Rechnung besser entspricht.

und hieraus

$$5) \qquad n - \lambda = \frac{lg\ \frac{100\,R}{P-1} - lg\left(\frac{100\,R}{P-1} - A\right)}{lg\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)}$$

λ ist daher diejenige Dauer, durch welche, nach bereits vollständiger der dem entlehnten Capitale entsprechenden Anzahl von Hypothekar- oder credit-Pfandbriefen, noch weiter die Annuitätenquote der Anstalt zufliesst; kann daher als der eigentliche Nutzen der Anstalt angesehen werden, welc n — λ Jahren in Jahresquoten flüssig wird und nach n Jahren aufhört.

Um daher den jeweiligen Barwerth dieses Nutzens zur Zeit des Ab eines Creditgeschäftes zu erhalten, werden wir die Formel

$$6) \qquad K = \frac{R\left[\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^{\lambda} - 1\right]}{\frac{P-1}{100}\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^{n-1}}$$

zu Hilfe nehmen, welche Folgendes besagt: Welches Capital mus Zinsfusse $P - 1$ angelegt werden, um den Bezug einer schussweisen Jahresrente R, welche zum erstenmal $n - \lambda$ Jahren eingeht und durch λ Jahre fortlau sichern?

Offenbar kann hier nur der Zinsfuss $P - 1$ in Anwendung kommen, Anstalt ihre Hypothekar- und Bodencredit-Pfandbriefe ebenfalls mit demsel zinst, und man hier nur denjenigen Zinsfuss, den die Anstalt für die ihr fügung gestellten Capitalien selbst zahlt, als Grundlage annehmen kann.

Diesfalls sei folgendes Beispiel angeführt: Es seien Gulden 10 5½ Percent auf eine Hypothek auf 36 Jahre so angeleg mit einer jährlichen Annuitätenrate R innerhalb Dauer Capital sammt Zinsen getilgt werden. Die A gibt zu diesem Behufe für Gulden 100.000 Hypothekar- briefe, welche sie mit 4½ Percent verzinst, heraus. die Frage, welchen Barwerth repräsentirt der für d stalt successive bis zur vollständigen Tilgung sich bende Gewinn aus der Zinsendifferenz zur Zeit des Ges Abschlusses.

In diesem Falle wird die jährliche Annuitätenquote, in welcher sowo als auch Tilgungsquote enthalten ist, wobei die Zinsen von Jahr zu Jahr nehmen, die Tilgungsquote dagegen im Zunehmen sich befindet,

$$R = \text{fl. } 6436\ 60$$

sein und somit nach Formel (6), nachdem aus Formel (5) $\lambda = 8{\cdot}714$ ermitte

$$K = \text{fl. } 14.326{\cdot}85$$

als der zu bestimmende Barwerth des Gewinnes zur Zeit des Geschäftsab

Dr. Ludwig Grossmann's

athematische Reflexionen über den Boden- und Hypothekar-Credit.

II.

Der Barwerth des Gewinnes zur Zeit des Geschäfts-Abschlusses, wie wir ihn gestellt haben, könnte aber blos dann fructificirt werden, wenn einem solch' abschlossenen Geschäfte kein Risico anhaften würde, welches in erster Linie in einem ntuellen Verluste, hauptsächlich aber in einer etwaigen vorzeitigen Stornirung des schäftes beruht, in welch' letzterem Falle eine entsprechende Abschreibung von n in Aussicht genommenen Gewinne stattfinden müsste.

Bekanntlich ist der Gewinn im ersten Jahre der Tilgung der grösste und mmt von da an in der Weise ab, dass er im letzten Jahre der Tilgung beiläufig n sovielten Theil des im ersten Jahre flüssig werdenden Gewinnes repräsentirt, als jährliche Annuitätenquote im Darlehensbetrage enthalten ist.

Dies ist ein wesentlicher Factor, der uns die Handhabe zur Schaffung einer rlustreserve bietet, wenn wir den jährlichen Gewinn so in Rechnung stellen, dass selbe durch die ganze Tilgungsdauer gleich gross angenommen wird. Hiedurch ichen wir den Vortheil, dass die in den ersten Jahren erzielten Ueberschüsse derhand als Verlustreserve und im eingetretenen Falle zur Ergänzung der in teren Jahren immer mehr für den Durchschnittsgewinn unzureichender sich geltenden Gewinne verwendet werden können. Diese Combination gestaltet sich aber sonders vortheilhaft, wenn man bedenkt, dass das Risico in demselben Zeitpunkte, der wirkliche Gewinn den Durchschnittsgewinn zu erreichen aufhört, in demlben Verhältnisse abnimmt, als der Verlustreserve durch die, für den Durchschnittswinn nöthigen, immer grösser werdenden Ergänzungen an Capital entnommen wird, n dieselbe schliesslich mit der durchgeführten Tilgung, bei welcher das betreffende isico verschwindet, vollends aufzuzehren.

In der Abhandlung I haben wir bei einem Darlehenscapitale von 100.000 fl. $P = 5\frac{1}{2}$ Percent bei einer Tilgungsfrist von 36 Jahren, eine Tilgungsquote von . 6436·60 und als Barwerth des Gewinnes zur Zeit des Geschäfts-Abschlusses den etrag von

$$K = \text{fl. } 14.326{\cdot}85$$

mittelt.

Wenn wir nun denselben mit demjenigen Pfandbrief - Zinsfusse $P - 1 =$ $\frac{1}{2}$ Percent, mit welchem wir ihn discontirt haben, wieder aufzinsen und jährlich nen gleich grossen Betrag als Gewinn dermassen entnehmen, dass mit der vollgenen Tilgung des Darlehens auch zugleich der Barwerth des Gewinnes sammt nsen und Zinseszinsen aufgezehrt wird, so ist unserer Aufgabe in dieser Beziehung tsprochen.

Die Formel lautet nun folgendermassen: Der jährliche Durchschnitt

$$G = \frac{K\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^n \frac{P-1}{100}}{\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^n - 1}$$ und dem Be

gemäss $$G = \frac{14326{\cdot}85 \,.\, (1{\cdot}045)^{36} \,.\, 0{\cdot}045}{(1{\cdot}045)^{36} - 1}$$

d. i. Gulden 810·98. Diese Manipulation erscheint um desto praktischer bedenkt, dass Stornirungen während oder nach Ablauf der halben Tilgungsfrist kommen und daher zu einer Zeit, wo bereits schon eine Maximalreserve a ist, welche zwar nicht hinreicht, um den durch die stattgefundene Stornirun Durchschnittsgewinn für die noch fehlenden Jahre zu decken, jedoch den Zeitpunkte im nichteingetretenen Falle dieser Eventualität zu gewärtig lichen Gewinn aus den restlichen Tilgungsjahren sogar noch reichlich überst rationelle Vorgehen kann daher bei Aufstellung der Jahresbilanzen mit E des Ausweises des derzeitigen fructificirten Gewinnbarwerthes aus den spä mit Vortheil in Anwendung gebracht werden. Natürlicherweise können als nur diejenigen Beträge betrachtet werden, welche für das betreffende Jah schnittsgewinn entfallen.

Der Barwerth des Gewinnes zur Zeit des Geschäfts-Abschlusses ist dal stab der Prosperität der abgeschlossenen Geschäfte anzusehen und wäch Darlehensbetrag im geraden Verhältnisse. Es muss daher einer jeden (darum zu thun sein, das grösstmögliche Capital in Hypothekar- und Bo investiren, ohne jedoch die Sicherheit desselben zu gefährden. Aber auch auf die Tilgungsfrist muss eine gewisse Grenze eingehalten werden, da be mässigen Hinausschiebung der Tilgungszeit, die in den letzten Jahren blos zur Tilgung des Capitals dienende Annuitätenquote, an Zinsengew Anstalt so wenig abwirft, dass der letztere durch seine Discontirung auf Geschäfts-Abschlusses nahezu verschwindet, so dass dasselbe von dem z Risico überboten wird.

Mit Hilfe obiger Massnahmen ist es jedoch möglich, dieses Risico einzuschränken, dass auch ein Hinausschieben der Tilgungsfrist auf eine späteren Zeitpunkt einer Anstalt nur Nutzen bringen kann, insbesonder einen solchen Fall auch eine Reserve für eventuelle Darlehenstheilverlust werden würde.

Bei einer längeren Tilgungsdauer kommt hauptsächlich diejenige Ri in Betracht, die aus den möglichen volkswirthschaftlichen Umwälzunge und deren Wahrscheinlichkeit mit der Tilgungsdauer im geraden Verhält Wenn nun durch obige Combination der Gefahr von Verlusten insofern abgebrochen wird, dass auf dieselben die Darlehensdauer von verschwin fluss ist, so kann man daraus folgern, dass es einer jeden Boden- und credit-Anstalt darum zu thun sein wird, das ihr von den Pfandbrief Verfügung gestellte Capital so lange als möglich zu verzinsen, insbeso

längeren Tilgungsdauer blos die Amortisationsquote geringer wird, wogegen die ·, welche den eigentlichen Ertrag für die Anstalt bilden, durch längere Zeit fen. Man muss daher bei Berücksichtigung der genannten Factoren in der hst grössten Ausdehnung der Tilgungsfrist, die möglichst ausgiebigste Fructi- g der abgeschlossenen Geschäfte erblicken.

)ie obige Massnahme wird nämlich bei grösserer Ausdehnung der Tilgungsfrist, ine dem grösseren Risico entsprechende Verlustreserve involviren, welche sich auch ·htig ergeben muss, wenn wir in Betracht ziehen, dass auf die Amortisation ein ·rer Theil entfällt und daher durch eine längere Dauer ein grösseres Capital insen ist. Die Folge davon ist, dass der Gewinn für die Anstalt durch eine Dauer ein gleichmässiger, also für die Verlustreserve ein mehr ausgiebiger enbei aber durch die grössere Dauer eine längere Verzinsung und daher einen en Wachsthum erheischt.

ies in Betracht gezogen, lässt uns zu dem Schlusse gelangen, dass hier hauptsäch- Tilgungsquote massgebend sein dürfte, da bei begrenzter Zeitdauer und erhöhtem nsbetrag der Wachsthum derselben bis zu einer gewissen Grenze bedingt ist.

Was nun die Reserve für eventuelle Darlehens-Theilverluste anbelangt, so ist blos auf Grund statistischer Daten zu ermitteln. Da die Rigorosität, mit die Anstalten bei der Belehnung vorgehen, eine ungleichmässige ist, so müsste ch eine jede Anstalt aus ihrem eigenen statistischen Materiale die Erfahrungen ·, die zur Fixirung einer percentualen Reserve nothwendig sind. Aber auch er einer etwaigen Erstreckung des Zahlungstermines der jährlichen Annuitäten das Risico von Belang, so dass sich die Behauptung aufstellen lässt, dass blos er Bedingung, als allen Anforderungen der Vorsicht entsprochen wird, sich chschnitts-Percent auch für diese Reserve feststellen lässt, und zwar ist das- portional zur durchschnittlichen Tilgungsdauer der abgeschlossenen Geschäfte rd, wenn einmal festgesetzt, sehr geringen Veränderungen unterworfen sein, Risico der alten Geschäfte von Jahr zu Jahr mit der successiven Abzahlung lehens abnimmt, und somit der sich daraus ergebende Reserve-Ueberschuss neu abzuschliessenden Geschäfte zumeist hinreichen würde, um für dieselben hige frische Reserve zu bilden, von der Verzinsung des Reserve-Capitales ganz hen.

Nach statistischen Daten lässt sich die Darlehenstheil-Verlust-Reserve etwa mit für ein durchschnittliches Tilgungsjahr festsetzen, somit würde sich die ng folgendermassen gestalten:

Wie hoch stellt sich z. B. die Reserve für ein investirtes Capital von 20 Millionen, ie Anzahl der durchschnittlichen Tilgungsjahre 30 ist.

Nach obiger Feststellung wird sich für diesen speciellen Fall der Betrag von 00 als fixe Reserve ergeben.

n Folge dieser Ergebnisse würde sich nun der Netto-Barwerth des Gewinnes n späteren Tilgungsjahren zu einer beliebigen Zeit dermassen ergeben, dass eit berechnete gesammte Verlustreserve und überdies die Darlehenstheilverlust- von dem Brutto-Barwerthe in Abzug gebracht werden müsste.

Zur Ermittlung des eigentlichen Reingewinnes innerhalb eines Jahr
der Durchschnittsgewinn sämmtlicher investirten Capitalsposten mit Rück
ihre noch zu laufende Tilgungsdauer einzeln berechnet werden. Aus der
zwischen dem eigentlichen bis jetzt usuell gewesenen Jahres-Gewinnstpos
der Summe der wirklichen Gewinne und der Summe sämmtlicher Durc
gewinne würde sich die Verlustreserve ergeben.

Durch ein solch' rationelles Vorgehen ist eine Hypotheken- und Bod
Anstalt im Stande, sich die Gewinne für alle zukünftigen Jahre zu si
kann somit allen wirthschaftlichen Krisen mit Ruhe entgegensehen.

Zwar im geringen Masse, jedoch immerhin erwähnenswerth, wirkt de
auf den Barwerth des Gewinnes, und zwar merkwürdigerweise so, dass
Sinken des Zinsfusses das Barerträgniss steigt.

Folgende Vergleichszahlen zeigen obige Behauptung in ihren einzel
tionen.

100.000 fl. in 36 Jahren tilgbar, verzinst mit:

6 %: $\lambda = 9{\cdot}084$, $R = 6839{\cdot}48$, $K = 1383$
$5\frac{1}{2}$%: $\lambda = 8{\cdot}714$, $R = 6436{\cdot}60$, $K = 1432$
5 %: $\lambda = 8{\cdot}353$, $R = 6043{\cdot}47$, $k = 1484$

Aus Diesem geht hervor, dass also **der Gewinn eines
credit-Institutes mit dem Sinken des Zins
steigt**, was eigentlich leicht erklärlich ist, da der Gewinn aus der Zins
mit dem Sinken des Darlehens-Zinsfusses percentual zunimmt.

Der Schätzung gemäss sei auf eine Realität ein Darlehen A_1 gegebe
und zwar bei einer sechspercentigen Verzinsung; demgemäss wird hiefür
Tilgungsdauer n jährlich die Annuitätenquote R_1 bezahlt werden. Bei ein
geren Zinsfuss wird aber R_1 einem grösseren Darlehen entsprechen.

**Es sei daher zu ermitteln, in welchem Verhältni
Darlehen sich vergrössern kann, im Falle bei gl
Annuitätenquote der Zinsfuss abnimmt.**

Bei 36jähriger Tilgungsfrist verhält sich die Annuitätenquote R zu
K bei: 5% $5\frac{1}{2}$% 6%
wie 1 : 16·547 , 1 : 15·536 1 : 14·621
somit bei gleicher Tilgungsquote der Zuwachs an Capital bei Abnahme
fusses von: 6 % auf $5\frac{1}{2}$% um 6·2581%
$5\frac{1}{2}$% auf 5 % um 6·5075%.

Durch diesen eventuellen Zuwachs des Darlehens, welcher offenbar
stattfinden kann, wenn ein solches nicht ohnedies schon bis zur äusserst
gewährt wurde, und durch den oben erwähnten Gewinn durch Ermässigung
fusses um ein halbes Percent, würde der Anstalt bei gleicher Tilgung
Mehrgewinn von circa 10 Percent des ursprünglichen Erträgniss-Barwerthes

Daraus ist ersichtlich, dass der Prosperität der Boden- und Hypothek
Anstalten mit dem in letzterer Zeit stets in Abnehmen begriffenen allgem
fusse ebenfalls ein neues Feld zur Entwickelung geboten ist.

Mathematische Limitirung der Feuer-Versicherungs-Prämie.

III.

Nachdem wir nun in der vorigen Abhandlung die theoretische Seite dieser Frage n Betracht gezogen haben, wollen wir dieselbe nunmehr vom praktischen Standunkte beleuchten.

Dem Inspector, welcher ein Object zur Versicherung aufzunehmen hat, wird rch besagtes System Folgendes eingeräumt:

Derselbe hat die in einem Register der Reihe nach aufgezählten möglichen efahrmomente in Betracht zu ziehen, dieselben im vorhandenen Falle bei dem treffenden Objecte vorderhand zu constatiren und mit den nöthigen erklärenden nmerkungen zu versehen, eventuell bei Nichtvorhandensein zu eliminiren. Ist dies schehen, so werden die einzelnen Gefahrmomente nach ihrer Intensität abgeschätzt, d zwar werden dieselben in vier verschiedene Classen eingetheilt, von denen die asse 0 das Minimum, die Classe III das Maximum der Gefahr-Intensität bezeichnet.

Das Register würde sich z. B. in folgender Weise ergeben:

Gebäude-Risico (Nr. ....)

	Gefahrmomente [1])	Classe				Gefahr-Aequivalenten-Factor σ	Summe der Gefahr-Aequivalenten s
		0	I	II	III		
1	Bauart (gemischte)	—	I	—	—	$\frac{5}{9}$	
2	Sonstige Beschaffenheit des Objectes in Betreff der Baulichkeiten und ihrer Entfernung von einander	0	—	—	—	$\frac{3}{9}$	
3	Löschanstalten (unzureichend) ...	—	—	II	—	$\frac{7}{9}$	
4	Wasservorrath (entfernt)	—	I	—	—	$\frac{5}{9}$	
5	Dachung (weich)	—	—	—	III	$\frac{9}{9}$	
6	Zur Versicherung beantragt (ganzer Bauwerth)	—	—	—	—	—	
	u. s. w.					$\Sigma\sigma = \frac{29}{9}$	$s = 4\frac{5}{6}$

Die Gefahrmomente werden daher vom Inspector gewissenhaft bezeichnet, dagegen die Classen und beiden letzten Rubriken dem Rechnungsbeamten der Anstalt zur Ermittlung vorgelegt, und zwar werden für's Gebäude-Risico die 0, I, II, III Classe beziehungsweise den Gefahräquivalenten-Factoren $\sigma = {}^{3}/_{9}, {}^{5}/_{9}, {}^{7}/_{9}, {}^{9}/_{9}$ entsprechen, deren Summen sodann die Anzahl der Gefahr-Einheiten, und diese mit der Grundprämie $g = 1{\cdot}5$ multiplicirt, die Summe der Gefahr-Aequivalenten s ergeben.

Für's Fabriken-Risico werden die Classen 0, I, II, III, beziehungsweise der Gefahräquivalenten-Factoren $\sigma = {}^{10}/_{21}, {}^{13}/_{21}, {}^{17}/_{21}, {}^{21}/_{21}$ entsprechen, deren Summen sodann mit der diesfalls giltigen Grundprämie $g = 3{\cdot}5$ multiplicirt, die Gefahr-Aequivalenten-Summe s liefern.

Nachdem nun die Anzahl der Gefahr-Einheiten $\Sigma\sigma$ und s ermittelt wurde, kann aus nachfolgender Tabelle leicht die entsprechende Prämie gefunden werden.

Prämien - Tabelle

für Fabriken- und Gebäude-Risico.

Summe der Gefahräquivalenten-Factoren oder Anzahl der Gefahreinh. $\Sigma\,\sigma$	Fabriken-Risico		Gebäude-Risico	
	Gefahr-Aequivalenten-Summe s für $g = 3{\cdot}5$	Prämie ‰	Gefahr-Aequivalenten-Summe s für $g = 1{\cdot}5$	Prämie ‰
0	0	2·592	0	1·274
0·1	0·35	2·656	0·15	1·306
0·2	0·70	2·711	0·30	1·339
0·3	1·05	2·765	0·45	1·372
0·4	1·40	2·819	0·60	1·405
0·5	1·75	2·874	0·75	1·440
0·6	2·10	2.931	0·90	1·476
0·7	2·45	2·991	1·05	1·512
0·8	2·80	3·052	1·20	1·550
0·9	3·15	3·116	1·35	1·588
1·0	3·50	3·184	1·50	1·627
1·1	3·85	3·254	1·65	1·667
1·2	4·20	3·326	1·80	1·708
1·3	4.55	3·400	1·95	1·750
1·4	4·90	3·477	2·10	1·792
1·5	5·25	3·557	2·25	1·836
1·6	5·60	3·638	2·40	1·880
1·7	5·95	3·722	2·55	1·925
1·8	6·30	3·808	2·70	1·971
1·9	6·65	3·895	2·85	2·017
2·0	7·00	3·986	3·00	2·063
2·1	7·35	4·078	3·15	2·112
2·2	7·70	4·171	3·30	2·160
2·3	8·05	4·266	3·45	2·213
2·4	8·40	4·364	3·60	2·260
2·5	8·75	4·463	3·75	2·310
2·6	9·10	4·564	3·90	2·361
2·7	9·45	4·667	4·05	2·413
2·8	9·80	4·771	4·20	2·465
2·9	10·15	4·877	4·35	2·517
3·0	10·50	4·983	4·50	2·571
3·1	10·85	5·091	4·65	2·625
3·2	11·20	5·202	4·80	2·679
3·3	11·55	5·314	4·95	2·734
3·4	11·90	5·426	5·10	2·789
3·5	12·25	5·540	5·25	2·845
3·6	12·60	5·656	5·40	2·902
3·7	12·95	5·675	5·55	2·95[illegible]
3·8	13·30	5·895	5·70	3·01[illegible]
3·9	13·65	6·010	5·85	3·07
4·0	14·00	6·130	6·00	3·1[illegible]

Fabriken-Risico		Gebäude-Risico	
Gefahr-Aequivalenten-Summe s für $g = 3\cdot5$	Prämie °/₀₀	Gefahr-Aequivalenten-Summe s für $g = 1\cdot5$	Prämie °/₀₀
14·35	6·252	6·15	3·191
14·70	6·375	6·30	3·249
15·05	6·499	6·45	3·308
15·40	6·624	6·60	3·370
15·75	6·751	6·75	3·430
16·10	6·879	6·90	3·491
16·45	7·007	7·05	3·552
16·80	7·136	7·20	3·613
17·15	7·267	7·35	3·674
17·50	7·399	7·50	3·737
17·85	7·531	7·65	3·801
18·20	7·664	7·80	3·865
18·55	7·799	7·95	3·929
18·90	7·935	8·10	3·993
19·25	8·071	8·25	3·056
19·60	8·208	8·40	4·121
19·95	8·345	8·55	4·186
20·30	8·482	8·70	4·251
20·65	8·624	8·85	4·317
21·00	8·766	9·00	4·383
21·35	8·908	9·15	4·450
21·70	9·050	9·30	4·517
22·05	9·193	9·45	4·584
22·40	9·338	9·60	4·650
22·75	9·483	9·75	4·717
23·10	9·629	9·90	4·784
23·45	9·775	10·05	4·852
23·80	9·923	10·20	4·923
24·15	10·071	10·35	4·992
24·50	10·220	10·50	5·061
26·25	10·976		
28·00	11·749		
29·75	12·539		

müssen noch hinzufügen, dass wir die Summe der Gefahr-Aequivalenten-
der Gefahr-Einheiten $\Sigma\,\sigma$ von Zehntel zu Zehntel in der Tabelle in Anwen-
gen; kleinere Intervalle können leicht aus der Differenz ermittelt werden.[2])
besonders guten Gebäude-Risiken, welche dem Gefahr-Minimum in ausser-
r Weise entsprechen, kann noch die den unglücklichen Zufällen entsprechende
ecte von vornherein anhaftende Gefahr, welche in unserer Abhandlung
518 Gefahrmomenten kundgibt, insofern in Rechnung gezogen werden, dass
be ausser Betracht zieht. In diesem Falle wird, wenn wir die genannte
enten-Beschaffenheit als maximal, also dem Gefahr-Aequivalenten-Factor

III, d. h. $\sigma = 1$ entsprechend betrachten, die negative Gefahr-Aequivalenten
$s = - 0·927$ sein; und dieses in die bekannte Formel für Gebäude-Risic
tuirt, liefert als Prämie p = 1·076‰.

Als normale kleinste Prämie für Gebäude-Risico bei $\Sigma \sigma = 0$ figurirt i
Tabelle p = 1·274‰, nachdem wir es aber als zulässig erachtet haben, ein
fälligen Objecte eventuell jegliches Risico überhaupt abzusprechen, ist diese
um fast 0·2‰ kleiner geworden, dabei aber noch immer grösser als 1‰ g

Wir können daher constatiren, dass der bei vielen Anstalten nach L
classen eingeführte bisherige Tarif, in welchem die mit I bezeichnete und
besten Risiken giltige mit 1‰ bemessen ist, den Anforderungen insofe
genügt, als die Prämie für die bezüglichen Risiken unzureichend ist.

Auch in Bezug auf den sogenannten Rabatt, welcher bei Versicherun
längere Dauer gebräuchlich ist, und die enorme Höhe von 20—25 Percent
können wir uns nicht einverstanden erklären, und wäre dies nur dann zuläss
die Prämie so reichlich bemessen werden würde, dass dieser Nachlass nicht,
so oft geschieht, auf Kosten der Nettoprämie stattfinden würde, welche a
Weise zum Nachtheile des Versicherers unterboten wird.

Durch die wissenschaftliche Festsetzung der Grenzen zwischen Bru
Nettoprämie wird es nunmehr möglich, die eventuelle Zulässigkeit eines N
zu beurtheilen und auf diese Weise dem Feuerversicherungs-Geschäfte die
Stabilität zu verleihen.

---

[1]) Jegliche Gefahrmomente müssen von Seite des Inspectors mit den nöthigen E
in Bezug auf ihre Gefahr-Intensität eingeleitet werden, damit auf dieser Grundlage di
der entsprechenden Classe eines jeden derselben vorgenommen werden kann.

[2]) Soll die Prämie für ein Risico gefunden werden, bei welchem die Gefahreinheit
als auf eine Decimalstelle in Rechnung gebracht werden sollen, so wird die Diff
entsprechenden Prämien derjenigen zwei Gefahreinheiten-Posten, zwischen denen sich
tracht kommende befindet, in zehn Theile getheilt, von denen soviel, als die zweite De
der gegebenen Gefahreinheitzahl repräsentirt, zu der kleineren der beiden Prämien zuge

Zum Beispiel: $\Sigma \sigma = 4·84$, Prämie?

4·9	„	7·267	Differenz = 0·131
4·8	„	7·136	

somit $\frac{4}{10}$ derselben = 0·052 und die fragliche Prämie = 7·136 + 0·052 = 7·1

Dr. Ludwig Grossmann's

Untersuchungen über die Beschaffenheit der Prämienreserve.

I.

Oft ist schon die Frage aufgeworfen worden, ob das Princip, auf welchem die
mittlung der Reservewerthe beruht, mit Bezug auf die Beschaffenheit derselben,
richtiges ist. Im Grunde genommen ist die Prämienreserve nichts anderes, als
jeweilige Ersparniss eines früher Versicherten gegenüber Demjenigen, welcher
n späteren Versicherungsvertrag eingeht; indem der Erstere zu dieser Zeit bereits
Capital angesammelt hat, welches eine Rente für die beziehungsweise wahrschein-
e Erlebensdauer des Versicherten repräsentirt, mit deren Hilfe, die durch den
eren Eintritt sich billiger stellende Prämie, auf die gegenwärtig zu leistende
änzt wird. Das Princip beruht nämlich auf folgender Grundlage:

Die Lebensversicherungs-Prämie müsste eigentlich entsprechend der zunehmen-
Sterblichkeit von Jahr zu Jahr grösser werden, um mit dem übernommenen
ico übereinzustimmen. Da jedoch das System der steigenden Prämien aus nahe-
enden Gründen unzweckmässig ist, so wurde ein solches mit gleichmässiger, in
terer Zeit sogar fallender Prämie, acceptirt, indem die später zu zahlenden Mehr-
äge zu Gunsten der anfänglich geringeren Prämien anticipirt wurden. Es ist so-
das zur Ergänzung der späteren Prämien nöthige Rentencapital der eigentliche
werth der Polizze oder die Prämienreserve. Nun handelt es sich darum, ob die
er usuelle Ermittlung derselben eine richtige ist, da es allgemein bekannt ist,
s sehr verschiedene Sterblichkeitstafeln zu denselben Reservewerthen führen können,
d dass Tafeln, die eine hohe Sterblichkeit zeigen, und aus denen hohe Prämien
ultiren, im Allgemeinen auf niedrige Reservewerthe führen und umgekehrt. Die
olute Grösse der Sterblichkeit beeinflusst vorwiegend die Höhe der Prämie also
r indirect die Reservewerthe, dagegen wird eine gleichmässige oder schroff zu-
mende Sterblichkeit eine niedrige, beziehungsweise hohe Reserve liefern. Um daher
m Gesagten Rechnung zu tragen, ist es nothwendig, denjenigen Moment in Be-
cht zu ziehen, welcher mit den Variationen der Sterblichkeit nahe zusammenhängt,
d hierin seinen Einfluss auf die Reserve geltend zu machen im Stande ist. Die
hrscheinliche Lebensdauer ist ein solcher Factor, der an und für sich geeignet
den hier gestellten Anforderungen zu entsprechen, weshalb wir uns mit dem-
lben etwas näher befassen wollen. Bevor wir jedoch darangehen, diese Frage näher
beleuchten, wollen wir noch Einiges vorausschicken, was von besonderem Belange
. Was die Prämienreserven betrifft, so werden dieselben denjenigen successive
eigenden Werth besitzen müssen, welcher eventuell nothwendig wäre, um sämmt-
he in allen möglichen Zeitpunkten abgeschlossenen Versicherungen, in Bezug auf
aus denselben resultirende Prämien-Einnahme derart in Rechnung zu ziehen, als

ob dieselben erst mit der letzteingezahlten Prämie zum Abschluss gelangt wä
wobei überdies die Intervalle zwischen den verschiedenen letzten Einzahlungstermi
und dem einheitlichen Zeitpunkte der Prämienreserve-Ermittlung in Betracht gez
werden müssen. Da nun der Beginn des jeweiligen Kalenderjahres als einheitli
Ermittlungszeitpunkt angenommen wird, so sind hier zwei Fälle möglich, von de
jeder ein richtiges Resultat liefern hann. Es kann nämlich entweder die dem Erm
lungszeitpunkte vorhergehende oder nachfolgende Prämien-Einzahlung zur Grundl
angenommen werden, in welch' ersterem Falle eine vorschussweise, im letzteren
nachschussweise Rente als Vorbedingung für die Berechnung der Prämienreserve,
zwar mit Bezug auf die jeweilige wahrscheinliche Lebensdauer dienen wird.

Zum Zwecke unserer Rechnung wollen wir uns nachfolgender, aus der St
lichkeitstafel der siebzehn englischen Gesellschaften zum Zinsfusse von 4% ber
neten Tabelle der wahrscheinlichen Lebensdauer bedienen.

Tabelle

der wahrscheinlichen Erlebensdauer.

Alter x	Eine $x$jährige Person hat noch zu leben Jahre:	Alter x	Eine $x$jährige Person hat noch zu leben Jahre:	Alter x	Eine $x$jährige Person hat noch zu leben Jahre:
18	42·37112	46	2[illegible]·473[illegible]7	74	6·36242
19	41·67567	47	21·76535	75	5·97967
20	40·97818	48	21·06356	76	5·61174
21	40·27914	49	20·36826	77	5·25737
22	39·57848	50	19·67972	78	4.91692
23	38·87612	51	18·99846	79	4·59024
24	38·17244	52	18 32526	80	4·27652
25	37·46732	53	17·65992	81	3·97505
26	36·76072	54	17·00366	82	3·69476
27	36·05294	55	16·35622	83	3·40298
28	35·34390	56	15·71744	84	3 12940
29	34·63394	57	15·08953	85	2·86192
30	33 92291	58	14·47136	86	2 60033
31	33·21115	59	13·86285	87	2·34438
32	32·49850	60	13·26652	88	2·09381
33	31·78526	61	12·68157	89	1·85000
34	31·07131	62	12·10908	90	1·61410
35	30·35651	63	11.54983	91	1·38677
36	29·65332	64	11·00406	92	1·13510
37	28·93116	65	10·47244	93	0·96520
38	28·22033	66	9.95536	94	0 78261
39	27·50268	67	9·45307	95	0 61800
40	26·78417	68	8·96667	96	0·48649
41	26·06461	69	8·49423	97	0·38462
42	25·34417	70	8.03725	98	0·25000
43	24·62329	71	7·59538	99	0·00000
44	23·90350	72	7·16846		
45	23 18642	73	6 78068		

Die Zeitintervalle, welche zwischen der periodischen Prämienzahlung und dem ittlungszeitpunkte der Prämienreserve liegen, erfordern aber die Feststellung der rscheinlichen Erlebensdauer nicht nur wie in unserer Tabelle von Jahr zu Jahr, dern auch während den einzelnen Jahresfristen; weshalb wir darauf sinnen müssen, e tabellarisch aufgestellten Daten als Ordinaten einer geschlossenen Curve darzulen. Auf diese Weise wird es uns möglich, für jedes beliebige auch in Jahreschtheilen gegebene Alter des Versicherten die entsprechende wahrscheinliche Dauer zustellen, die derselbe noch zu leben hat.

Führen wir uns zu diesem Behufe die Entstehung obiger Tabelle vor Augen, ergibt sich, wenn w_x die wahrscheinliche Erlebensdauer und L_x die Anzahl der h Lebenden von 100.000 zehnjährigen Personen im Alter x bezeichnet, folgende lation

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{L_{x+2}}{L_x} + \frac{L_{x+3}}{L_x} + \cdots + \frac{L_{99}}{L_x}$$

er

$$w_{x+1} = \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+4}}{L_{x+1}} + \cdots$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir aber eine für unsere Untersuchung st wichtige Form, welche uns das Mittel an die Hand gibt, aus zwei aufeinerfolgenden Wahrscheinlichkeiten der Lebensdauer, von denen die eine für abgessene ganze Jahre, die andere für weitere Jahresbruchtheile gilt, die unbekannte letzteren entsprechende Anzahl der Lebenden zu ermitteln.

Die Formel 1) lässt sich nämlich auch in folgender Weise schreiben:

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}\left[1 + \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} + \cdots\right]$$

t durch Substitution der Form 2) in dieselbe

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}\left[1 + w_{x+1}\right]$$

nach

$$L_{x+1} = \frac{w_x L_x}{1 + w_{x+1}}$$

Diese Form lautet zwar, wie sie sich hier darstellt, blos für ganze Jahresrvalle, übergeht jedoch sofort in eine für Jahresbruchtheile giltige, wenn wir das prechende beliebige Intervall δ in derselben zur Geltung kommen lassen; wir alten sonach

$$L_{x+\delta} = \frac{w_x L_x}{\delta + w_{x+\delta}}$$

Nachdem wir uns die Ueberzeugung verschafft haben, dass eine solch auch das Absterbegesetz geometrisch darzustellen gestattet, und somit auch (deren Factor für die Ermittlung der Prämienreserve, nämlich die Prämie für bruchtheile zu berechnen uns in die Lage setzt, so wollen wir zu deren ı Bestimmung schreiten.

Zwischen den beiden Factoren x und w_x, d. i. dem Alter und der scheinlichkeit der Erlebensdauer, herrscht die Bedingung, dass bei Zunah ersteren das letztere abnimmt und umgekehrt; und zwar geschieht dies ı genau proportionaler Weise, sondern wächst in progressivem Sinne.

Wir können daher die bekannte allgemeine Form für dieses Princip wendung bringen, welches sich in nachstehender Formel äussert

$$5) \qquad y^2 - Ay'^2 - B = 0$$

worin A und B willkürliche Constanten bezeichnen und welche Form nach tution obiger Factoren in folgende übergeht

$$w_x{}^2 - A\left(\frac{d\,w_x}{d\,x}\right)^2 - B = 0$$

nach vollzogener Integration und gehöriger Substitution der Constanten erhal die Resultatsgleichung

$$6) \qquad w_x = a\,q^x + b\,q^{-x}$$

welche bekanntlich die Gleichung der Kettenlinie ist.

Das Minimum für w_x erhalten wir, wenn wir das Alter x in derselben setzen, wodurch sich folgende Relation ergibt

$$a\,q^{99} + b\,q^{-99} = 0$$

somit

$$\frac{b}{a} = -q^{198}$$

Durch Substitution zweier passenden Werthe in die Gleichung (6) erhal sodann weitere zwei Gleichungen, aus denen sich in Verbindung mit der l Relation die Werthe für a, b und q ergeben, worauf wir noch später zurückzul gedenken.

Durch Ermittlung dieser Curve wird es uns nun möglich, nicht nur : beliebiges Alter des Versicherten die wahrscheinliche Erlebensdauer zu er: sondern auch auf Grund derselben das Absterbegesetz genauer zu fixiren, ind auch die Anzahl der Lebenden in verschiedenen Stadien während der Jahresin festzustellen in der Lage sind.

[...]hematische Reflexionen über den Boden- und Hypothekar-Credit.

III.

Nachdem nun in der vorigen Abhandlung die Verlustreserven-Beschaffung einem [...]alen System unterordnet wurde, so erübrigt nur noch, die hiezu nöthige Hand- [...] den Barwerth des zu gewärtigenden Gewinnes, nicht nur zur Zeit des Geschäfts- [...]lusses, sondern auch zu einem beliebigen, innerhalb der Tilgungsperiode sich [...]enden Zeitpunkte zu ermitteln.

Nehmen wir an, eine Anstalt wollte das genannte System in ihrer Geschäfts- [...]rung einführen, so bedürfte sie für diesen Zweck die Feststellung der derzeitigen [...]rthe sämmtlicher aus den bisher investirten Darlehen zu gewärtigenden Ge- [...]. Nun sind naturgemäss diese Geschäfte zu verschiedenen Zeiten, bei ver- [...]ener Tilgungsdauer und eventuell auch bei verschiedenem Zinsfusse abge- [...]sen worden, so dass bei dem einen mehr, bei dem anderen weniger der ferneren [...]ng harrt. Demgemäss werden auch die Reserven für diejenigen Capitals- und [...]nverluste, welche Darlehen mit einem nahen Abschlusse der Tilgung entsprechen, [...]geringeren Risico angemessen, bedeutend kleiner sein müssen als diejenigen, [...]e für die kurz vorher abgeschlossenen Geschäfte gelten.

Um daher in dieser Beziehung regelrecht und den Anforderungen entsprechend [...]gehen, ist es nothwendig, sämmtliche investirte Posten so zu behandeln, als ob [...]n ein und demselben Zeitpunkte abgeschlossen worden wären, zu welchem Be- [...]der bereits getilgte Betrag, vom ursprünglich investirten, wie auch die bereits [...]ufene Tilgungsdauer von der wirklichen seinerzeit stipulirten Tilgungsfrist in [...]g gebracht wird, wobei selbstverständlich der Zinsfuss, abgesehen von einer [...]uellen inzwischen vorgenommenen Conversion, keine Veränderung erleidet.

Wenn daher n die ursprünglich stipulirte, m dagegen die bereits abgelaufene [...]ngsfrist bezeichnet, so ist die hiefür giltige Formel

$$U = \left(\frac{R}{p} - A\right)\left[(1 + p)^m - 1\right]$$

[...] U den Ueberrest des noch zu tilgenden Darlehens repräsentirt. Mit Rücksicht [...]die noch in Betracht kommende Tilgungsperiode $n-m$, wird demgemäss für [...] Frage die Formel

$$U\,(1 + p)^{n-m} - \frac{R}{p}\left[(1 + p)^{n-m} - 1\right] = O$$

[...]elang sein, der entsprechend auch der nach m abgelaufenen Tilgungsjahren sich [...] ergebende Barwerth der ferneren restlichen Gewinne ermittelt werden wird.

Demnach werden die in der Abhandlung I für die Ermittlung des Barwerthes [...]Zeit des Geschäftsabschlusses giltigen Formeln 5) und 6) bei Anwendung auf [...]letzteren Fall eine Veränderung in dem Sinne erleiden, als anstatt der ganzen [...]ungsdauer n die restliche $n-m$ und anstatt des ursprünglichen Darlehens A, [...]n derzeitiger Ueberrest U substituirt wird. Auf diese Weise wird der derzeitige [...]erth der noch zu gewärtigenden Gewinne für jeden einzelnen Darlehensposten

festgesetzt, um sodann als Grundlage für eine Jahresrente auf die Dauer zu laufenden diesfälligen Tilgungsfrist benützt zu werden und auf diese eigentlichen für die Bildung der Reserve wichtigen Durchschnittsgewinn z

Zur besseren Orientirung seien aus den bei einem Institute in Be ziehenden Darlehensposten beispielsweise folgende herausgegriffen:

Zu $5\frac{1}{2}\%$ Zinsen sind die Darlehen von

a) 100.000 fl. in 36 Jahren tilgbar und bereits 21·4 Jahre investi
b) 150.000 « « 39 « « « « 14·6 « «
c) 80.000 « « 40 « « « « 32·2 « «

es ist die Frage, welche Barwerthe repräsentiren die noch zu gewärtigenden dieser Darlehensposten?

Nachdem die Gewinne aus den bereits abgelaufenen Tilgungsjahren v Anspruch genommen wurden, wie dies allgemein Usus ist, so erübrigen diejenigen aus den noch folgenden bis zur vollständigen Tilgung noch Jahren, und zwar beziehungsweise für

a) 14·6 , b) 24·4 c) 7·8 Jahre.

Wir werden daher vor Allem zu ermitteln suchen, wieviel in der abg beziehungsweisen Dauer vom Darlehenscapitale bereits getilgt wurde und nach vollzogener Substitution beziehungsweise

fl. 36.517·00 , 25.056·87 und 49.052·00

daher als noch zu tilgende Darlehen

fl. 63.483·00 , 124.943·13 und 30.948·00

wobei die für obige ursprüngliche Darlehensposten giltigen Annuitätenquote

fl. 6436·60 , 9416·98 und 4985·60

unverändert in Rechnung kommen.

Wenn wir nun aus den vorliegenden Daten die Barwerthe ermitteln, sich folgende Vergleichszahlen:

Die Gewinn-Barwerthe K zur Zeit des jeweiligen Geschäftsabschl Rücksicht auf den Factor λ sind

a) $\lambda = 8\text{·}714$ $K = 14.326\text{·}85$
b) $\lambda = 10\text{·}339$ $K = 23\text{·}071\text{·}40$
c) $\lambda = 10\,911$ $K = 12\text{·}271\text{·}56$

die derzeitigen Gewinn-Barwerthe K' also nach zurückgelegter Tilgungsd

21·4 Jahren sind für a) $\lambda' = 1\text{·}2715$ $K' = 4525\text{·}00$
14·6 « « « b) $\lambda' = 3\text{·}7500$ $K' = 13.408\text{·}22$
und 32·2 « « « c) $\lambda' = 0\text{·}3578$ $K' = 1303\text{·}73$

aus welchen sich die ferneren Durchschnittsgewinne ergeben.

Da nun die Reserve höchstens mit dem Zinsfusse der eigenen Pfandb zinst werden kann, weil eine Investirung derselben als Darlehen unzulässi wird, wenn die Verzinsung der Pfandbriefe mit $P - 1\%$ bezeichnet ist, d für den jährlichen Durchschnittsgewinn bis zur vollständigen Tilgung sich f massen gestalten:

$$G' = \frac{K' \frac{P-1}{100}\left[1+\frac{P-1}{100}\right]^{n-m}}{\left[1+\frac{P-1}{100}\right]^{n-m}-1}$$

den Durchschnittsgewinn bezeichnet. Für unser Beispiel werden die beweisen Werthe desselben

a) $n - m = 14{\cdot}6$ $G' = 429{\cdot}50$
b) $n - m = 24{\cdot}4$ $G' = 916{\cdot}47$
c) $n - m = 7{\cdot}8$ $G' = 201{\cdot}89$

den ersten Jahren nach der Einführung dieses Systems würde sich freilich gerer Gewinn aus den Geschäften ergeben, dafür würde jedoch, abgesehen sich ansammelnden Reserven, noch der Vortheil erwachsen, dass die in den Jahren der Tilgung ziemlich spärlichen Gewinne aus den jeweiligen Gedurch die bezüglichen Reserven dermassen ergänzt werden würden, dass sie e der Durchschnittsgewinne erreichen, und hiedurch den scheinbaren Nachr Zeit der Einführung dieses Systems durch eine stetige Steigerung der Gewinne paralysiren würden.

Grunde genommen ist dies ein Consolidirungsplan für Institute, welche it der genügenden Reserve ausgestattet sind.

nders verhält es sich jedoch bei Anstalten, die mit einem entsprechenden fonds versehen, dieses System in ihre Geschäftsgebahrung einzuführen ge-

diesem Falle wird der Durchschnittsgewinn auf Grundlage des Gewinnthes zur Zeit des Geschäftsabschlusses der jeweiligen Geschäfte ermittelt Durch weitere Rechnung ergeben sich sodann die nöthigen den jeweiligen ten entsprechenden Reservebeträge, welche einfach aus dem Reservefond geerden. Einer solchen gut situirten Anstalt fallen auf diese Weise die reifen in den Schoss, indem sie schon zur Zeit der Einführung dieses Systems in ge ist, die vollen, rechnungsmässig erforderlichen Reserven aufzuweisen, und s den Vortheil hat, die spärlichen, aus den letzten Jahren der Tilgung sich den Gewinne bedeutend höher einzustellen und auf diese Weise eine stetige steigerung zu erzielen.

ie mathematische Darstellung wird nun folgende Resultate ergeben:

ach der in Abhandlung II aufgestellten Formel für den Durchschnitts- G, zu dessen Grundlage der Gewinn-Barwerth K zur Zeit des jeweiligen tsabschlusses dient, wird sich für die Posten a), b) und c) unter Vorbehalt gänzung der erforderlichen Reserven aus dem vorhandenen Reservefond enten früheren Bedingungen derselbe wie folgt gestalten; und zwar für

a) $G = 810{\cdot}98$ b) $G = 1265{\cdot}60$ c) $G = 666{\cdot}88$.

ie für diese Posten beziehungsweise erforderliche derzeitige Reserve V ergibt der Form

$$4)\qquad V = \frac{(G - G')\left[\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^{n-m} - 1\right]}{\frac{P-1}{100}\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)^{n-m}}$$

aus welcher sich durch Rechnung nachstehende Reserve-Beträge ergeben:

a) $V_{21\cdot 4} = 4018\cdot75$ b) $V_{14\cdot 6} = 5107\cdot90$ c) $V_{32\cdot 2} = 3($

wobei der Index von V die beziehungsweise abgelaufene Tilgungsfrist b

Diese Reserve-Beträge werden nun aus dem vorhandenen Reservefo und dienen zur Ergänzung des successive abnehmenden wirklichen Gewi Durchschnittsgewinn, wodurch die Aufzehrung derselben bis zur vollstän der bezüglichen Darlehen erfolgt. Die neu abgeschlossenen Geschäfte da für sich wieder neue Reserven, welche bei einer gewissen mittleren Zeit periode ihr Maximum erreichen, um dann ebenfalls nach und nach mit a Risico die obengenannte Procedur durchzumachen.

Von grossem Belang ist diese Methode bei Uebernahme des geschäftes einer Anstalt durch eine andere, da auf diese Weise der Werth desselben ermittelt werden kann, wobei der derzeitige Stand der Vergleiche zu den derzeit ermittelten Barwerthen der noch zu gewärtigen eine sehr genaue Schätzung zulässt.

Bei Erwerbsinstituten, wo die Verlosung der Pfandbriefe innerha wissen Zeit, die gewöhnlich der Tilgungsfrist gleichkommt, ohne weite kung erfolgt, was im Gegentheile bei Landes- und Communal-Instit öffentliche Interesse im Auge haben, nicht der Fall ist, sondern mit de Tilgung auch die sofortige theilweise Verlosung stattfindet, muss diese r der Reservebildung unbedingt als Vortheil anerkannt werden, da durch legenheiten, die mit einer unzureichenden Superdeckung sich einstellen, knappen Verhältnisse zwischen Actiencapital und emittirten Pfandbriefe vermieden werden können.

Von grossem Belang ist dies insbesondere zu einer Zeit, wo das wird und Investitionen mit höherem Zinsfusse der Concurrenz halber a ringeren herabgesetzt werden müssen. Da ist das eventuell erzielte Ag emittirten Pfandbriefe, an welchem unbedingt die solide und mit hinrei serven ausgestattete Bankleitung nicht geringen Antheil hat, doppelt schlagen, da hiedurch der Beweis erzielt ist, dass dieselben im Verh allgemeinen Zinsfusse zu gut verzinst sind, daher eine Convertirung d boten ist. Die Verzinsung kann aber nur dann eine gute sein, wenn d eine hinreichende ist, deshalb kommt es auch vor, dass Anstalten selb normal verzinste Pfandbriefe nicht convertiren können, ohne dem Pfan eine Prämie von 1 bis 3 Percent und noch mehr zu bezahlen. Dies Genüge, von welchem Einflusse die innere Geschäftsgebahrung und deren würdigkeit auf den äusseren Geldmarkt ist, und von welcher Rückwirk die Anstalt eventuell sein kann.

Dr. Ludwig Grossmann's

hungen über die Beschaffenheit der Prämienreserve.

II.

origen Abhandlung über dieses Thema haben wir für den approximativen Erlebensdauer-Wahrscheinlichkeiten die Curve

$$w_x = a\,q^x + b\,q^{-x}$$

n Minimum für den Werth $x_0 = 99$ uns die Bedingung

$$\frac{b}{a} = q^{198}$$

edoch die Werthe a, b und q genau zu bestimmen sind, so werden wir Gleichungen zwischen diesen Werthen bedürfen, um dieser Anforderung zu können.

en ergeben sich aus zwei beliebigen Punkten der Gleichung (1), welche er einfacheren Rechnung wegen passend annehmen wollen, und zwar diesen Fall die Punkte $x_1 = 33$ und $x_2 = 66$, welche mit dem in welchem sich das Minimum der Curve befindet, proportional sind, rdig einfache Lösung zulassen.

ch ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(w_x)_1 = a\,q^{33} + b\,q^{-33}$$
$$(w_x)_2 = a\,q^{66} + b\,q^{-66}$$

minirt, und zum Zwecke der einfacheren Rechnung $q^{33} = V$ gesetzt,

$$a = \frac{(w_x)_2\,V - (w_x)_1}{(V^2 - 1)\,V}$$

dieselbe Weise erhalten wir durch Elimination von a die Form

$$b = \frac{(w_x)_1\,V - (w_x)_2}{V^2 - 1} \cdot V^2$$

Division der Gleichungen 5) und 6) ergibt sich nun die Relation

$$\frac{b}{a} = \frac{(w_x)_1\,V - (w_x)_2}{(w_x)_2\,V - (w_x)_1} \cdot V^3$$

erbindung mit der Relation 2) die Gleichung

$$V^4 - \frac{(w_x)_1}{(w_x)_2}\,V^3 + \frac{(w_x)_1}{(w_x)_2}\,V - 1 = 0$$

liefert, deren Wurzeln

$$8) \quad \begin{cases} V_1 = +1 \\ V_2 = -1 \\ V_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} + \sqrt{\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2}\right]^2 - 4}\right] \\ V_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2} - \sqrt{\left[\frac{(w_x)_1}{(w_x)_2}\right]^2 - 4}\right] \end{cases}$$

sind.

Da nun V_1 und V_2 für a und b unendliche Werthe liefern un als 1 ist, daher für unsere Rechnung unpraktisch, so erübrigt uns nu V_3, welche nach Substitution der entsprechenden Werthe der Wahrsche Erlebensdauer

$$(w_x)_1 = 31{\cdot}78526$$

und

$$(w_x)_2 = 9{\cdot}95536$$

den Werth

$$V = 2{\cdot}84076$$

liefert. In Folge dessen ergibt sich

$$q = V^{\frac{1}{33}} = 1{\cdot}0321443$$
$$a = -\ 0{\cdot}1744906$$
$$b = +\ 91{\cdot}7022$$

Da diese Curve jedoch blos in den drei Punkten x_0, x_1 und x_2 mit übereinstimmt, so wird, um derselben den nöthigen correctiven Spielra folgende Form der Anforderung entsprechen:

$$9) \quad w_x = a\,(q + \delta)^x + b\,(q + \delta)^{-x}$$

worin δ in den oben bezeichneten drei Punkten $= 0$ werden muss. D nur dann der Fall sein kann, wenn die bekannte Kettenlinie mit der ge in diesen drei Punkten zum Schnitt kommt, so wird offenbar eine posit wechselnde Interpolation stattfinden müssen.

Derselben wird nun dadurch entsprochen, dass für δ eine Form g welche für die Werthe x_0, x_1 und x_2 verschwindet und zu gleicher Z natendifferenzen entsprechend regelt.

Dieser Anforderung entspricht nun folgende probeweise ermittelte

$$10) \quad \delta = \frac{x}{2\,(99 + x)}\left(1 + \frac{x}{2\,(99 + x)}\right)\left[\frac{(33 - x)\,(66 - x)\,(99}{(33 + x)\,(66 + x)\,(99}\right.$$

und wir erhalten somit die dem Absterbegesetz entsprechende Linie

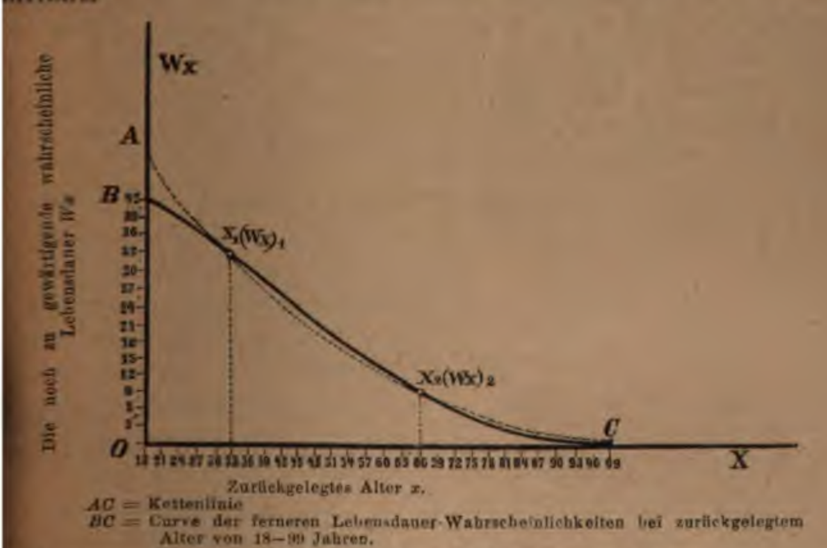
$$11) \quad w_x = 91{\cdot}7022\left[1{\cdot}0321443 + \frac{x}{2\,(x + 99)}\left(1 + \frac{x}{2\,(x + 99)}\right)\left(\frac{(33 - x)\,(66 - x}{(33 + x)\,(66 + x}\right.\right.$$

$$- 0{\cdot}1744906\left[1{\cdot}0321443 + \frac{x}{2\,(x + 99)}\left(1 + \frac{x}{2\,(x + 99)}\right)\left(\frac{(33 - x)\,(66 - x)}{(33 + x)\,(66 + x)}\right.\right.$$

uns nahezu dieselben Werthe der Wahrscheinlichkeit der noch zu gewärti- Lebensdauer für die verschiedenen Alter x ergibt, wie sie in der Tabelle ersten Abhandlung über dieses Thema verzeichnet sind. Diese Gleichung ist r jede andere Sterblichkeitstabelle anwendbar, nur werden in derselben die a, b und q eine Veränderung der neuen Tabelle entsprechend erleiden.

ir können daher die beiden Formen 9) und 10) als allgemein mas-gebend für begesetz betrachten und ist es uns nunmehr möglich, für jedes beliebige Jahresbruchtheilen gegebene Alter die noch zu gewärtigende wahrscheinliche uer zu ermitteln.

Nachfolgendem ist die graphische Darstellung der Curve der ferneren uerwahrscheinlichkeiten w_x bei zurückgelegtem Alter x von 18—99 Jahren ulicht.



AC = Kettenlinie
BC = Curve der ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten bei zurückgelegtem Alter von 18—99 Jahren.

m besseren Verständniss mag folgende Erörterung dienen.

wäre z. B. die Erlebenswahrscheinlichkeit und hieraus die Anzahl der Leben- das Alter von 22·4 Jahren zu ermitteln, in welcher Weise wird man zum gelangen?

für diesen Fall das Alter $x = 22·4$ ist, so wird dasselbe in die Gleichung 11) t und wir erhalten als noch zu gewärtigende wahrscheinliche Lebensdauer 39·30 Jahre; auf dieselbe Art ergibt sich auch für das Alter $x = 22$ die gewärtigende wahrscheinliche Lebensdauer $w_{22} = 39·58$.

nun die Form für die Anzahl der Lebenden (siehe Abhandlung I)

$$L_{x+\delta} = \frac{w_x \; L_x}{\delta + w_{x+\delta}}$$

wird offenbar w_{22} für w_x und $w_{22·4}$ für $w_{x+\delta}$ substituirt werden müssen L_x die Anzahl der Lebenden von 100.000 zehnjährigen Personen im 22. Lebens- ten.

r erhalten somit die Anzahl der Lebenden im Alter von 22·4 Jahren

$$L_{22·4} = \frac{w_{22} \; L_{22}}{0·4 + w_{22·4}} = \frac{91905 \; . \; 39·58}{0·4 + 39·30} = 91,627$$

Nachdem es uns nunmehr gelungen ist, für jedes beliebige Alter
gewärtigende wahrscheinliche Lebensdauer und auch die Anzahl der
ermitteln, so ist es nicht schwer, daraus die weiteren Schlüsse zu ziehen

Die Prämienreserve wird für den Zeitpunkt der erfolgten letzten Pr
wie gewöhnlich ermittelt, nur wird das gegenwärtige genaue Alter des
mit Bezug auf sein zur Zeit der eingegangenen Versicherung als Gr
Prämienbemessung angenommene bei der Berechnung in Betracht gezog
mittelte Prämienreserve wird sodann auf diejenige Dauer, welche vom Ze
Prämienzahlung bis zum nächsten Jahresabschlusse fehlt, mit dem zugru
Zinsfusse aufgezinst. Selbstverständlich wird auch in diesem Falle bl
schussweise Rente in Betracht zu kommen haben, da der dem Ermittelun
vorhergehende Prämienzahlungstermin zur Grundlage dient.

Wird jedoch der dem Ermittelungszeitpunkte nachfolgende Prämi
termin zur Grundlage der Berechnungen genommen, so wird offenbar die
weise Rente in Betracht kommen müssen, dafür aber die berechnete Pr
auf die Dauer vom Zeitpunkte des Jahresabschlusses bis zur nächsten Prä
mit dem zugrundeliegenden Zinsfusse abgezinst.

Der jeweilige neue Werth der Prämienreserve tritt immer erst mit de
in Kraft, wo die Zahlung der Prämie bereits erfolgt ist; in der Zwisc
Zahlungstermine unterliegt derselbe dem mit einer gewöhnlichen Ver
bundenen Wachsthume, da nicht nur die Dauer der Versicherung, sonde
absolute Werth und die Anzahl der bezahlten Prämien auf denselben
ist. Mit jeder erfolgten Prämienzahlung wird der Werth der Prämienre
entsprechenden Weise erhöht, mithin auch der zwischen zwei Prämienz
Berücksichtigung zu ziehende Zinsenzuwachs desselben blos ein temporäre

Wenn daher m die Altersclasse des Versicherten zur Zeit seines
P_m die entsprechende zu zahlende Prämie, k die Anzahl der zur Zeit de
den Jahresabschlusses bereits gezahlten Prämien, x das genaue Alter des
zur Zeit der letzten Prämienzahlung, und M die Mise einer vorschussw
bezeichnet, so ist folgende Formel für die Berechnung der Prämienre
gebend

13) $$V = (P_{m+k-1} - P_m)\, M\, (1+p)^a$$

worin a die seit der letzten Prämienzahlung bis zum Zeitpunkte der Reser
lung verstrichene Frist bezeichnet; oder

14) $$V = \frac{(P_{m+k-1} - P_m)\, M_1}{(1+p)^{1-a}}$$

worin M_1 die Mise der nachschussweisen Rente bezeichnet.

Zur Grundlage der jeweiligen Mise wird die dem zurückgelegt
Alter x entsprechende fernere wahrscheinliche Lebensdauer w_x angenomm
welcher aus der Prämienreserve die Rente zur Deckung der Differenz P_{m+}
beziehungsweise $P_{m+k} - P_m$ bestritten werden soll.

Die Creditvereine und ihre innere Organisation.

I.

Eine der wichtigsten finanziellen Institutionen ist vom volkswirthschaftlic **Standpunkte** die der Creditvereine, da in derselben eine der Hauptschlagadern **commerciellen** Verkehres mündet und auf diese Weise zugleich die Verbindung **Waarenmarktes** mit dem grossen Geldmarkte herstellt. Die wahre Bedeutung **Credites** muss im kaufmännischen Sinne gewürdigt werden, um seinen ungeheu **Einfluss** auf das Gebiet des Handels, des Gewerbes und der Industrie ermessen **können**: sein Vorhandensein bedeutet den Aufschwung, sein Schwinden den Nie **gang** in volkswirthschaftlichen Sphären und wird derselbe daher als Massstab **allgemeinen** commerciellen Verhältnisse betrachtet Es ist somit erklärlich, dass **Institution**, die sich zur Aufgabe macht, den allgemeinen Credit zu heben und **estigen**, von Seite der Staatsverwaltung das grösste Entgegenkommen verdient. **innere** Organisation eines solchen Vereines muss aber auch darnach angethan s **um** allen den Anforderungen, die sein Zweck involvirt, in ausgedehntestem M **zu** entsprechen. Es muss sowohl das Interesse der einzelnen Mitglieder als auch **der** Gesammtheit voll und ganz gewahrt werden. Um dies zu ermöglichen, sind **schiedene** Momente in Betracht zu ziehen, welche geeignet sind, einen Verein, welc **gut** organisirt ist, vor Eindringlingen zu schützen, die durch Inanspruchnahme e **ihre** Verhältnisse übersteigenden Credites eventuell dem Vereine Verluste zufü **und** hiedurch die übrigen Mitglieder schädigen könnten. Ein Creditverein soll **seine** Mitglieder aus der Classe der gutsituirten Geschäfts- und Gewerbsleute wäh **um** ihnen Gelegenheit zu bieten, im Falle eventueller momentaner Geldverlegen **sich** ohne besonderen Zeitverlust billiges Geld zur Deckung fälliger Verbindlichke **verschaffen** zu können, darf aber nie das Interesse eines Institutes, welches se **Gelder** investiren will, demjenigen der Mitglieder vorziehen. Die statutarischen **stimmungen**, wie selbe zumeist gehandhabt werden, sind nicht immer darnach an **than**, um obigen Anforderungen zu entsprechen. Ein dem Vereine beitretendes M **glied** ist verpflichtet, eine Einlage von 5% und mehr desjenigen Betrages, bis **welchem** sein Credit ausgedehnt werden soll, verzinsbar zu hinterlegen; die Zin **und** Zinseszinsen derselben dienen in erster Linie zur Deckung etwaiger Verl **des** Vereines, zu welchem Behufe jedoch auch die eigentliche Einlage im eventue **Falle** herangezogen werden kann, welche sodann durch das Mitglied zu seiner ursprü **lichen** Höhe wieder ergänzt werden muss. Das Mitglied ist berechtigt, **denjenigen** Betrag als Credit zu beanspruchen, welcher der zwanzigfachen Einl **entspricht** und ist auch die Zeit, bis zu welcher das Anlehen beglichen sein m **statutarisch** beschränkt und festgesetzt, wobei auch die Eventualität von Prolon **tionen** im berücksichtigungswürdigen Falle in Betracht gezogen wird.

Schliesslich wird im Falle des Austrittes aus dem Vereine die Einlage n Abzug des von dem Mitgliede zu tragenden eventuellen Verlustantheiles, demsel wieder rückerstattet.

Man ersieht hieraus, dass für jeden von einem einzelnen Mitgliede verursach Verlust die Gesammtzahl der übrigen mit ihrer Einlage haftet, ungeachtet des dass der Schuldner mit seinem Vermögen in erster Linie für die Forderung Vereines einsteht. Soweit hätte es den Anschein, als ob ein solcher Verein gar in die Lage kommen könnte, eventuelle grössere Verluste zu erleiden; und doch zur Genüge bekannt, welche Gefahren in kritischen Perioden auf einen solchen h aufbeschworen werden können. Ein Institut, welches einen Creditverein gründet, seine flüssigen Gelder sicher und mit einem entsprechenden Zinsfuss investiren können, wird wohl in ruhigen Zeiten sehr schöne Resultate aufzuweisen haben, nicht der Geldgeber, sondern die Mitglieder für eventuelle einzelne Verluste ihrer Einlage aufkommen müssen; und wenn auch ein oder das andere Mitgl durch erlittene andere Geschäftsverluste stark in Mitleidenschaft gezogen wer sollte, so dass sein Credit darunter leidet, so wird es sich desto mehr an den Ver anzuklammern suchen, um sich vielleicht wieder zu erholen, und wird gerne se Einlage wieder auf die ursprüngliche Höhe ergänzen. Doch halt — ein solches M glied bildet bereits ein erhöhtes Risico für den Verein.

Nie wird eine Krise auf einmal hereinbrechen; grosse Ereignisse werfen i Schatten voraus; nur auf diese Weise wird sich die Anzahl jener risicoschwange Mitglieder mehren und den Fall einer eventuellen Katastrophe vorbereiten.

Dies ist jedoch ausgeschlossen, wenn die Verwaltung mit der nöthigen Rigo sität in der Wahl der Mitglieder des Vereines vorgeht und überdies von Zeit Zeit den Credit derselben nach Aussen Revue passiren lässt, d. h. über deren V trauenswürdigkeit von Fall zu Fall sich informirt. Sie darf aber auch die gebot Vorsicht nicht übertreiben und durch zu grosse Subtilität unnütze Zeit verschwend da hiedurch der Beitritt selbst gutsituirter Mitglieder erschwert wird, was nie Nutz und Frommen des Vereines sein könnte, denn je mehr Mitglieder ein solch besitzt, desto geringer werden die Quoten, welche im Falle eines Verlustes auf je einzelne entfallen, und muss es daher auch im Bestreben der Verwaltung gele sein, so viel Mitglieder als möglich zu gewinnen, um die Einlage eines jeden E zelnen vom Risico entsprechend zu entlasten.

Wir sehen daher, dass es verfehlt wäre, eine Institution ähnlicher Art drakonischen Satzungen auszustatten, da hiedurch dem Zwecke schlecht entsproch wäre, jedoch ist es immerhin nothwendig, den Verein in geeigneter Weise schlechtem Zuzug zu schützen, und überdies den Grad der Zahlungsfähigkeit einzelnen Mitglieder zu prüfen. Hieraus ergibt sich nun eine eventuelle Reguli des den einzelnen Mitgliedern jeweilig zu gewährenden Credites, mit welcher Rückerstattung der Mehreinlage bei Kürzung desselben verbunden wäre. Ob inwiefern diese Massnahme zur Durchführung gelangen könnte, ohne dem Rufe betreffenden Mitglieder nachtheilig zu sein, mag in einer späteren Erörterung Ausdrucke gelangen.

Aber auch in anderer Beziehung soll einer unverhältnissmassigen Inanspru nahme des Credites Einhalt gethan werden. Es gibt Geschäftsleute, die in richtigen Voraussicht, bei einem Creditvereine nur denjenigen Credit zu erhalt

[illegible] als [illegible] ver- [illegible] benden. [illegible] besonders [illegible] det er- [illegible] zelnen [illegible] kurz [illegible] überdies [illegible] einzelnen [illegible] die eine [illegible] und [illegible] gleichzeitig [illegible] wirkenden [illegible] festzu- [illegible] glauben [illegible] vorzu- [illegible] handelt.

[illegible] finden. [illegible] der letzteren [illegible] Falle das [illegible] nicht einer [illegible] eine solche [illegible] statuta- [illegible] an ein Mitglied [illegible] Verein vor [illegible] bestreiten, dass [illegible] wenn zwei [illegible] unterstützen. Es [illegible] eines solchen

[illegible] festzustellen, unter [illegible] Vorbehaltung, dass [illegible] Deckung derselben [illegible] gelten.

[illegible] die Einlage eines Mitgliedes [illegible] Zinsen und Zinseszinsen nach [illegible] das entsprechende Darlehen derselben repräsentiren?

Zur Beantwortung dieser Frage gilt im Falle [illegible] des Darlehens die Einlage [illegible] Formel

$$(1 + p) = [illegible]$$

[illegible] p den Percentsatz, mit welchem die Einlage verzinst wird und n [illegible] liche Dauer bezeichnet

Nehmen wir beispielsweise $P = 4\%$ an, so erhalten wir

2) $$n = \frac{lg\ 21}{lg\ 1{\cdot}04} = 77{\cdot}625 \text{ Jahre.}$$

Wenn daher eine Firma, welche circa 78 Jahre einem Vereine angehört, n[illegible] Ablauf dieser Zeit derart zahlungsunfähig werden sollte, dass der Verein des gan[illegible] der ursprünglichen Einlage entsprechenden Darlehens verlustig werden würde, wäre dieser Verlust schon durch die angewachsenen Zinsen und Zinseszinsen [illegible] Einlage gedeckt.

Die derzeitige Zulässigkeit eines Verlustes bei jedem einzelnen Mitgliede daher ein $^1/_{78}$ multiplicirt mit der Anzahl der Jahre seiner gegenwärtigen M[illegible]gliedschaft.

Wenn daher ein Verein gegenwärtig M Mitglieder besitzt, von denen [illegible] Anzahl m_1 im ersten Jahre, eine Anzahl m_2 im zweiten, m_3 im dritten u. s. f. [illegible]getreten ist, so wird folgende Form die Zulässigkeit eines Verlustes im Allgemei[illegible] darstellen.

3) $$W_1 = {}^1/_{78}\ (m_1\ [k-1] + m_2\ [k-2] + m_3\ [k-3] + \ldots + m_k)$$

Die Zulässigkeit, dass der Creditverein zwei Verluste in einem Jahre erlei[illegible] könnte, ist

4) $$W_2 = ({}^1/_{78})^2\ (m_1\ [k-1] + m_2\ [k-2] + m_3\ [k-3] + \ldots + m_k$$

Die Zulässigkeit dreier Verluste in einem Jahre ist

5) $$W_3 = ({}^1/_{78})^3\ (m_1\ [k-1] + m_2\ [k-2] + m_3\ [k-3] + \ldots + m_k)$$

u. s. f.; somit die Gesammtzulässigkeit der Verluste in einem Jahre

6) $$W_k = \left(\frac{({}^1/_{78})^k - 1}{{}^1/_{78} - 1} - 1\right)(m_1\ [k-1] + m_2\ [k-1] + m_3\ [k-3] + \ldots +$$

worin k die Dauer des gegenwärtigen Bestandes darstellt.

Wenn wir nun W_k mit der im k ten Jahre ermittelten Durchschnittsei[illegible] eines einzelnen Mitgliedes multipliciren, erhalten wir den Betrag der in diesem J[illegible] zulässigen etwaigen Verluste, welche ohne Inanspruchnahme der Einlagen von d[illegible] Zinsen und Zinseszinsen gedeckt werden können, ohne die Zulässigkeit der Rese[illegible]fondsverminderung zu überschreiten.

Dr. Ludwig Grossmann's

athematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven.

I.

Die Feuerversicherung ist einer jener Versicherungszweige, bei welchen die an-
nde Uebereinstimmung der erfahrungsgemässen Voraussicht in Betreff des Risicos
den sich ergebenden wirklichen Schäden nur unter gewissen Umständen zu
kstelligen ist, was zur Folge hat, dass die nöthigen Brandschaden-Reserven
st höher angenommen werden müssen als es die dem vorhandenen Risico ent-
hende Bemessung erheischen würde. Man will durch diese Massregel Eventuali-
vorbeugen, die im Falle unvorhergesehener, den erfahrungsgemässen Durch-
t übersteigender Schäden eintreten könnten.

Der Grund dieser Erscheinung ist nicht schwer zu ermitteln, wenn man bedenkt,
welch' weitgehenden Einflüssen die Schwankung der Brandschaden-Ergebnisse
llgemeinen abhängt. In der Statistik der Feuerschäden gibt es eine ganze Reihe
intensiv wirkender Ursachen, die sich in den verschiedenen Jahren in ungleichem
se geltend machen und geeignet sind, die bewährtesten Erfahrungen periodisch
surdum zu führen. So spielen die meteorologischen Verhältnisse eine bedeutend
re Rolle als bei der Sterblichkeit, wo die Wirkungen derselben doch auch sehr
end sind; und geradezu von einschneidender Wirkung können ökonomische
ltnisse unter Umständen werden, indem sie Brandstiftungen hervorrufen, abge-
davon, dass man es in schlechten Zeiten unterlässt, die Baulichkeiten im
en Stand zu halten. Zum Theil lässt sich jedoch diese Reihe von Ursachen,
auf die Variation der Brandschaden-Ergebnisse einen so gewaltigen Einfluss
eliminiren, wenn man anstatt der einzelnen Jahresperioden eine längere Dauer
nheit benützt. In einer solchen längeren Periode werden sich die verschiedenen
hen wahrscheinlich zum Theile aufheben, indem innerhalb derselben sowohl
ls schlechte, trockene als nasse Jahre etc. vorkommen. Diese Ursachen können
bis zu einem gewissen Grade periodische genannt werden; insofern sie dies
sind, liegen selbe ausserhalb der menschlichen Berechnung und es wäre daher
, sie in Betracht ziehen zu wollen.

Es können aber auch andere Momente in dieser Beziehung eine Rolle spielen
war solche, die auf Ausdehnung eventueller Brandschäden von Einfluss sind.
d Verbesserungen und Vorkehrungen in Betreff der Feuerlösch-Anstalten,
ungen auf dem Gebiete der Baukunst zum Schutze gegen Feueransteckung,
re Bauart im Allgemeinen u. A. m., Factoren, die geeignet sind, die Frequenz
randschäden um ein Bedeutendes vermindern. Die einzigen der mathematischen
tik zugänglichen sind die sogenannten zufälligen Ursachen, von denen man
pten kann, dass sich die Schwankungen derselben in desto grösserem Maasse
ben, je mehr Erfahrungen man ins Auge fasst. Wir kommen daher zu dem
sse, dass die Resultate, welche sich aus einem statistischen Materiale ergeben,
hinreichen, um selbe zu Voraussetzungen benützen zu können und müssen wir

uns daher darauf beschränken, diejenigen Grenzen festzusetzen, welche
Schwankungen nach der einen oder anderen Seite hin wahrscheinlicherwei
überschritten werden.

Zu diesem Behufe wollen wir uns die in einer früheren Abhandlung u
Titel: „Mathematische Limitirung der Feuerversicherungs-Prämie" aufg
Principien zu Nutze machen und mit Hilfe derselben diejenigen Grenzen fe
innerhalb welcher sich die Wahrscheinlichkeit etwaiger Schäden bewegt. Die
Abhandlung auf Grund statistischer Daten beruhenden Prämienbemessunge
uns ein vergleichendes Bild der einzelnen Risiken mit Zugrundelegung e
gegenwärtigen Gefahrenverhältnissen entsprechenden Grundprämie, die a
früheren Auseinandersetzungen gemäss eine von den wirthschaftlichen und m
auf Vorkehrungen gegen Brandschaden veränderlichen Verhältnissen abhängig
ist, welche gewissermassen das bestehende Normalrisico repräsentirt. Bei ver
Verhältnissen müsste daher das Normalrisico und demgemäss auch die Grun
eine entsprechende Veränderung erleiden.

Was jedoch die einzelnen Gefahrmomente und die mit denselben co
direnden Gefahräquivalenten, beziehungsweise deren Summen betrifft, von d
Prämienbemessung abhängt, so unterliegen diese blos insofern dem Einflusse
Veränderungen, als deren Schätzung in einzelnen Fällen durch neugeschaffene
vorkehrungen eine Reduction erleidet. Da aber deren Intensität ohnehin nac
gabe der vorhandenen Feuergefährlichkeit mit Berücksichtigung aller Ums
Anschlag gebracht wird, so erscheint eine diesbezügliche Reflexion überflüss
starren Formen des Verhältnisses, welches sich in der diesbezüglichen An
Gefahreinheiten kundgibt, bleiben unter allen Umständen dieselben. Auf dies
werden wir daher unsere weiteren Untersuchungen anstellen, indem wir die Ab
keit der Gefahreffecte von der jeweiligen Anzahl der Gefahreinheiten zur G
unserer Rechnung machen.

Greifen wir daher auf die in der besagten Abhandlung allgemein gilti
bezügliche Form 5) zurück, welche folgendermassen lautet:

$$\varepsilon = \frac{s + n_0}{n_0^2} \, lg \, \frac{s + 1}{n_0 \, (n_0 - 1)}$$

und in welcher ε den Gefahreffect, $s = g \,.\, \Sigma\sigma$ die Summe der Gefahräqui
gleich dem Producte der vorhandenen Gefahreinheiten $\Sigma\sigma$ und der Grund
bezeichnet; n_0 ist constant und stellt bekanntlich die Anzahl der der Gru
entsprechenden Gefahrmomente dar, welche das sogenannte unserer Rechn
grundegelegte Normalrisico repräsentiren, für welches auch die in Anbetracht
Grundprämie massgebend ist.

Insofern nun die Anzahl jener der Gefahreinheitensumme entsprechende
momente grösser oder kleiner als n_0 ist, wird auch das diesbezügliche Ri
Unter- oder Ueberbietung des Normalrisicos hervorrufen. Da jedoch n_0 Gefahr
ebenso gut, und zwar je nach ihrer Intensität eine grössere wie auch
Anzahl von Gefahreinheiten repräsentiren können, so ergibt sich daraus,
Gefahreffect nur unter der Bedingung, als die Anzahl der normalen Gefahrmo

einer gewissen Anzahl von Gefahreinheiten entspricht, das Normalrisico darann.

nn diese Bedingung nicht festgehalten werden würde, so könnte beispiels- n_0 Gefahrmomenten eine solch' grosse Anzahl von Gefahreinheiten enthalten s hiedurch das Normalrisico längst überschritten wäre. In anderer Beziehung er auch möglich, dass ein einziges Gefahrmoment so viel Gefahreinheiten in t, dass dieselben zwei- und dreimal das Normalrisico übersteigen. Aus diesem ist eine gewisse Vertheilung der Gefahrintensität auf die einzelnen, dem isico entsprechenden n_0 Gefahrmomente nothwendig; und können wir dies als es Charakteristikon dieses Systems hinstellen, dass ein gewisses Werthmass zelnen Gefahrmomente nicht überschritten werden darf, wenn das Normalem ein Gefahreffect von $\varepsilon = o$ entspricht, zur Geltung kommen soll. Die jener für n_0 Gefahrmomente beim Normalrisico giltigen Gefahreinheiten ist :

$$\Sigma\sigma = \frac{s}{g} \quad , \quad s = n_0\,(n_0 - 1) - 1$$

: diese Anzahl eine geringere als die in dieser Form ausgedrückte, so wird ahreffect ein negativer, demgemäss die entsprechende Prämie kleiner wird als ndprämie. Der Gefahreffect ist also jener Factor, welcher im Falle der Nichttimmung obiger Bedingungen in Action tritt; und zwar im positiven Sinne, is Normalrisico überschritten, im negativen, wenn dasselbe durch die Umunterboten wird. An das so präcis begrenzte Normalrisico reihen sich nun ie übrigen grösseren und kleineren Risiken in demselben Sinne an, so dass irch Summirung aller überhaupt möglichen Risiken, beziehungsweise deren n und positiven Effecte, zwei diesbezügliche Ergebnisse erhält, und zwar die der negativen und jene der positiven Effecte.

uf diese Weise ist es auch möglich, diejenige Grenze festzusetzen, bis zu sich positive und negative Effecte gegenseitig aufheben. Die innerhalb dieser sich befindlichen Risken werden nun dem Schadeneffect des Normalrisicos hen, welcher mit Rücksicht auf seine Beschaffenheit als minimal angenommen kann. Die Brandschadenreserve, welche auf Grund dieses Schadeneffectes sich ortionalen Sinne zur Grundprämie ergeben muss, wird für alle durch die Grenze inbegriffenen Risken zur Schadendeckung vollständig hinreichen.

m nun zu diesem Ziele zu gelangen, werden wir zum Zwecke der Summimmtlicher Gefahreffecte, die Fläche der Effectcurve zu ermitteln suchen und demgemäss allgemein

$$F = \int \varepsilon \, d\,s$$

h vollzogener Substitution des Werthes für den Gefahreffect ε

$$\varepsilon = \frac{s + n_0}{n_0^2}\, lg \,\frac{s + 1}{n_0\,(n_0 - 1)}$$

wir mit Zuhilfenahme des Modulus $\mu = 0{\cdot}4342945$ mittelst dessen der he Logarithmus lg in den natürlichen l verwandelt wird, das Integrale

$$F = \mu \int \frac{s + n_0}{n_0^2}\, l\, \frac{s + 1}{n_0\,(n_0 - 1)}\, d\,s + C$$

welches nach durchgeführter Integration zu folgendem Resultate führt:

$$5)\qquad F = \left(1 + \frac{s-1}{2n_0}\right)\frac{(s+1)\,(lg\,(s+1) - \mu)}{n_0} + \frac{\mu}{4n_0^2}\,(s+1)^2 - \left(1 + \frac{s}{2n_0}\right)\frac{s.\,lg\,n_0\,(n_0 - 1)}{n_0} + C$$

für $s = 0$ muss auch $F = 0$ werden und wir erhalten daher als eigentlichen W
der Constante

$$6)\qquad C = \left(1 - \frac{1}{2n_0}\right)\frac{\mu}{n_0} - \frac{\mu}{4n_0^2}$$

Diese Formen werden wir nun praktisch sowohl auf das Fabriken- als
Gebäude-Risico anwenden können.

Für Fabriken-Risico ist bekanntlich der Werth für $n_0 = 3$; demnach üb
die Form 5) in folgende

$$7)\quad F = \frac{1}{18}(s+5)(s+1)(lg\,(s+1) - \mu) - \left(1 + \frac{s}{6}\right)\frac{s\,lg\,6}{3} + \frac{\mu(s+1)^2}{36}$$

Die Fläche F wird nun in der Form 7) vom Nullpunkte angefangen im
tiven Sinne wachsen; und zwar bis zu jener Grenze, wo s den dem Norma
entsprechenden Werth 5 erreicht hat; von da angefangen wird der Gefahreffe
positiver werden und somit die Gesammtfläche F negativ im Abnehmen be
sein; und zwar aus dem Grunde, weil nunmehr der Gefahreffect im Gegensatz
früheren positiv, und daher auch die entsprechende Fläche eine in der po
Coordinatensphäre liegende ist.

Demnach wird die Differenz zwischen der in der negativen und jener
positiven Coordinatensphäre liegenden Fläche das negativ im Abnehmen beg
Flächenausmass insolange bilden, als nicht diese Differenz 0 wird.

Bei weiterem Wachsthume des positiven Gefahreffectes wird von da ange
die Fläche F positiv zunehmen.

Jene die Fläche F begrenzende Curve (3) muss daher im Punkte s
welcher der das Normalrisico bezeichnenden Gefahräquivalentensumme entspric
Abscissenaxe schneiden, da die Curve in diesem Punkte aus der negativen
positive Coordinatensphäre übergeht. Demgemäss wird jener vom Punkte $s =$
$s = 5$ laufende Curventheil die negativ liegende, und der vom Punkte $s =$
der positiven Sphäre weiter laufende Curventheil die positiv liegende Fläche beg
Diese beiden im entgegengesetzten Sinne bezeichneten Flächentheile werden n
die Gleichung (7) insofern einen Einfluss üben, als das Flächenresultat F bi
Punkte $s = 5$ den ganzen dem Punkte entsprechenden negativ liegenden Fl
raum, jedoch von da angefangen blos die Differenz zwischen diesem und de
sich positiv ergebenden Flächentheile darstellen wird.

In Folge dessen werden wir zu einem Punkte in der positiven Sphäre ge
müssen, in welchem die Grenze jenes Curventheiles sich befindet, von welche
ebenso grosse positive Fläche begrenzt wird, als es die bis zum Punkte $s = 5$ rei
negative ist. Diese beiden Flächen werden sich daher im Sinne des oben Ange
gegenseitig aufheben und wird daher in der Form (7) für diesen Fall $F = 0$
müssen.

Die Creditvereine und ihre innere Organisation.

II.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema sind wir bei den Untersuchungen die Zulässigkeit der Verluste bei der Gebarung der Creditvereine zur folgenden meinen Form gelangt

$$W_k = \left(\frac{\left(\frac{1}{78}\right)^k - 1}{\frac{1}{78} - 1} - 1\right)[m_1(k-1) + m_2(k-2) + m_3(k-3) + \cdots m_{k-1}]$$

welcher die Summe der Verluste mit der Bestandesdauer des Vereines in geradem hältnisse zunimmt; und zwar bis zu einer gewissen Grenze, welche in dem nor-en Verlust-Percentsatze daselbst ihren Ausdruck findet. Es liegt in der Natur Dinge, dass auch das Risico eines Verlustes bei einem einzelnen Mitgliede mit der r seiner Mitgliedschaft insofern wächst, als man von dem allgemeinen Standpunkte eht, dass unbestimmbare Einflüsse auf die Verhältnisse eines jeden Individuums rt einwirken können, um seine Zahlungsunfähigkeit herbeizuführen.

Im Falle aber auch der Moment der Zahlungsunfähigkeit bei einem einzelnen gliede eintritt, so kann offenbar die Beschaffenheit des Verlustes eine unter-edliche sein, denn dieselbe hängt in einer Beziehung von der Höhe des Dar-ns, in anderer Beziehung von der Möglichkeit einer eventuellen theilweisen oder lichen Einbringbarkeit ab.

Die Dauer der Mitgliedschaft ist in einem solchen Falle insofern von Belang, s betreffende Mitglied mit seiner Einlage und deren Zinsen und Zinseszinsen, Theil des dem Vereine zugefügten Verlustes deckt. Je länger es also dem ne angehört, desto grösser wird die mit Zinsen angewachsene Einlage sein, desto mehr ist der Verein im Stande, seinen erlittenen Verlust zu vermindern.

Ein Mitglied, welches bereits mehrere Jahre einem solchen Vereine angehört, n Credit also bereits Stabilität besitzt, wird daher blos ein Normal-Risico für den n bilden, dessen Steigerung gegenüber der in der Dauer seines Bestandes nach-esenen Existenz-Bedingung eine minime ist.

Die Steigerung des Risicos wird daher blos bei einem neu beigetretenen Mit-de zur Geltung kommen können, da durch den genannten Factor, demgemäss nach r gewissen Zeit die Stabilität des Credites eintritt, auch das Risico ein fixes und somit nach einer bestimmten Dauer die Steigerung desselben behoben wird. in der Form 6) enthaltene Factor

$$a = \frac{\left(\frac{1}{78}\right)^{k^1} - 1}{\frac{1}{78} - 1} - 1$$

gt die Art der Steigung für das durchschnittliche Risico in seiner Zeitabhängig-t zum Ausdrucke; und zwar in folgender Weise:

Das zunehmende durchschnittliche Risico neu eingetretener Mitglieder kann n am leichtesten beurtheilen, wenn man dasselbe nach der Constituirung eines editvereines beobachtet, und zwar blos die Anzahl der im ersten Jahre vorhandenen tglieder in Betracht zieht.

Im $k$ten Jahre des Bestandes wird der Factor a successive nachstehe
Werthen entsprechen.

$$
8) \quad \begin{array}{ll}
k = 1 & a = 0 \\
k = 2 & a = 0·0128210 \\
k = 3 & a = 0·0129854 \\
k = 4 & a = 0·0129865 \\
k = 5 & a = 0·0129875
\end{array}
$$

Vom fünften Jahre angefangen, ist nun die weitere Steigerung eine so
schwindend kleine, dass man dieselbe ohneweiters ausser Acht lassen kann. In
dessen wird die Steigerung des Risicos in Betreff seiner Zeitabhängigkeit fü
weitere Mitgliedsdauer als nahezu gleichmässig betrachtet werden können. Die gr
Steigerung wird das Risico zwischen dem ersten und zweiten Jahre der Mitg
schaft erfahren, da innerhalb dieser Zeit gewissermassen der kritische Momen
die Creditfähigkeit der Mitglieder sich befindet. Auffallend erscheint es jedoch,
das Risico a im ersten Jahre $= o$ ist. Wenn man jedoch bedenkt, dass
Verein die Creditfähigkeit beim Eintritte einer genauen Prüfung unterzieht
deren Verminderung innerhalb des ersten Jahres nicht leicht vorauszusetzen is
ist die Deutung dieses Umstandes keine schwere.

Es mag nun untersucht werden, ob und von welchem Einflusse die Anzahl
Mitglieder auf die Eventualität eines Verlustes ist.

Je ausgebreiteter ein Creditverein ist, desto eher ist die Möglichkeit eines
lustes zu erwarten; da jedoch zugleich mit der zunehmenden Anzahl der Mitgl
die Empfindlichkeit des Verlustantheiles für jedes einzelne abnimmt, so bleibt
die Frage offen, in welcher Weise der Einfluss dieser beiden gegeneinander wi
den Factoren sich äussert.

Insoweit das Risico der einzelnen Mitglieder in seiner Zeitabhängigke
verschiedenartiges ist, d. h. die Mitglieder ungleich lange dem Vereine ange
daher einzelne dem normalen Risico noch nicht entsprechen, muss eine Verme
derselben, trotz der hiedurch verminderten Verlustantheile, eine Erhöhung des Ges
risicos herbeiführen. Erst dann, wenn sämmtliche Mitglieder die ersten fünf
ihrer Vereinsangehörigkeit überschritten haben, hört der Wachsthum des Ges
risicos mit Rücksicht auf die Vermehrung der Participirenden auf. Da nun a
den späteren Jahren neue Mitglieder beitreten, die dem Gesagten zufolge ei
alten Mitgliedern unverhältnissmässiges Risico bilden, so ist es nothwendig,
Modus zu schaffen, der geeignet ist, in dieser Beziehung ausgleichend zu w

Um diesfalls zum Resultate zu gelangen, ist es von Belang, festzustellen,
welchen Umständen ein neu einzutretendes Mitglied ein Risico bildet, welc
seiner Unverhältnissmässigkeit das der übrigen tangirt. Da nun die Höhe d
gewährenden Darlehens mit der Creditfähigkeit in Uebereinstimmung gebracht w
soll, deren Stabilisirung den vorangegangenen Erörterungen gemäss erst nac
fünften Jahre der Mitgliedschaft eintritt, und daher vor Ablauf des Quinque
nicht im vollen Maasse zur Geltung kommen kann, so ist es klar, dass bi
gewisse zeitliche Begrenzung der Darlehensgewährung statthaben muss, wel
einer dermaligen nur theilweisen Anerkennung der vorhandenen Creditfähigke

dung hat; und zwar in dem Falle, als der unter den Auspicien der Sicher- gewährende Credit den beziehungsweisen zwanzigfachen Betrag der Durch- seinlage zur Zeit des Beitrittes übersteigt. Wird diese Grenze durch den Credit neuen Mitgliedes nicht erreicht, so ist ohnehin die Vorbedingung eines in Sinne geringeren Risicos gegeben. Die Opportunität, neu eintretenden Mit- rn für die ersten fünf Jahre nur den in besagter Weise begrenzten Credit zu ren, ist also nur in dem Falle geboten, als deren Creditfähigkeit eine höhere die durchschnittliche der alten Mitglieder. Erst nach Ablauf einer fünfjährigen iedschaft kann die Verwaltung diesen Credit eventuell bis zur entsprechenden ergänzen.

Greifen wir nun zu der Formel 6) zurück, welche uns die Gesammtzulässigkeit Verluste im letzten Jahre des Bestandes repräsentirt und untersuchen, wie sich lbe gestalten müsste, um die zulässigen Verluste während der ganzen Bestandes- darzustellen.

Durch Substitution in die Formel 6) bei einer Bestandesdauer von $k = 1, 2,$ ... Jahren, erhalten wir als Zulässigkeit an Verlusten im entsprechenden n Jahre für

$$k = 1 \qquad W_k = 0$$
$$k = 2 \qquad W_k = a\, m_1$$
$$k = 3 \qquad W_k = a\,(2\, m_1 + m_2)$$
$$k = 4 \qquad W_k = a\,(3\, m_1 + 2\, m_2 + m_3)$$
$$k = 5 \qquad W_k = a\,(4\, m_1 + 3\, m_2 + 2\, m_3 + m_4)$$

.; demgemäss ergibt sich

$$\Sigma\, W_k = a \left[\binom{k}{2} m_1 + \binom{k-1}{2} m_2 + \binom{k-2}{2} m_3 + \cdots + \binom{2}{2} m_{k-1}\right]$$

rmel für die Zulässigkeit der Gesammtverluste während der ganzen Bestandesdauer.

Wir wollen nun, um einem besseren Verständnisse obiger Auseinandersetzungen uhelfen, folgendes Beispiel durchführen.

Die Bestandesdauer eines Creditvereines mag acht Jahre sein, während welcher im ersten Jahre 40, im zweiten 25, im dritten 30, im vierten 16, im fünften 10, chsten 22, im siebenten 12 und im achten 19 Mitglieder beigetreten sind. Es e Frage, a) welche Zulässigkeit an Verlusten repräsentiren die einzelnen Jahr- , b) wie gross ist dieselbe während der ganzen Bestandesdauer und c) in welchem ltnisse stehen die zulässigen Verluste zum 4percentigen Zinsenertrage der Einlagen.

Unserer Aufgabe zufolge ist

$$m_1 = 40, \quad m_2 = 25, \quad m_3 = 30, \quad m_4 = 16,$$
$$m_5 = 10, \quad m_6 = 22, \quad m_7 = 12, \quad m_8 = 19.$$

Demgemäss erhalten wir mit Rücksicht auf die entsprechenden Jahrgänge durch itution in die Formel 6) mit Hinzuziehung der Factoren in 8) und 9) für

$$k = 1 \qquad W_k = 0$$
$$k = 2 \qquad W_k = 0{\cdot}512840$$
$$k = 3 \qquad W_k = 1{\cdot}363467$$
$$k = 4 \qquad W_k = 2{\cdot}597300$$
$$k = 5 \qquad W_k = 4{\cdot}039113$$

$$k = 6 \qquad W_k = 5·610600$$
$$k = 7 \qquad W_k = 7·467813$$
$$k = 8 \qquad W_k = 9·480875$$
$$k = 9 \qquad W_k = 12·208250$$

worin der hier in Rechnung kommende Factor a vom fünften Jahre angefangen gleich bleibt und die Zulässigkeit der Verluste im neunten Jahre aus den vo gehenden Jahrgängen sich ergibt.

Die Gesammtzulässigkeit der Verluste während der ganzen Bestandesdauer bis Schlusse des achten Jahres ist $\Sigma\, W_k = 31·0720$

Zinsen wir nun die in den einzelnen Jahrgängen beigetretenen Mitglieder nach Dauer ihrer Vereinsangehörigkeit auf; d. i. für eine beispielsweise Verzinsung Einlagen mit $P = 100p = 4\%$,

und bringen von der Aufgezinsten die ursprüngliche Anzahl wieder in Abrechn so ergeben sich

$$m_1\,([1+p]^8 - 1) = 14·7428 \qquad m_5\,([1+p]^4 - 1) = 1·6986$$
$$m_2\,([1+p]^7 - 1) = 7·8983 \qquad m_6\,([1+p]^3 - 1) = 2·7469$$
$$m_3\,([1+p]^6 - 1) = 7·9596 \qquad m_7\,([1+p]^2 - 1) = 0·9792$$
$$m_4\,([1+p]^5 - 1) = 3·4664 \qquad m_8\,([1+p] - 1) = 0·7600$$

als die während acht Jahren angewachsenen Durchschnittszinsen; und als Su dieser Factoren $Z = 40·2518$.

Wenn wir nun hievon die zulässigen Gesammtverluste während des Best von acht Jahren abziehen, so erhalten wir

$$Z - \Sigma\, W_k = 40·2518 - 31·0720 = 9·1798$$

als Reserve für zulässige Verluste der ferneren Jahrgänge.

Bei obiger durchgeführten Berechnung ist die Durchschnittseinlage sämmtl Mitglieder während der ganzen Bestandesdauer der Einfachheit halber als gl bleibend angenommen worden. Würde sich daher, wie dies gewöhnlich der Fa die Durchschnittseinlage von Jahr zu Jahr ändern, würde auch obiges Resultat gemäss eine Veränderung erfahren, wodurch jedoch die Zweckmässigkeit obiger stellungen keinen Abbruch erleiden würde.

Wie ersichtlich, sind auch die Intercalarzinsen für die Einlagen derje Mitglieder, welche im Laufe des Jahres dem Vereine beitreten, ausser Acht gela da dieselben zur Ersetzung der stornirten Zinsenerträgnisse aus den Einlagen Zahlungsunfähigen und daher ausgeschiedenen Mitglieder herangezogen werden.

Es ergibt sich daher bei einer Durchschnittseinlage von 500 fl. für die Su der angewachsenen Durchschnittszinsen

$$500\,.\,Z = \text{fl. } 20125·90$$

für die Summe der zulässigen Gesammtverluste während der Bestandesdauer

$$500\,.\,\Sigma\, W_k = \text{fl. } 15536·00$$

und als Reserve für fernere Jahre zu Beginn des neunten Jahrganges

$$R = \text{fl. } 4589·90,$$

womit ein entsprechender Modus für eine rationelle Gebarung der Creditvereine geboten

Dr. Ludwig Grossmann's

ıematische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven.

II.

gelang uns im ersten Theile dieser Abhandlung denjenigen Punkt theoretisch ıllen, bis zu welchem die Summe der positiven Gefahreffecte durch jene der n aufgehoben wird. Für Fabriken-Risico äussert sich nun diese Erscheinung Punkte $s = 9{\cdot}45$, welcher also daselbst die Grenze derjenigen Gefahräqui-ısummen bezeichnet, bis zu welchen sich die denselben entsprechenden Summen itiven und negativen Gefahreffecte gegenseitig ausgleichen. Alle jene Risken, sich innerhalb der Grenzen $s = 0$ und $s = 9{\cdot}45$ bewegen (siehe Prämien-38), werden also den Schadeneffect des Fabriken-Normalrisicos nicht über-n.

as nun das Gebäude-Risico anbelangt, so wird ein analoges Vorgehen in dieser ng uns zum erwünschten Resultate führen. Durch Substitution der entspre-i Factoren in die Formen 5) und 6) der vorigen Abhandlung erhalten wir n Werth:

r Gebäuderisico ist bekanntlich die mit der Grundprämie correspondirende omentenanzahl $n_0 = 2$, somit

$$= \frac{1}{8}(s+3)(s+1)(lg(s+1)-\mu) + \frac{\mu}{16}(s+1)^2 - \left(1+\frac{s}{4}\right)\frac{s\,lg 2}{2} + \frac{5\mu}{16}$$

wir für $F = 0$ die Werthe $s = 0$ und $s = 1{\cdot}89$ erhalten, welch' letzterer ier diejenige Grenze bezeichnet, in welcher die Summen der positiven und Gefahreffecte sich gegenseitig ausgleichen.

chdem wir nun diese Grenzen festgestellt haben, so erwächst uns die Frage, r Weise wird der Schadeneffect aus den gefundenen Resultaten zum Aus-langen können. Da für $s = 0$ der grösste negative und für $s = 9{\cdot}45$ gsweise $s = 1{\cdot}89$ der grösste positive Gefahreffect innerhalb dieser Grenzen t, so wird offenbar in der Summe dieser äussersten Gefahreffecte die Lösung Aufgabe liegen müssen.

ist nämlich bei

Fabriken-Risico			Gebäude-Risico	
$= 0$	$\varepsilon_1 = -0{\cdot}25938$	für	$s_1 = 0$	$\varepsilon_1 = -0{\cdot}15051$
$= 5$	$\varepsilon_2 = 0$	«	$s_2 = 1$	$\varepsilon_2 = 0$
$= 9{\cdot}45$	$\varepsilon_3 = 0{\cdot}33333$	«	$s_3 = 1{\cdot}89$	$\varepsilon_3 = 0{\cdot}15547$

en äussersten Grenzen des normalen Risicos sind somit, wie aus obigen Zahlen ht, ungleich weit von denjenigen Punkten entfernt, in welchen der Effect wird. Da jedoch die beiderseitigen Flächen gleich gross sind, so müssen auch die Intensitäten der Gefahreffecte auf derjenigen Seite grösser sein, her diese Distanz eine kleinere ist. Nun kann aber eine grössere Anzahl ungen mit kleinerem Gefahreffect nicht gleichbedeutend sein mit einer geri nzahl Versicherungen von grösserem Gefahreffect, und es ist demgemäss

dass in dieser absoluten Differenz, respective in dem Verhältniss einer solche
sonstigen Gefahreffect die Lösung unserer Aufgabe sich birgt. Es ist nämlich die
zwischen s_1 und s_2 bei Fabriken-Risico $d = 5$ zwischen s_2 und s_3, d
$d = 4{\cdot}45$; bei Gebäude-Risico zwischen s_1 und s_2 ist ferner $d = 1$ und zw
s_2 und s_3 schliesslich $d = 0{\cdot}89$.

Das Plus der Gefahreffecte muss sich daher in beiden Fällen in der po
Sphäre ergeben und ist in dem äussersten positiven Gefahreffecte ε_3 füglich
mal enthalten.

Das Verhältniss der absoluten Werthe der beiden äussersten Gefahreff
und ε_1 stellt den Werth der Durchschnittsintensität in positivem Sinne der
einheit gegenüber dar. Ferner ist das Quadrat *) des Verhältnisses des äus
positiven Gefahreffectes ε_3 zur beziehungsweisen Grundprämie g der Ausdru
normalen Wahrscheinlichkeit der Inanspruchnahme der ganzen Prämie und die
der Distanz $s_2 - s_3$ multiplicirt, liefert uns die Summe dieser Wahrscheinlic
zwischen den beiden Punkten s_2 und s_3.

Alle diese Momente als Factoren eines Productes dargestellt, drück
eigentlichen normalen Schadeneffect S aus, welcher sich insoferne äussert, d
demselben die wahrscheinlichermassen in Anspruch zu nehmende Prämienqu
Rahmen des normalen Risicos zur Geltung gelangt.

Wir erhalten demnach allgemein die Form:

$$S = \frac{\varepsilon_3^4 \; (s_2 - s_3)}{g^2 \varepsilon_1 \; (\varepsilon_3 + \varepsilon_1)}$$

und somit als normaler Werth des Schadeneffectes für Fabriken-Risico $S =$ 0
dagegen für Gebäude-Risico $S = 0{\cdot}30877$, wodurch die Grundlage zur
Berechnung der Brandschaden-Reserve geboten ist.

Der Schadeneffect wird aber nur insolange in obenbezeichnetem Sin
Geltung kommen können, als sämmtliche in seinen Bereich fallende Versich
summen mit den ihnen entsprechenden Risken umgekehrt proportional sind
nicht allein seine beziehungsweisen Gefahr-Aequivalenten, sondern auch di
sicherten Beträge sind massgebend für das Risico und es wäre daher o
das Product der der Grundprämie entsprechenden Gefahr-Aequivalentenanzal
des höchsten zur directen Versicherung zulässigen jeweiligen Betrages als Gr
für die Ausscheidung der sogenannten Excedenten, das ist der zur Rückdeck
zuweisenden Beträge aufzustellen. Dies hätte den Vortheil, dass Risken kl
Gefahreffectes mit grösseren Beträgen und solche grösseren Gefahreffect
kleineren Versicherungssummen zur directen Versicherung zugelassen werden

Um jedoch für alle Fälle den Anforderungen zu genügen, wollen wi
Modus schaffen, der geeignet ist, die mit höheren Summen zur Versicherung
genden Objecte, wenn dieselben nicht durch Rückversicherung auf da

*) Es müssen hier nämlich die Wahrscheinlichkeiten zweier Momente zu gleic
erfüllt werden, wenn der Schaden zur Geltung kommen soll, und zwar die Entstehu
Brandes und die Unmöglichkeit, denselben zur rechten Zeit noch zu ersticken.

ungsniveau der Uebrigen gebracht worden sind, sowohl in dieser Beziehung ich in Betreff ihrer Risicobeschaffenheit in Rechnung zu ziehen. Dies kann nur Weise erzielt werden, dass man die Beschaffenheit der einzelnen zur Ver-ung gelangenden Posten in beiden genannten Richtungen zum Ausdrucke t. Es mögen daher $a, b, c, d \ldots$ die einzelnen versicherten Beträge und $s_c, s_d \ldots$ die denselben entsprechenden Gefahr-Aequivalentensummen bezeichnen, gibt sich folgende Form als dem normalen Risico entsprechend:

$$\frac{a\,s_a + b\,s_b + c\,s_c \ldots k\,s_k}{s_2\,(a + b + c + d + \ldots + k)} = m$$

s_2 die der Grundprämie entsrechende Gefahr-Aequivalentenanzahl darstellt. isken, welche die Grenze des normalen Risicos überschreiten, wird das arithme-Mittel zwischen s_3 und sämmtlichen Gefahr-Aequivalentensummen bis zum en vorhandenen Risico die Stelle von s_2 in der Form 3) vertreten. Wir haben er mit zwei verschiedenen Gefahren-Kategorien zu thun.

Die Prämien, zwischen welche die in den Rahmen des normalen Risicos gehören-ersicherungen fallen, sind den Grenzen gemäss

bei Fabriken-Risico für $s = 0$ die Prämie $p = 2{\cdot}592$ ‰
" $s = 9{\cdot}45$ " $p = 4{\cdot}667$ ‰
bei Gebäude-Risico " $s = 0$ " $p = 1{\cdot}274$ ‰
" $s = 1{\cdot}89$ " $p = 1{\cdot}731$ ‰

rigen sind nicht in die Kategorie des normalen Risicos gehörend und unterliegen eiteren Procedur in Betreff der ihnen entsprechenden Formen. So wird die) für nicht normale Risken folgendermassen lauten müssen:

$$\frac{a\,s_a + b\,s_b + c\,s_c + \ldots}{q\,(a + b + c + \ldots)} = m'$$

das arithmetische Mittel der Gefahräquivalentensummen bezeichnet.

ber auch der Schadeneffect für nicht normale Risken wird eine Veränderung n, indem derselbe nicht mehr wie bei normalen Risken constant, sondern von igenden Gefahreffect abhängig gemacht wird. Er wird nämlich die Form

$$S' = S\left(1 + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_3}{\varepsilon_n}\right)$$

en; worin ε_n der dem bezüglichen nicht normalen Risico entsprechende Gefahr-t. Das Verhältniss des Zuwachses, um welchen der höchste Gefahreffect des Risicos ε_3 überschritten wird, zum ganzen dem betreffenden Risico anhaften-fahreffecte ε_n ist derjenige Factor, der mit dem normalen Schadeneffect multi-den Mehrwerth des nicht normalen gegenüber dem normalen darstellt.

Wir erhalten somit für die Brandschadenreserve zwei verschiedene Formen; ar für normale Risken

$$R = S \,.\, m \,.\, p$$

r nicht normale

$$R' = S' \,.\, m' \,.\, p$$

Es seien z. B. folgende Posten von normalem Fabriken-Risico zur directen Ver-ung gelangt:

Nr.	s_k	Versicherungs-Summe 1000 . k	Prämie	Prämien-Betrag	$k\,s_k$
1	1·40	5000	2·819	14·10	7
2	2·10	8000	2·931	23·45	16·8
3	2·80	13000	3·052	39·68	36·4
4	3·50	15000	3·184	47·76	52·5
5	4·20	20000	3·326	66·52	84·0
6	4·55	10000	3·400	34·00	45·5
7	4·90	8000	3·477	27·82	39·2
8	5·25	10000	3·557	35·57	52·5
9	5·95	15000	3·722	55·83	89·3
10	6·30	20000	3·808	76·16	126·0
11	6·65	20000	3·895	77·90	133·0
12	7·00	18000	3·986	71·71	126·0
13	7·70	15000	4·171	62·56	115·5
14	8·05	6000	4·266	25·60	48·3
15	8·40	16000	4·364	69·82	134·4
16	8·75	12000	4·463	53·56	105·0
17	9·10	20000	4·564	91·28	182·0
18	9·20	15000	4·594	68·91	138·0
19	9·40	18000	4·652	83·74	169·0
		264000		1225·97	1700·56

demgemäss ist nach der Form 3) $m = \frac{1700{\cdot}56}{5\,.\,264} = 1{\cdot}28826$

Die Reserve für den Posten 14 ist demnach, da der Schadeneffect $S =$

$$R = 0{\cdot}23335\,.\,1{\cdot}28826\,.\,4{\cdot}266 = 1{\cdot}28^0/_{00},$$

oder $30^0/_0$ der Prämie, was für alle übrigen Posten des normalen Risicos fü speciellen Fall gilt.

Anders verhält es sich jedoch bei nicht normalem Risico. Nehmen wi an, es wäre $m' = 1{\cdot}2$, also eine ziemlich verhältnissmässige Vertheilung d sicherungssummen, *) so würde sich für ein Risico, dem eine Prämie von also ein Gefahreffect von $\varepsilon_n = 0{\cdot}75143$ entspricht, die Brandschaden-Reser gendermassen ergeben:

$$R' = 0{\cdot}233351 + \left(\frac{0{\cdot}75143 - 0{\cdot}33333}{0{\cdot}75143}\right).\,1{\cdot}2\,.\,6{\cdot}13 = 2{\cdot}67^0/_{00}$$

oder $43{\cdot}58^0/_0$ der Prämie. Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass, je grö Anzahl der Versicherungen ist, desto mehr wird das wirkliche Schaden-Ergeb obiger Rechnung übereinstimmen.

*) Bei vollständig verhältnissmässiger Vertheilung sowohl der Risken als auch sicherungsbeträge müssen m und m' gleich 1 werden.

Die Creditvereine und ihre innere Organisation.

III.

Insoferne in den beiden früheren Abhandlungen die rationelle Entwicklung der Creditvereine ins Auge gefasst worden war, ist in dieser Beziehung einerseits entsprochen worden, anderseits aber ist es nothwendig, noch eine sachliche Ergänzung folgen zu lassen. Die Ausführungen, welche in mathematischer Form die Zulässigkeit der Verluste darstellen, involviren eine gewisse Abhängigkeit, und zwar erstens von der percentualen Höhe der Einlagen und zweitens von der Höhe ihrer Verzinsung. Sind daher die sich effectiv ergebenden Verluste grösser, als sie sich durch die angewendeten Normen und Verzinsungsgrundlagen in ihrer mathematischen Zulässigkeit ergeben, so wird offenbar theils die percentuale Höhe der Einlagen, theils ihre Verzinsung auf Grund eines erhöhten Escomptezinsfusses gesteigert werden müssen. Eine Inanspruchnahme der Einlagen selbst soll unter allen Umständen zum Nutzen des Vereines vermieden werden. Es fragt sich nun, in welcher Weise die mathematischen Normen in dieser Beziehung einen Aufschluss bieten können. Diese Frage beantwortet sich von selbst, wenn in Betracht gezogen wird, dass sowohl wirthschaftliche Verhältnisse als auch neue Mitglieder durch ihren Beitritt eine Veränderung der Prosperität herbeizuführen im Stande sind, und zwar aus dem Grunde, weil im ersteren Sinne eine Variation der Solvenz, im letzteren eine Veränderung der Constellation der inneren Verhältnisse eintritt. Aus dem Vergleiche zwischen den mathematisch ermittelten zulässigen und den in Wirklichkeit sich ergebenden Verlusten lässt sich die Grundlage zu einer eventuellen Steigerung der Sicherheitsnormen feststellen, und zwar ist dies der Beschaffenheit der mathematischen Formen gemäss im successiven Sinne möglich. Bei geringem Unterschied bedarf es keiner besonders eingreifenden Massnahmen und kann die Ergänzung durch eine temporäre Anpassung des Escomptezinsfusses erzielt werden. Divergiren jedoch die effectiven Verluste von der mathematischen Zulässigkeit in einer empfindlichen Weise, so wird es nothwendig, die percentuale Höhe der Einlagen entsprechend zu steigern, immerhin aber einen Theil der Differenz auf den Escomptezinsfuss überzuwälzen, da das in letzterer Beziehung den Mitgliedern auferlegte Opfer kein so empfindliches ist. Im Falle einer solchen Eventualität ist aber die Erhöhung der Sicherheitsnormen nicht nur derart geboten, dass hiedurch der einmalige Mehrbetrag der sich ergebenden Verluste gedeckt wird, sondern derselbe muss auch den Constellationen gemäss als auch für's nächste Geschäftsjahr voraussichtlich angenommen werden, weshalb mit der entsprechenden Erhöhung des Escomptezinsfusses nicht nur der einmalige Mehrverlust ergänzt, sondern auch dem nächsten vorgebeugt werden soll. Die in den früheren Abhandlungen ausgeführten mathematischen Formen bilden daher die Grundlage zur probeweisen Ermittlung der entsprechenden Sicherheitsnormen, welche sich somit erst nach einem längeren Bestande des Vereines den Anforderungen anpassen lassen. Ein Verein, welcher bereits eine längere Dauer seines Bestandes nachzuweisen in der Lage ist, bedarf solcher Hilfsmittel nicht mehr, da er bei vorausgesetzter guter Leitung die sogenannten Kinderkrankheiten bereits überwunden haben muss, wenn er lebensfähig sein soll.

nicht überstiegen haben. Ein solcher Verein könnte daher als bereits consoli
betrachtet werden.

Im Gründungsstadium eines ähnlichen Vereines wird es daher nothwendig se
um allen Eventualitäten vorzubeugen, den Escomptzinsfuss entsprechend höher
bemessen, welcher in den ersten Jahren beibehalten, die nöthigen Mittel zur Bildu
des eigentlichen Sicherheits- und Reservefonds bieten dürfte. Es hängt sodann v
den Verhältnissen ab, welche in wirthschaftlicher Beziehung die Prosperität d
Vereines bedingen, ob die Massgabe einer neuerlichen Regulirung des Escom
zinsfusses geboten, oder ob eine Ermässigung desselben angesichts der vorhanden
Resultate räthlich erscheint.

Unter den von Wiener Bankinstituten geschaffenen Creditvereinen zur a
schliesslichen Pflege des Escomptegeschäftes nimmt der Creditverein der Ers
Oesterreichischen Sparcasse, die ja in vielen Punkten ein wahres Bankinstitut
den zweiten Platz ein. Wenngleich die Creditvereine gegenwärtig nicht mehr j
grosse Bedeutung haben, wie noch in den Siebziger-Jahren, so spiegelt sich d
in der Bewegung des Escomptegeschäftes dieser Institute das reelle kaufmänni
Creditbedürfniss am deutlichsten ab. Der Creditverein der Sparcasse insbeson
veröffentlicht alljährlich detaillirte Ausweise, welche sehr lehrreiche Aufschlüsse ü
die kaufmännischen Creditverhältnisse geben. Der Publication, welche sich auf
Jahr 1886 bezieht, entnehmen wir folgende Daten:

Credite der Mitglieder:	1886	1885	1884	
Benützbar	10·065	10·110	9·894	Mill. Gld.
Benützt	3·875	4·179	4·707	« «
Das ist	38·500	41·300	47·600	Percent
Eingereicht wurden	16·822	20·439	20·597	Mill. Gld.
Davon escomptirt	13·579	16·291	16·760	« «
Escompte-Zinsfuss (durchschn.) . . .	4·710	4·710	4·720	Percent
Portefeuille	3·807	4·107	4·661	Mill. Gld.
Insolvenzen	0·059	0·207	0·177	« «
Nothleidend wurden	22 339	31.410	59.837	Gulden
Cassen-Revirement	49·951	60·745	60·481	Mill. Gld.

Aus diesen Ziffern geht hervor, dass der kaufmännische Bedarf im Jahre 1
weit geringer war, als in den Vorjahren. Sowohl der Percentsatz der benütz
Credite, als die Einreichungen und die thatsächliche Escomptirung waren hinter
Jahren 1885 und 1884 zurückgeblieben; das letztere ist übrigens das stärkste G
schäftsjahr seit dem Bestande des Vereins gewesen. Sehr wichtig ist auch
Thatsache, dass die Summen der Insolvenzen und der nothleidend geword
Wechsel im Jahre 1886 beträchtlich kleiner waren, als in den Vorjahren. I
Zinsen-Einnahme aus dem Escompte belief sich im Jahre 1886 auf 1[illegible]3.1[illegible]2 Guld
hievon waren 105.908 Gulden an die Erste Oesterreichische Sparcasse als Zin
für's Dispositions-Capital abzuführen und 21.414 Gulden dem Sicherheits- und den R
servefonds zuzuwenden; es erübrigte daher ein Zinsenüberschuss von 45.848 Guld
welcher für die Abschreibung nothleidender Wechsel und für Steuer- und Reg
zahlung an die Sparcasse sowie für Informations-Auslagen Verwendung fand.

Dr. Ludwig Grossmann's

natische Anleitung zur Schätzung der Brandschaden-Reserven.

III.

den bisherigen theoretischen Auseinandersetzungen in dieser Frage mag slich die praktische Seite derselben einer näheren Untersuchung unterlen. Der Fachmann, der uns bisher in unserem Gedankengange gefolgt nun nach den Vortheilen, welche ein solches System in der Ermittlung chaden-Reserven im eventuellen Falle mit sich bringen könnte. Wir der Beantwortung dieser Frage nicht zögern. Durch richtige Vertheilung recten Versicherung gelangenden Beträge auf die verschiedenen Risiken rster Linie möglich, die Gesammtschäden mathematisch auf ein Minimum zen, indem die jeweiligen Versicherungssummen umgekehrt proportional tsprechenden Gefahr angenommen werden. Auf diese Weise wird der Feuergefährlichkeit durch die übernommene Gewähr eines geringeren atzes ein Paroli geboten. Es wird zwar allgemein dieses Princip in der eits geübt, jedoch geschieht dies willkürlich, schätzungsweise, wobei auf ungen der Risken untereinander gar keine Rücksicht genommen wird, was nd für sich mit Bezug auf eine approximative Schätzung gar nicht im er Möglichkeit liegt. Nur mit Hilfe einer mathematischen Systemisirung den Gefahreffecte kann eine richtige Basis zur Ermittlung der beziehungscten Versicherungssummen erzielt werden. Ein zweiter nicht minder Factor ist die genaue Wahrnehmung des richtigen Verhältnisses zwischen guter, minder guter und schlechter Risken, was vom fachmännischen te betrachtet, eines der wichtigsten Momente bei der Schätzung der den-Reserven ist. Unser System bemächtigt sich dieses Factors in einem würdig zielbewussten Sinne, so dass die geringste unverhältnissmässige g ungleicher Risken eine entsprechende Aenderung der Schadenreserven zieht. Eine Anstalt kann wohl den zur directen Versicherung zulässigen grenzen, vermag sich jedoch nicht einer zu grossen Rigorosität in der r Risken zu befleissen, ohne ihr Geschäft hiedurch zu schädigen. Es ist dem genannten Factor ein Ventil vorhanden, welcher im Falle eines Andranges von schlechten Risken eine Steigerung der Gesammtreserve

anntermassen machen die Anstalten von der Begrenzung der direct zur ng gelangenden Summe insofern Gebrauch, als sie grössere Versicherungsnter einander theilen (Concordat) und die eine gewisse festgesetzte Grenze nden einzelnen Mehrbeträge (Excedenten) anderen unbetheiligten Anstalten ckung geben.

besser das Risico, desto grösser ist im Verhältnisse zu dieser Grenze der ganze elcher von der betreffenden Anstalt in directe Versicherung übernommen wird. t aber vor, dass auch schlechtere Risken mit einem [illegible]eren Betrage, als

es sonst im Verhältniss zulässig wäre, direct versichert werden, und wird die greifliche Uebergriff in keiner Weise in Rechnung gezogen, wodurch eine U lichkeit der Reserven hervorgebracht wird.

Unsere in der vorigen Abhandlung aufgestellten Formen 3) und 4) li eine Handhabe, die mittlere Höhe der zulässigen, direct zu versichernden im Verhältniss zum entsprechenden Risico zu reguliren. Es seien hier z Behufe dieselben nochmals angeführt. Es ist bekanntlich

$$m = \frac{a\,s_a + b\,s_b + c\,s_c \ldots k\,s_k}{s_2\,(a + b + c + d + \ldots + k)}$$

für normales, und

$$m' = \frac{a\,s_a + b\,s_b + c\,s_c + \ldots + k\,s_k}{q\,(a + b + c + \ldots + k)}$$

für nicht normales Risico giltig. Hierin muss nun die Summe sämmtlicher der den einzelnen versicherten Posten entsprechenden Gefahräquivalentensum Versicherungsbeträge gleich sein, einem mit der Anzahl jener Producte stimmenden Vielfachen; d. h.

$$1) \qquad a\,s_a + b\,s_b + c\,s_c + \ldots + k\,s_k = n\,A\,s_2,$$

worin A diejenige Versicherungssumme bezeichnet, welche auf ein Objec Risico der Grundprämie entspricht, also dessen Gefahr-Aequivalentensumm von der betreffenden Anstalt jeweilig in directe Versicherung übernommen wer Wird nun obige Bedingung derart erfüllt, dass die genannten n Producte unter gleich gross angenommen werden, so ergeben sich folgende Relationen:

$$2) \qquad a = A\frac{s_2}{s_a}, \quad b = A\frac{s_2}{s_b}, \quad c = A\frac{s_2}{s_c}, \quad \ldots k = A\frac{s_2}{s_k}.$$

Da jedoch $a, b, c, \ldots k$ die entsprechend zur Versicherung zulässig talien der verschiedenen Risken sind, mit denen die Gefahr-Aequivalente $s_a, s_b, s_c \ldots s_k$ correspondiren, so ist unsere Aufgabe gelöst, indem allge Verhältniss $s_2 : s$ uns den Coëfficienten repräsentirt, mit welchem der Factor tiplicirt werden muss, um das jeweilig entsprechende, zur directen Ver zulässige, mittlere Capital für ein gewisses Risico zu liefern.

Dies genügt nun in Betreff der Beziehungen der einzelnen Risken, zulässigen Versicherungssummen; nicht so verhält sich dies jedoch rücksich Riskenauswahl, wo hauptsächlich die gleichmässige Vertheilung derselben ihrer Güte ausschlaggebend ist. Würde z. B. in einer Serie von Versicherun Vertheilung eine zufriedenstellende sein, so wäre der Factor m, beziehungs gleich oder kleiner als 1, wogegen im Falle einer unverhältnissmässige schlechter oder minder guter Risken die Zahl 1 übersteigen werden mö nun m, beziehungsweise m' nebst dem Schadeneffect und der Prämie ein Fa jenigen Productes ist, durch welchen die Brandschaden-Reserve zum Ausdruck so ist der positive Einfluss dieses Factors auf den Wachsthum der Reserv kennbar. Es ist nun die Frage, unter welchen Umständen wird m, bezieh gleich 1 werden.

Wenn eine solche Serie n Versicherungen in sich fasst und die in die Form 1) edrückte Vorbedingung erfüllt wird, so wird folgender Relation entsprochen ien.

$$m = \frac{nA}{a + b + c \ldots . k}$$

ehungsweise

$$m' = \frac{nAs_2}{q(a + b + c \ldots . k)}$$

Ist daher auch

$$nA = a + b + c + \ldots + k$$

ehungsweise

$$nAs_2 = q(a + b + c + \ldots + k)$$

vird m, respective m' gleich 1 werden. Den Anforderungen in dieser Beziehung a immerhin auch derart entsprochen werden, dass sich beide Bedingungen gegenig ergänzen.

Es sei zu besserem Verständniss in folgenden Tabellen je eine solche Serie zusammenellt, und zwar sowohl für normale als auch für nicht normale Risken, worin diesen ingungen entsprochen wird.

Tabelle

r bei normalen Risken zur directen Versicherung zulässigen mittleren Beträge.

Fabriken-Risico			Gebäude-Risico		
Gefahr-äquivalenten-Summe s für $q = 3\cdot5$	Prämie ‰	$\frac{s_2}{s}$. 100 Versicherungssumme in Percenten von A	Gefahr-äquivalenten-summe s für $q = 1\cdot5$	Prämie ‰	$\frac{s_2}{s}$. 100 Versicherungssumme in Percenten von A
2·45	2.991	204·182	0·45	1·372	222·222
2·80	3·052	178·571	0·60	1·405	166·667
3·15	3·116	158·730	0·75	1·440	133·333
3·50	3·184	142·857	0·90	1·476	111·111
3·85	3·254	129·870	1·00*	1·500	100·000
4·20	3.326	119·047	1·05	1·512	95·238
4·55	3·400	109·880	1·20	1·550	83·333
4·90	3·477	102·041	1·35	1·588	74·074
5·00*	3·500	100·000	1·50	1·627	66·667
5·25	3·557	95·238	1·65	1·667	60·606
5·60	3·638	89·286	1·80	1·708	55·555
5·95	3 722	84·033	1·89**	1·731	52·906
6·30	3·808	79·365			
6·65	3·895	75·188			
7·CO	3·986	71·428			
7·35	4·078	68·027			
7·70	4·171	64·935			
8·05	4·266	62·112			
8 40	4·364	59·524			
8·75	4·463	57·143			
9.10	4·564	54·945			
9·45**	4·667	52·906			

* Die der beziehungsweisen Grundprämie entsprechende Gefahräquivalentensumme s_2.

** Aeusserste Grenze für normales Risico.

Tabelle

der bei nicht normalen Risken zur directen Versicherung zulässigen mittle

Fabriken-Risico			Gebäude-Risic		
Gefahr-äquivalenten-Summe s für $g = 3{\cdot}5$	Prämie ‰	$\frac{s_2}{s} . 100$ Versicherungs-summe in Percenten von A	Gefahr-äquivalenten-Summe s für $g = 1{\cdot}5$	Prämie ‰	Ve summ
9·45*	4·667	52 906	1·89*	1·731	
9·80	4·771	51 020	1·95	1·750	
10·15	4·877	49·261	2·10	1·792	
10·50	4·983	47·619	2·25	1·836	
10·85	5·091	46·083	2·40	1·880	
11·20	5·202	44·643	2·55	1·925	
11·55	5·314	43·278	2·70	1·971	
11·90	5·426	42·017	2·85	2·017	
12·25	5·540	40·816	3·00	2·063	
12·60	5·656	39 682	3·15	2·112	
12·95	5·675	38·610	3·30	2·160	
13·30	5·895	37·594	3·45	2·213	
13·65	6·010	36·630	3·60	2 260	
14·00	6·130	35·714	3·75	2·310	
14·35	6·252	34·843	3·90	2·361	
14·70	6·375	34 014	4·05	2 413	
15·05	6·499	33 223	4·20	2·465	
15·40	6·624	32·467	4·35	2·517	
15·75	6·751	31·746	4 50	2·571	
16·10	6·879	31·056	4·65	2·625	
16·45	7·007	30·395	4·80	2·679	
16·80	7·136	29·726	4·95	2·734	
17·15	7·267	29·154	5·10	2·789	
17·50	7·399	28·571	5·25	2·845	
17·85	7·531	28·011	5·40	2·902	
18·20	7·664	27·472	5·55	2·959	
18·55	7·799	26 954	5·70	3·016	
18·90	7·935	26·455	5·85	3·074	
19·25	8·071	25·974	6·00	3·132	
19 60	8·208	25·510	6·15	3·191	
19·95	8·345	25·063	6·30	3·249	
20·30	8·482	24·630	6·45	3·308	
20·65	8·624	24·213	6·60	3·370	
21·00	8·766	23·810	6·75	3·430	
21·35	8·908	23·419	6·90	3·491	
21·70	9·050	23·041	7·05	3·552	
22·05	9·193	22·676	7·20	3·613	
22·40	9·338	22·321	7·35	3·674	
22·75	9·483	21·978	7·50	3·737	
23·10	9·629	21 645	7·65	3·801	
23·45	9·775	21 322	7·80	3·865	
23·80	9·923	21·008	7·95	3·929	
24·15	10·071	20·704	8·10	3·993	
24·50	10·220	20·418	8·25	4·056	
	u. s. f.			u. s. f.	

* Grenzscheide zwischen normalem und nicht normalen Risico. — Im Fa $A = 10.000$ Gulden wäre, so würde der höchst zulässige mittlere Betrag für n Risico fl. 5.290·60 repräsentiren.

Staats- und Prioritäts-Anlehen.

Indem dieses Thema angeregt wird, bedarf es wohl keiner näheren Erörterung, s man es hier mit einem bereits sattsam befahrenen Gebiete der Finanzwissen-aft zu thun hat und dennoch dürfte so manche interessante Frage dem Finanz-itiker auf diesem Gebiete entgangen sein, welche geeignet ist, über eventuelle eifel der Zweckmässigkeit eines Darlehensabschlusses sowohl für den Contrahenten auch für den Capitalisten die nöthigen Aufschlüsse zu liefern.

Betrachten wir einmal zu diesem Behufe die Grundlagen, auf denen die Tilgung licher Anleihen beruht.

Es sei K das Darlehen, welches in n Jahren derart zur Tilgung gelangen soll, je am Schlusse des 1. 2 3. . . . . $n$ten Jahres die beziehungsweisen Quoten a_2, $a_3 \ldots . a_n$, in denen sowohl die Zinsen des noch zu tilgenden Darlehens, ach ein entsprechender Theil der Capitalsabtragung enthalten ist, zur Rückzahlung men sollen. Der Zinsfuss möge allgemein mit $P = 100\,p$ Percent dargestellt und somit der Ausdruck

$$1 + \frac{P}{100} = 1 + p = u$$

Kürze halber angewendet werden. Das Darlehen beträgt daher am Schlusse des n Jahres Ku und da a_1 Gulden abgezahlt werden, so ist der für's zweite Jahr eibende Darlehensbetrag $Ku - a_1 = K_1$ und insofern am Schlusse des zweiten es abermals eine Quote abgezahlt wird, so verbleibt analogerweise $K_1 u - a_2 = K_2$ w. und schliesslich $K_{n-1}\, u - a_n = 0$. Substituirt man nun den Werth für K_1 ie Gleichung für K_2, dessen Werth sodann in die Gleichung für K_3 u. s. w., so lt man

$$Ku - a_1 = K_1$$
$$Ku^2 - a_1 u - a_2 = K_2$$
$$Ku^3 - a_1\, u^2 - a_2\, u - a_3 = K_3 \text{ u. s. f.}$$

schliesslich

$$Ku^n - a_1\, u^{n-1} - a_2\, u^{n-2}\ \ldots - a_{n-1}\, u - a_n = K_n = 0$$

hieraus

$$K = \frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} + \frac{a_3}{u^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{u^{n-1}} + \frac{a_n}{u^n}$$

. die Summe der auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung discontirten, in jeweiligen Terminen zu leistenden Quoten, in denen die Tilgung und Verzinsung Darlehens inbegriffen ist, muss mit dem contrahirten Betrage vollständig über-timmen.

Da nun die Contrahirung des Darlehens gewöhnlich durch ein Bankhaus oder Bank-Consortium geschieht, welches die Begebung desselben in Theilbeträgen das anlagebedürftige Publicum durchzuführen hat, den Darlehensbetrag jedoch an

den Darlehenswerber sofort ausbezahlen muss, so zahlt der Contrahent für diese mittlung eine gewisse Provision, die in einer höheren Verzinsung, als der vor stipulirten besteht. Bezeichnen wir dieselbe zum Unterschiede von der stipulirten $Q = 100 . q$, $(Q > P)$ Percent und setzen der Kürze halber

$$1 + \frac{Q}{100} = 1 + q = v$$

so erhalten wir anolog zur Form 1)

2) $$K' = \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \cdots\cdots + \frac{a_{n-1}}{v^{n-1}} + \frac{a_n}{v^n}$$

und da $v > u$, so wird auch $K' < K$. Dies liefert den Anhaltspunkt, mit Beibehaltung des stipulirten Zinsfusses zugleich eine höhere Verzinsung des lehens zu gewähren, indem der Contrahent blos das Darlehen K' erhält, je das grössere Darlehen K mit P Percent zu verzinsen hat. Auf die Weise wird höhere Verzinsung des gebotenen Darlehens K' erzielt.

Es wird sodann der eigentlich zu verzinsende Betrag K der Nennw oder Nominalwerth des Anlehens genannt und ist demgemäss $100 \frac{K'}{K}$ der Cours selben, da für K Gulden Nominalwerth K' Gulden gegeben werden und somit 100 fl. Nominale $100 \frac{K'}{K}$ Gulden entfallen. Demzufolge wird mit Zuziehung Formen 1) nnd 2) der Courswerth C folgende Form annehmen:

3) $$C = 100 \frac{K'}{K} = 100. \frac{\frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{v^n}}{\frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} + \frac{a_3}{u^3} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{u^n}}$$

und unter der besonderen Voraussetzung, dass die jährlichen Quoten einander g sind, also $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n$ erhalten wir als Courswerth

4) $$C = 100 \frac{\frac{a}{v^n} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}}{\frac{a}{u^n} \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1}} = 100 . \frac{P}{Q} \cdot \frac{u^n}{v^n} \frac{(v^n - 1)}{(u^n - 1)}$$

Ist das Anlehen ein untilgbares, so ist der Cours

$$C = 100 . \frac{P}{Q}$$

daraus geht hervor, dass die Höhe des Courses nicht nur vom Verhältniss des Z fusses P zu demjenigen von Q, sondern auch von der Tilgungsdauer insbeso abhängig ist, und zwar ist nach der Form 4) der Cours ein desto kleinerer, je lä die Tilgungsfrist festgesetzt wird.

Es entwickelt sich nun eine Frage von ganz besonderem Interesse. Neh wir an, es würde ein Darlehen K' durch ein Bankenconsortium zum Course C ü nommen worden sein. Der Contrahent wäre dann das Darlehen im Nominalwert schuldig und müsste das letztere mit P % verzinsen. Wie hoch würde sich *Zinsfuss* Q mit Rücksicht auf das eigentlich contrahirte Capital K' belaufen?

Der Form 4) gemäss ist

$$C = 100 \frac{P}{Q} \frac{u^n (v^n - 1)}{v^n (u^n - 1)},$$

iit

$$\frac{Q}{100} \frac{v^n}{v^n - 1} = \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1}$$

d da hierin $v = 1 + \frac{Q}{100}$, so erhalten wir:

$$\frac{v^n (v - 1)}{v^n - 1} = \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1}.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$v = \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{v^n}\right) + 1$$

d somit, wenn wir dies beiderseits zur $n$ten Potenz erheben, füglich

$$v^n = \left[1 + \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{v^n}\right)\right]^n$$

ieraus erhalten wir nach der bekannten Lösung der transcendenten Formen die einzige ntinuirliche Ersatzgleichung:

$$v^n = \mathop{\mathrm{E}}_{m > u^n} \left[1 + \frac{P}{C} \frac{u^n}{u^n - 1} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^n$$

s Resultat. Wir wollen zum besseren Verständniss ein Beispiel durchführen. Eine ank würde die Begebung eines beliebig grossen Anlehens, welches durch den Staat ntrahirt wird, mit einem Course von 92 übernehmen; die Tilgung desselben wäre af 30 Jahre projectirt und soll das Anlehen in vierpercentiger Papier-Rente begeben erden. Wie hoch würde sich die eigentliche Verzinsung mit Bezug auf den Ueberahmscours belaufen?

Der Staat würde also für je fl. 100 emittirter Rente blos den Betrag von fl. 92 rhalten, hätte jedoch fl. 100 zu tilgen und müsste überdies fl. 92 mit 4 Gulden ro anno verzinsen. Diesem Beispiele gemäss, wäre daher $C = 92$, $n = 30$ $P = 100\,p = 4\%$, $u = 1{\cdot}04$, und $Q = 100\,q = ?$ Es ergäbe sich daher die ntsprechende Form:

$$v^{30} = \mathop{\mathrm{E}}_{m > 3{\cdot}24} \left[1 + \frac{4\,(1{\cdot}04)^{30}}{92\,|(1{\cdot}04)^{30} - 1|} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^{30} = 3{\cdot}9687,$$

somit $v = 1{\cdot}04702$ und $Q = 4{\cdot}702\%$.

Das dem Staate in Wirklichkeit zur Verfügung gestellte Capital K' würde also bei dem Umstande, als blos dessen alleinige Tilgung innerhalb 30 Jahren bedingt wäre, also die Schuld des Staates den Werth K' nicht überschreiten würde, unter diesen Auspicien eine 4·7percentige Verzinsung erheischen: da jedoch der Staat mehr schuldig ist, als er empfangen hat, indem er den Nominalwerth K innerhalb 30 Jahren zu tilgen hat, so repräsentirt diese Verpflichtung im Vergleiche zu der eigentlichen 4percentigen Verzinsung des Nominalwerthes K eine 0·7percentige Mehrverzinsung des empfangenen Capitales K'.

Es müssen somit die jährlichen Annuitäten, welche nothwendig sind, u Nominalwerth des Darlehens K innerhalb 30 Jahren bei 4percentiger Verzinsı tilgen gleich sein denjenigen, welche innerhalb derselben Dauer das an den wirklich geliehene Capital K' bei einer 4·7percentigen Verzinsung, zu tilg Stande sind.

Nachdem nun das Geschäft in diesem Sinne abgeschlossen wurde, wi betreffende operirende Bank die ihr vom Staate zur Verfügung gestellten R titres an das anlagebedürftige Publicum zu begeben trachten, und zwar so hc möglich über den Uebernahmscours, denn die Differenz zwischen diesem un Durchschnittscours, mit welchem die Rente an den Mann gebracht wird, : eigentliche Gewinn, welchen die Bank aus dem Geschäfte erzielt. Wäre z. Bank im Stande sämmtliche Rententitres mit dem Nominalwerthe anzubrinı würde sie die ganze Differenz zwischen K und K' in's Verdienen bringen. I jedoch im Allgemeinen nie der Fall ist, sondern immer ein Theil dieses N abgegeben werden muss, so ist beim Abschlusse solcher Finanzgeschäfte die wendigkeit vorhanden, mit den Bedürfnissen des Geldmarktes zu rechnen. In lichen Zeiten, wo der Cours der Staatsrenten ein entsprechend hoher ist, l solche Geschäfte ohne Gefahr durchgeführt werden, insbesondere wenn hie Zeitpunkt gewählt wird, wo die flüssigwerdenden Zinsen der grossen Anlagecaı das Bedürfniss nach neuen Anlagen steigern.

In allen Fällen muss jedoch der Financier in der Feststellung des Ueberı Courses die nöthige Vorsicht anwenden, um bei Durchführung solcher Ge seine Rechnung zu finden.

DIE MATHEMATIK

im

ienste der Nationalökonomie

mit Hinweis auf die

Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen

r neuen wissenschaftlichen Errungenschaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik;
neuen Fundamenten für die Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik im Allgemeinen

ir Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

DR. LUDWIG GROSSMANN

ber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

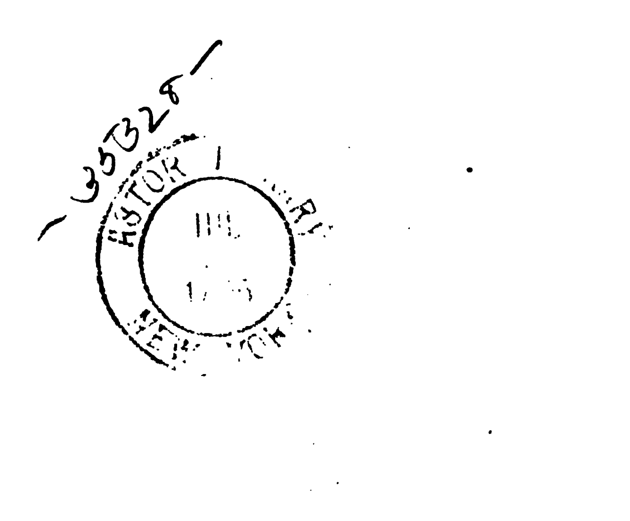
Dritte Lieferung.

WIEN 1888.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückenstrasse Nr. 5.

Druck von Josef Bayer & Comp., I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Jegliche Disciplinen des grossen, mit dem Walten natürlicher Einflüsse enge [...]üpften wirthschaftlichen Gebietes des Versicherungswesens, lassen sich mit Rück-[...] auf deren Beruf, störende und schädliche Eingriffe in das sociale Getriebe wieder [...]gleichen, allgemeinen mathematischen Normen insoferne unterordnen, als es [...]ich ist, für dieselben statistische Grundlagen zu erzielen.

Das innerhalb gleicher Zeiträume einer gewissen Regelmässigkeit unterworfene [...]ffen der erfahrungsgemäss ermittelten und sich im Rahmen eines bestimmten [...]nges wiederholenden Umstände, wird nach Zugrundelegung entsprechender mathe-[...]cher Relationen zum Gesetz.

Angesichts der Möglichkeit, auf empirischem Wege die gesetzmässige Wieder-[...]g verschiedener Umstände festzustellen, machte ich den Versuch, das Brand-[...]enrisico einer gewissen Norm zu unterordnen, was mir auch nach mühevoller [...]t vollständig gelungen ist.

Dieser unerwartete Erfolg brachte mich auf die Idee, auf Grund des eigen-[...]lichen Verlaufes des Absterbegesetzes, also einer fertigen statistischen Basis, die [...]ere Validität des Menschen in den einzelnen Lebensstadien zu ermitteln und auf Weise eine Grundlage für die Invaliditäts- und Alters-Versicherung zu schaffen.

Im Bank- und Finanzwesen, sowie auch auf dem finanzpolitischen und staats-[...]schaftlichem Gebiete setzte mich insbesondere meine „Theorie und Lösung der [...]uctibellen transcendenten Gleichungen“ in die Lage, Neues und Interessantes finanziellen Fachmanne zu bieten und den Gesichtskreis in dieser Beziehung [...]er um ein Bedeutendes zu erweitern.

Wien, im Mai 1888.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler:

Auf Seite 8. In der Form 7) soll der Ausdruck hinter dem Ersatzzeichen E, innerhal grossen Klammern zur $n$ten Potenz erhoben sein; ebenso wie dies bei der v gehenden Form 6) der Fall ist.

Auf Seite 21 soll es lauten anstatt $\frac{1}{v} + \frac{2}{v^2} + \cdots + \frac{1}{v^n} = \frac{v^n - 1}{v^n (v-1)}$

richtig: $\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \cdots + \frac{1}{v^n} = \frac{v^n - 1}{v^n (v-1)}$

Auf Seite 22. In der Form 3) soll es innerhalb der Klammern lauten anstatt $\frac{v^n - 1}{v^n (n-1)}$

richtig: $\frac{v^n - 1}{v^n (v-1)}$

Auf Seite 23. In der Form 8) soll es heissen anstatt $v_n =$, richtig: $v^n =$

Auf Seite 28 soll die Form 3) richtig lauten $k = m \left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)\left[(1+p)^n - 1\right]}\right)$

Auf Seite 46. In der Form 2) soll es lauten anstatt $(1 + p^{\nu-\mu}$ richtig: $(1+p)^{\nu-\mu}$

Auf Seite 48 soll es lauten anstatt P_{10}, P_{11}, P_{10}, P_{11} richtig: P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{12}.

Dr. Ludwig Grossmann's

flexionen über die Eventualität eines minimalen Brandschaden-Ergebnisses.

In einigen kurzen Abhandlungen haben wir bisher das Wesen der mathematischen rmen und deren Handhabung in der Feuerversicherung einer näheren Untersuchung erzogen und haben uns daselbst die Aufgabe gestellt, auf Grund statistischer en ein vergleichendes Bild des zunehmenden Risicos auf mathematischem Wege ermitteln und mit Zugrundelegung einer den jeweiligen Umständen entsprechenden undprämie, die gewissermassen eine von den wirthschaftlichen und mit Bezug auf rkehrungen gegen Brandschäden veränderlichen Verhältnissen abhängige Grösse ist, e Art Modus zum Zwecke einer rationellen Prämienbemessung mit besonderer eksicht auf die systematische Handhabung des praktischen Gutachtens festzustellen. e Lösung dieser Aufgabe gelang vollkommen, indem wir wohlgesammeltes statisches Materiale der zufälligen Ursachen bei der Entstehung von Bränden als Grunde bei der theoretischen Beurtheilung des steigenden Risicos mit Rücksicht auf die fahrmomente in Betracht zogen und in der richtigen Voraussicht, das eine den rhandenen örtlichen Verhältnissen entsprechende Grundprämie nur auf praktischen fahrungen festzustellen ist, dieselbe dem jeweiligen Gutachten anheimstellten. Um och die Handhabung der gefundenen Formen bei der Prämienbemessung für alle lle verständlich zu machen, haben wir uns bei der zu diesem Behufe durchgeführten plication der beim Oesterreichisch-ungarischen Feuerversicherungs-Theilungs-Verge (Concordat) üblichen Grundprämie als Exempel bedient, um auf diese Weise praktische Anwendung jeglicher theoretisch ermittelten Resultate deutlich darzuellen. Auch in Betreff des Gebäuderisicos wurde bei der Bemessung der beispielseisen Grundprämie auf die allgemeinen erfahrungsgemässen Satzungen des Conrdates Rücksicht genommen. Auf diese Art war es möglich, die aus ökonomischen nd meteorologischen Verhältnissen entspringenden Wirkungen, welche vom mathetischen Standpunkte uncontrolirbar sind, in Form eines Exempels in Rechnung zu ringen, und hiebei den verschiedenen, von örtlichen Verhältnissen abhängigen Vernderungen der Grundprämie freien Spielraum zu lassen. Es war jedoch nothwendig en Begriff der Grundprämie soweit zu fixiren, als es die Individualität derselben hne Einschränkung der willkürlichen Werthbestimmung zuliess und wurde zu diesem Behufe deren Inkrafttreten mit einer gewissen ebenfalls willkürlichen Anzahl kleinster Gefahrmomente in Verbindung gebracht, wodurch sich die Möglichkeit ergab, sowohl die Grundprämie als auch die mit derselben in inniger Verbindung stehende Gefahrmomenten-Anzahl n_0 rechnungsmässig zu handhaben und die beiden vom mathemathischen Standpunkte als willkürliche Constanten aufzufassen, welche in Bezug auf Werthbestimmung der praktischen Erfahrung unterliegen und somit dem fachmännischen Urtheil anheimgestellt bleiben.

Mit Hilfe der auf diese Weise ermittelten Relationen ergab sich eine der gewählten Grundprämie entsprechende Prämienscala, in welcher die einzelnen Posten je nach der erfahrungsgemäss ermittelten Gefahrmomenten-Anzahl, mit denen die zu-

fälligen Ursachen und somit auch das Risico in geradem Verhältnisse zunimmt, die verschiedenen zur Versicherung gelangenden Objecte anwendbar sind.

Wir sind daher im Stande den Gefahreffect eines jeden einzelnen Objectes Hilfe erfahrungsgemässer Schätzung und statistisch-mathematischer Grundlage r nungsmässig festzustellen, wodurch offenbar die Prämienbemessung einer ration Handhabung zugeführt wird.

Es lässt sich jedoch auch umgekehrt aus dem Gefahreffect auf die Möglich und Ausdehnung eines eventuellen Schadens schliessen, wodurch die Grundlage Schätzung der Brandschadenreserve geboten ist. Die Intensität des Gefahreffectes als Massstab des Schadeneffectes gelten, in welchem die Wahrscheinlichkeit Schadens ausgedrückt erscheint. Wenn man nun den Grundsatz in Betracht dass die Einzelprämie als eine dem beziehungsweisen Gefahreffect eines Objectes sprechende, zur Deckung des allfälligen Gesammtschaden-Ergebnisses beizutrag Quote ist, welche nach Massgabe der Beschaffenheit des Gesammtrisicos, das die sicherungsbank zu tragen hat, mehr oder weniger in Anspruch genommen wir kommt man zu dem Schlusse, dass zum Mindesten eine vollständig gleichmä Vertheilung guter und schlechter Risken nothwendig ist, um ein den Anforderun angemessenes Resultat zu erzielen.

Eine Versicherungsbank muss ihre Feuer-Risken vor allen Dingen vom St punkte des Gefahren-Grades beurtheilen und sich darüber im Klaren sein, ob genügende Anzahl guter Risken den schlechteren das Gleichgewicht hält. Massge kann jedoch hier die Höhe der in eigenes Risico übernommenen Beträge auf ein Versicherungen nicht allein sein, sondern es muss auch die richtige verhältnissmä Vertheilung auf eine möglichst grosse Anzahl verschiedener Risken in Betr gezogen werden. In diesem Sinne wird auch das übernommene Risico für zwei schiedene in der Nachbarschaft gelegene Gehöfte ein verhältnissig grösseres sein muss auch demgemäss behandelt werden. Es wird nämlich der Gesammtbetrag, dem beide Objecte versichert sind, als eine einzelne Versicherung angesehen und Bemessung des in eigenes Risico übernommenen Betrages auch derart in Rech gebracht. Zur Erreichung des Gleichgewichtes zwischen guten und schlechten Ri ist es nothwendig, je nach der Leistungsfähigkeit der betreffenden Versicherungs einen Betrag zu fixiren, der bei einem halbwegs guten Risico, z. B. einem sol welches der Grundprämie entspricht, auf eigene Gefahr übernommen werden wi Diesem Betrage müssten sich nun auch alle anderen besseren oder schlechteren Ri verhältnissmässig anpassen, und zwar je schlechter das Risico, desto kleiner d eigene Gefahr übernommene Betrag und umgekehrt, je besser das Risico, desto gr könnte dieser Betrag sein. Es wäre daher verfehlt, wenn man das Gleichgew guter und schlechter Risken, derart herstellen wollte, dass man jedes halbwegs Risico ganz auf eigene Gefahr versichern wollte, um nur für desto mehr schl Risken ein Gegengewicht zu haben; insbesonder wenn die Gesammtzahl der einz Versicherungen keine allzugrosse wäre.

Es gilt als allgemeiner Grundsatz, dass sich bei einer Versicherungsbank, dem Umfang des Geschäftes, also mit der Zunahme der Riskenanzahl das

nittliche Schadenergebniss vermindert, vorausgesetzt, dass die Anstalt auch die
hige Vorsicht in der Wahl der Risken entsprechend walten lässt. Um wieviel
hr wird diese Verminderung des Schadenergebnisses zur Geltung gelangen, wenn
der Bemessung der von der Anstalt auf eigene Gefahr übernommenen Versiche-
gsbeträge eine rechnungsmässig ermittelte Basis zur Anwendung kommt. Je
sseren Gefahren ein Object mit Bezug auf Brandschaden unterworfen ist, desto
iner muss der zur directen Versicherung gelangende Betrag sein; der Rest hievon
d unter allen Umständen in Rückdeckung gelangen müssen, wenn die Reserve die
malmässige Bemessung nicht übersteigen soll. Diese bildet nämlich jenes Ventil,
lches eine unverhältnissmässige Einstellung schlechter Risken, sowie der bei den-
ben auf eigene Gefahr übernommenen höheren Beträge auszugleichen berufen ist;
l zwar in der Weise, dass mit der Ueberschreitung des normalen Verhältnisses
Einzeln-Risken untereinander oder deren normalmässigen Versicherungsbeträge
e Steigerung der Reserve resultirt, welche geeignet ist, das hiedurch hervorge-
chte Superrisico wieder zu decken. Jedoch ist dies nur bis zu derjenigen Grenze
glich, welche durch die vollständige Aufzehrung der Gesammtprämieneinnahme
ch die Schadensumme ausgedrückt ist. Hier würde auch nach unserer Auffassung
jenige Fall eintreten, wo die Gesammtprämieneinnahme als Reserve eingestellt
rden müsste. Solche Fälle können aber nur dann vorkommen, wenn ohne Rück-
ht auf Beschaffenheit der Risken oft die ganze Versicherungssumme in eigene
fahr übernommen wird und im Allgemeinen nicht das gute Risico, sondern blos
hohe Prämie massgebend ist. Thatsächlich ist diese Manipulation eine vollständig
kehrte, denn unter solchen Umständen ist selbst die höchste Prämie unzureichend,
einer Versicherungsbank die Mittel zur Deckung der Schäden zu bieten. In der
tigen Handhabung der systematischen Bemessung der in eigene Gefahr zu über-
menden Beträge liegt das Geheimniss eines rationellen Feuerversicherungsgeschäftes.
wird keine Anstalt die Rigorosität in der Wahl ihrer Risken so weit treiben, um
Geschäft zu schädigen; und kann dies auch nicht der Zweck dieser Betrachtungen
n, einem solchen Vorgehen das Wort reden zu wollen, jedoch wird eine jede
chten, durch Riskenaustausch und Theilung die Höhe der Schadengefahr der Ein-
risken zu vermindern. Durch richtige Vertheilung der in eigene Gefahr zu über-
menden versicherten Beträge mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der einzelnen
ken ist es sodann möglich, die Gesammtschäden mathematisch auf ein Minimum
abzusetzen, indem die jeweiligen Versicherungsbeträge umgekehrt proportional zu
entsprechenden Gefahr angenommen werden. Auf diese Weise wird die grössere
ergefährlichkeit durch die übernommene Gewähr eines geringeren Schadenersatzes
art ausgeglichen, dass in gewisser Beziehung eine Art Durchschnittsrisico geschaffen
rd, mittelst dessen die Versicherungsbank in die Lage versetzt wird, ihr Feuer-
sicherungsgeschäft rationeller zu handhaben als dies bisher möglich war. Dadurch,
ss eine gewisse Grenze für die in eigene Gefahr zu übernehmenden Beträge
schaffen ist, wie wir selbe in der „Mathematischen Anleitung zur Schätzung der
dschaden-Reserven" III dargestellt haben, ist die Möglichkeit geboten, nach einer
mmten Form in der Bemessung derselben vorzugehen, ohne jedoch dem Gut-

dünken des Feuerversicherers irgend welchen Zwang aufzuerlegen. Wird die Zuläs keit bei einem Risico überschritten, so lässt sich dies wieder bei einem andern art einbringen, dass ein verhältnissmässig kleinerer als der zulässige Betra eigene Gefahr übernommen wird. Würden jedoch die Grenzen der Zulässigkeit Allgemeinen überschritten werden, ohne dass dieselben wieder in der besagten W einen Ausgleich erfahren, so tritt eine Erhöhung der Brandschadenreserve ein, in der bei der Berechnung derselben als Factor eines Productes fungirende Ris Coeficient m, beziehungsweise m' einen Wachsthum erleidet. Auf diese Weise we alle durch Ueberschreitung der Normen entstandene Unzulässigkeiten auf dem W der Reserveerhöhung regulirt. Natürlicherweise ist eine solche durch ein zu erwa des höheres Brandschadenergebniss bedingt; woraus man folgern kann, dass umgek ein minimales Brandschadenergebniss das mathematische Resultat eines Mini Risken-Coeficienten involvirt, welcher nur unter der Bedingung möglich ist, das peinlicher Genauigkeit den Anforderungen der vorgeschriebenen Riskenverth nachgekommen wird.

Die Brandschadenreserve ist in unserer Abhandlung als Product dreier Fa dargestellt worden, und zwar des Schadeneffectes S beziehungsweise S', des Ris Coeficienten m beziehungsweise m' und der Prämie p. Sämmtliche Risken wu sowohl beim Gebäude- als auch beim Fabrikenrisico in zwei verschiedene Kateg und zwar in normale und nicht normale eingetheilt, so dass die Grössen S un den ersteren, S' und m' den letzteren entsprechen. Bei Handhabung unseres Syst müssen diese beiden Kategorien abgesondert behandelt werden, da bei den norm Risken der Schadeneffect S constant bleibt, wogegen derselbe bei den nicht norm je nach dem Vorhandensein jeweiliger Gefahrmomente, einem Wachsthum unterw ist, weshalb dieselben auch durch ein bestimmt ausgedrücktes Maas von Ge äquivalenten scharf von einander abgegrenzt sind. Wie dies nun aus der Natur Sache hervorgeht, wird auch der Schadeneffect bei Gebäuderisico ein anderer sei bei Fabrikenrisico; und da für jedes derselben auch das normale und nicht nor zur Geltung kommt, so werden wir vier abgesonderte Abtheilungen erhalten, denen jede ihre eigene entsprechende Brandschadenreserve erheischen wird. Es daher leicht vorauszusehen, dass jede dieser Abtheilungen einem anderen Ris Coeficienten entsprechen wird und zwar insbesondere aus dem Grunde, weil die m matisch festgestellten, dem Risico entsprechenden Grenzen der jeweiligen Vers rungsbeträge schon aus geschäftlichen Rücksichten nicht genau eingehalten w dürften, da sich beim besten Willen die aufgestellten Normen nicht vollständig be sichtigen lassen, weshalb gewisse Abweichungen immerhin platzgreifen können, w jedoch die Verwendung dieses Systemes in keiner Weise alteriren. Diese Nor allein sind geeignet, eine rationelle Handhabung dieses wichtigen bis jetzt so mütterlich behandelten Versicherungszweiges zu ermöglichen, und zwar insofern durch dieselben einerseits diejenigen Grenzen angedeutet sind, innerhalb welcher Prosperität möglich ist, andererseits die Bedingungen zum Ausdruck kommen, denen eine Steigerung des Brandschadenergebnisses eintritt.

Fragmente finanzieller Disciplinen.

I.

In einem der früheren Artikel haben wir den finanziellen Begriff der Contrahirung von Anlehen einer allgemeinen Erörterung unterzogen und insbesondere darauf hingewiesen, dass die Höhe des Uebernahmscourses mit der eigentlichen Verzinsung des effectiven Darlehens im engen Zusammenhange steht. Das dem Contrahenten in Wirklichkeit zur Verfügung gestellte Capital wird im Verhältniss zum Nominalwerth desselben eine oft bedeutend höhere als die nominelle Verzinsung involviren und ist es daher von Belang festzustellen, in welchem Verhältnisse sich der nominelle Zinsfuss zum effectiven befindet. Diesem Thema wurde nun bereits in dem besagten Aufsatze die nöthige Aufmerksamkeit gewidmet und tritt an uns nun die Aufgabe heran, dieses Resultat uns bei der Bestimmung der Parität zweier verschiedener Course zu Nutze zu machen. Die Bedingungen, unter denen zwei gleich grosse Darlehen abgeschlossen werden, sind dieselben, wenn zwischen beiden Uebernahmscoursen die Parität besteht oder besser gesagt, wenn für beide der effective Zinsfuss derselbe ist. Der effective Zinsfuss wird durch die grössere oder kleinere Aufnahmsfähigkeit des Geldmarktes geregelt, wobei auch die sonstige Bonität des Contrahenten oder auch die Beschaffenheit eventueller Priorität mit in Rücksicht kommt. Je nachdem nämlich die Anlage den Anforderungen des Credites entspricht, und eine genügende Sicherheit der investirten Capitalien vorauszusetzen ist, wird dem Darlehenscontrahenten ein grösseres oder kleineres Vertrauen entgegengebracht und werden auch dementsprechend die Darlehensbedingungen stipulirt. Bei grossen Operationen bedarf es in dieser Beziehung einer besonderen Gewandtheit und fachmännischen Umsicht, um bei deren Durchführung, wie man zu sagen pflegt, den Nagel auf den Kopf zu treffen. Staaten und grosse Industrie-Unternehmungen bedienen sich daher bei solchen Gelegenheiten der Vermittlung von Finanzinstituten und kommt es oft vor, dass mehrere solcher Institute um ein Geschäft miteinander concurriren, in welchem Falle der Contrahent gewöhnlich sehr gut fährt, weil sich dieselben in Begünstigungen diesem gegenüber zu überbieten suchen. Da nun dieses Vorgehen zumeist für den Ersteher des Geschäftes sehr geringe Vortheile bietet, ja sogar oft zum Schaden desselben hinausläuft, so pflegen sich mehrere solcher Concurrenten, um einander als solche unschädlich zu machen, zu einem Consortium zu verbinden, welches überdies noch den Vortheil hat, bedeutend kapitalskräftiger zu sein, als irgend ein einzelner Bewerber. Dessenungeachtet kommt es doch vor, dass um ein und dasselbe Geschäft mehrere solcher Consortien concurriren. In einem solchen Falle tritt an den Contrahenten die schwierige Aufgabe heran, über die Parität der Course im Klaren zu sein.

Bei untilgbaren Anleihen ist dies sehr einfach, desto schwieriger gestaltet sich dies jedoch bei den tilgbaren, insbesondere wenn nicht nur der Uebernahmscours und der nominelle Zinsfuss, sondern auch die Tilgungsfrist bei den verschiedenen Anboten eine ungleiche ist. Unter allen Umständen ist es daher nothwendig, zu ermitteln, welcher von denselben der vortheilhafteste ist. Wir wollen zur besseren Erläuterung vor allen Dingen den speciellen Fall erörtern, wo bei einem bestimmten effectiven

Darlehenswerth die Tilgungsfrist eine fixe ist und bei den zu berücksichti Anboten blos der Uebernahmscours und der nominelle Zinsfuss ein schiedlicher ist.

Nehmen wir z. B. an, der Staat wäre im Begriffe, eine innerhalb dreissig tilgbare Anleihe von zwanzig Millionen zu contrahiren. Zu berücksichtigen si folgende zwei Anbote: *A* proponirt bei einem Uebernahmsc von 92 und 5%iger Verzinsung, *B* bei einem Ueberna cours von 87 und $4\frac{1}{2}$%iger Verzinsung die Emissio Anleihe zu übernehmen, welcher von den beider boten ist der günstigere für den Contrahenten?

Bei einem Uebernahmscourse von $C = 92$ ist der Nominalwerth

$$N = 20{,}000.000 \cdot \frac{100}{92} = 21{,}739.130{\cdot}43$$

Die Formel für ein zu tilgendes Capital mit nachschussweiser Annu zahlung ist

$$N\,(1 + p)^n - a\,\frac{(1 + p)^n - 1}{p} = 0$$

Setzen wir nun hierin den Ausdruck $1 + p = v$, worin nach ($P = 100\,p = 5\%$, also $v = 1{\cdot}05$ ist, so erhalten wir

$$N = a\,\frac{v^n - 1}{v^n\,(v - 1)} = a\,\frac{(1{\cdot}05)^{30} - 1}{(1{\cdot}05)^{30} \cdot 0{\cdot}05} = a.\ 15{\cdot}3724624$$

worin a die Annuität, n die Tilgungsfrist bezeichnet.

Demgemäss erhalten wir für die Annuität den Werth

$$a = \frac{21{,}739.130{\cdot}43}{15{\cdot}3724624} = 1{,}413.510{\cdot}70$$

Es sei nun ferner

$1 + q = u$, worin $Q = 100\,q = 4\frac{1}{2}\%$, daher $u = 1{\cdot}045$,

so ergibt sich

$$N' = a\,\frac{u^n - 1}{u^n\,(u - 1)} = a\,\frac{(1{\cdot}045)^{30} - 1}{(1{\cdot}045)^{30} \cdot 0{\cdot}045} = a.\ 16.2888915$$

und hieraus schliesslich nach Substitution des Werthes von a

$$N' = 1{,}413.510{\cdot}70 \times 16{\cdot}2888915 = 23{,}035.108{\cdot}30$$

Bezeichnen wir nun den effectiven Darlehenswerth allgemein mit D, so k wir folgende Relation für unsere Aufgabe stellen:

1) $$N'\,C' = 100 \cdot D$$

und hieraus für unser Beispiel

$$C' = 86{\cdot}82$$

Demgemäss ist die Proposition von *B* eine günstigere als diejenige v weil der Cours 86·82 bei $4\frac{1}{2}$%iger nomineller Verzinsung mit demjenigen v bei 5%iger Verzinsung die Parität besitzt und *B* den Uebernahmscours v bietet, also um 0·18 mehr.

Die Form 1) führt uns nun weiter zu folgenden Resultaten:

Analog zu dieser ergibt sich offenbar auch

$$N\,C = 100\,.\,D$$

d somit die Relation

$$N\,C = N'\,C'$$

d hieraus das Verhältniss zweier eine Parität bildenden Course

$$C' : C = \frac{v^n - 1}{v^n (v - 1)} : \frac{u^n - 1}{u^n (u - 1)}$$

Ist nun der Uebernahmscours zweier verschiedener Anbote derselbe, jedoch der nsfuss und die Tilgungsfrist eine verschiedene, so nimmt die Relation 4) folgende m an.

Die Gleichheit der Uebernahmscourse involvirt die Bedingung

$$C = C'$$

it

$$\frac{v^n - 1}{v^n (v - 1)} = \frac{u^n - 1}{u^n (u - 1)}$$

Da jedoch eine ungleiche Tilgungsfrist vorausgesetzt wird, so erhalten wir

$$\frac{v^n - 1}{v^n (v - 1)} = \frac{u^m - 1}{u^m (u - 1)}$$

Sind nun die beiden Tilgungsfristen m und n gegeben und es soll die Parität einen der Zinsfüsse ermittelt werden, so gelangen wir auf folgende Art zum ltate.

Aus der Gleichung 5) muss offenbar v ermittelt werden, wenn u gegeben ist umgekehrt.

Wir erhalten somit

$$v = 1 - \frac{u^m (u - 1)}{u^m - 1} \left(\frac{1}{v^n} - 1 \right)$$

Erheben wir dies zur $n$ten Potenz auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$v^n = \left[1 - \frac{u^m (u - 1)}{u^m - 1} \left(\frac{1}{v^n} - 1 \right) \right]^n$$

hieraus die Ersatzgleichung

$$z = v^n = \underset{z_0 > u^n}{\overset{n > m}{\mathrm{E}}} \left[1 + \frac{u^m (u - 1)}{u^m - 1} \left(1 - \frac{1}{z_0} \right) \right]^n$$

in z_0 den Näherungswerth von z darstellt.

Es sei z. B. ein tilgbares Anlehen mit einem bemmten fixen Uebernahmscourse zu contrahiren. macht den Anbot bei 4·8%iger Verzinsung eine Tilngsfrist von vierzig Jahren zu gewähren, B offerirt gegen bei einem Zinsfuss von 4% blos eine dreissighrige Tilgungszeit; welcher der beiden Anbote ist r günstigere?

Diesem Beispiele entsprechen die Werthe $u = 1{\cdot}04$, $m = 30$ und $v = ?$, $= 40$, im Falle die Parität der beiden Anbote hergestellt werden soll.

Wir erhalten somit

$$z = \underset{z_0 > 4\cdot8}{\mathrm{E}} \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{17\cdot2918} \right]^{40}$$

als die für diesen speciellen Fall giltige Ersatzgleichung, welcher das Resu

$$z = v^{40} = 6\cdot8888$$

entspricht, woraus der Werth für v resultirt

$$v = 1\cdot04944$$

welcher einen Zinsfuss von 4·94% bei vierzigjähriger Tilgungsfrist als Pa
dem Anbot B ergibt.

Da nun A bei vierzigjähriger Tilgung blos eine Verzinsung von 4·8
spruchet, so ist dessen Anbot der günstigere.

Wie wir nach diesen beiden Beispielen ersehen haben, nimmt bei unve
Tilgungsfrist der Zinsfuss mit dem Uebernahmscours zu; und bei unver
Uebernahmscours der Zinsfuss mit der Tilgungsfrist. Da nun ferner bei zun
Tilgungsfrist bekanntlich der Uebernahmscours im Abnehmen oder der Zi
Zunehmen begriffen ist, so geht daraus hervor, dass bei gleichzeitiger Zun
Uebernahmscourses und der Tilgungsfrist der Zinsfuss einem doppelten W
unterworfen sein wird.

Folgendes Beispiel mag dies illustriren. A macht den Anb einem Uebernahmscours von 96 und 5%iger Verzi eine Tilgungsfrist von vierzig Jahren zu gewä B dagegen offerirt bei einem Uebernahmscours und einer 4%igen Verzinsung blos eine dreissigjä Tilgungsfrist; welcher der beiden Anbote ist de stigere?

Die Formen 4), 5) und 6) liefern uns für diesen Fall die nöthig
gleichung; es ist nämlich analog zu obigem Beispiel

$$7) \qquad z = v^n = \underset{z_0 > u^n}{\overset{n > m}{\mathrm{E}}} \left[1 + \frac{C}{C'} \cdot \frac{u^m (u-1)}{u^m - 1} \left(1 - \frac{1}{z_0} \right) \right]^n$$

worin jedoch die Uebernahmscourse C' mit u und C mit v correspondiren,
$C' = 94$ und $C = 96$ ist.

Wir erhalten somit für unser Beispiel

$$z = v^{40} = \underset{z_0 > 4\cdot8}{\mathrm{E}} \left[1 + \frac{96}{94} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{17\cdot2918} \right]^{40}$$

und nach durchgeführter Rechnung

$$z = v^{40} = 7\cdot2577$$

und schliesslich $\qquad v = 1\cdot0509$

was einer Verzinsung von 5·09% entspricht, wenn die Parität mit dem
hergestellt sein soll. Da nun A blos 5% beansprucht, so ist dessen Anbo
der günstigere.

Dr. Ludwig Grossmann's

rörterungen über den Zinsfuss vom volkswirthschaftlichen Standpunkte.

Der Zinsfuss ist der proportionale Ausdruck der relativen Capitalsverwerthung. as Capital und die Arbeit sind Factoren, die sich in ihrer Nützlichkeit gegen- itig ergänzen, daher vereint grosser Leistungen fähig sind. Das Capital trägt zur rderung der Arbeit bei und kann daher ohne Einbusse seiner absoluten Menge enfalls eine Arbeit verrichten, welche auch entsprechend entlohnt werden muss. aturgemäss wird füglich mehr Capital auch mehr Arbeit zu fördern im Stande in und somit muss mit dessen Menge sein Antheil am Arbeitserträgniss pro- rtional wachsen. Den verhältnissmässigen Antheil, welchen das Capital an dem utzen der Gesammtarbeit für deren Förderung nimmt, kann man als einen dem nsfusse entsprechenden Aequivalenten betrachten. Dort, wo die Arbeit durch das pital gefördert wird, ist daher dessen Leistung zumeist eine afficirende und egt in derselben seine eigentliche Nützlichkeit. Dieser Antheil an der Fructificirung er Arbeit erfährt jedoch eine periodische Regelung, die in den allgemeinen Um- änden, mit denen der Capitalsbedarf zusammenhängt, zum Ausdruck kommt. Die utzbarmachung des Arbeitszweckes, dessen Angebot und Nachfrage einer Veränder- hkeit unterworfen ist, kann als massgebender Factor für die Leistungsintensität mobilen Capitales in Verbindung mit der Arbeit angesehen werden. Der eilige Stand der Arbeitsergiebigkeit und der mit derselben zunehmenden Leistungs- ensität steigert den Capitalsbedarf, wodurch wir zu dem Schlusse gelangen, dass urch erhöhte Nutzbarmachung des Arbeitszweckes eine Steigerung der relativen apitals-Verwerthung sich ergibt, womit selbstverständlich auch die Eventualität einer höheren Verzinsung zusammenhängt. Bei geringerer Arbeitsergiebigkeit wird daher sowohl die nackte Arbeitskraft, als auch das zu deren Förderung nöthige Capital n relativer Verwerthungs-Erspriesslichkeit verlieren, was zur Folge hat, dass auch eine Ermässigung des Zinsfusses platzgreift.

Betrachten wir nun das Capital von jenem Standpunkte, in welchem sich der Staat zu demselben befindet. Die sich von Jahr zu Jahr mehrenden Erfordernisse zwingen denselben, seine jährlichen Einnahmen immer mehr zu capitalisiren. Die Einnahmen, die zur Bestreitung des Staatshaushaltes dienen sollen, müssen immer mehr zur Bestreitung der Zinsen herangezogen werden und wird zur Ergänzung des Ausfalles die Arbeit zunehmend belastet. Fragen wir jedoch, welche Arbeit das vom Staate innegehabte Capital verrichtet, so finden wir, dass dieselbe weit unter dem Niveau der allgemeinen Leistung sich befindet. Der grösste Theil des Capitals wird einfach durch den Staat absorbirt, ohne zur Förderung einer Arbeit herangezogen zu werden, d. h. es wird nicht die relative, sondern die absolute Verwerthung des- selben in's Auge gefasst. Hiedurch geht also ein grosser Theil der arbeitfördernden aft verloren, was zur Folge hat, dass der Antheil, den das Capital für seine För-

dernde Leistung im Allgemeinen zu beanspruchen berechtigt ist, in keinem Ver
nisse zu deren Geringfügigkeit steht, welche dem Capital im Staate zugewiese
Und dieser Antheil muss vom Staate ebenso entrichtet werden, als ob derselb
Arbeit fördernde Kraft des Capitals voll und ganz ausnützen würde. Gezwu
neben den Kosten eines Staatshaushaltes den Bedarf an Zinsen zu decken, be
er den Arbeitsertrag immer mehr und vertheuert in doppelter Hinsicht die förd
Kraft des Capitals, die nackte Arbeitskraft und somit auch den Arbeitszweck,
die Bedingungen eines höheren Arbeitserträgnisses zu unterstützen. Auf diese
wird der fremdstaatlichen Concurrenz Thür und Thor geöffnet. Nun trachtet
durch Prohibitiv-Massregeln dieser Concurrenz entgegenzutreten, indem man
Einfuhrzölle immer mehr erhöht. Andere Staaten von demselben Bedürfnisse be
schliessen sich wirthschaftlich vollständig ab, und suchen in einem Auskunftsm
Rettung, welches scheinbar dieselbe verspricht, hinter welchem jedoch der gän
Ruin des handelspolitischen Weltverkehres lauert. Staaten, welche energisch
sind, der eigenen Ueberproduction Ventile zu öffnen, indem sie den Export
überseeischen Märkten dirigiren und keine Mittel scheuen, dieses ihr Vorhaben
Kräften zu unterstützen, werden aus dieser wirthschaftlichen Umwälzung den N
ziehen. Es wüthet ein wirthschaftlicher Kampf, welcher früher oder später zur
scheidung führen muss. Wir leben in einer Epoche, in welcher die Concu
mächtige Triebe zeitigt; die fördernde Leistungsfähigkeit des Capitals ist das
bende Element, mit dessen Hilfe die Massenproduction ihre Siege feiert, indem
mit dem Massenvertrieb Hand in Hand geht und den Arbeitszweck verwohl
Dies kann aber nur in Staaten der Fall sein, wo die Bedingungen einer bil
Capitalsbeschaffung in ausgedehntestem Masse vorhanden sind und der Arbeits
nicht unter dem Drucke des Zinsfusses verkümmert In dieser Beziehung übt
die Creditfähigkeit eines Staates einen ganz besonderen Einfluss aus. Die Sich
der Anlage ist ein sehr gewaltiger Factor in der Verwerthung des Capitals, w
mit dem jeweiligen Zinsfusse förmlich im umgekehrten Verhältnisse steht. Je
daher die finanzielle Situation eines Staates beschaffen ist und je rationeller de
seinen natürlichen Reichthum zu verwerthen weiss, desto billigeres Geld kann
Bedarfsfalle erhalten und desto günstiger wird er seine Einnahmen capitalisiren
nächste Folge hievon ist, dass der Capitalist nicht in die Lage kommt, sein
in absoluter Sicherheit theuer zu verwerthen, wodurch die arbeitsfördernde Kraf
Capitals verwohlfeilt wird, und der Bedingung der günstigen Verwerthung
natürlichen Schätze eines Staates von selbst entsprochen wird.

Infolge der geringeren Bedürfnisse des Staates zur Deckung seiner Z
erfährt ferner die Belastung des Arbeitsertrages eine Herabsetzung und die un
bare Folge hievon ist mit Rücksicht auf die minder kostspielige, arbeit-förd
Kraft des Capitales eine billigere Erzielung des Arbeitszweckes und die hiemit
bundene grössere Concurrenzfähigkeit. Solange der Capitalist in der Lage ist,
Geld in Staatspapieren also bei verhältnissmässig bester Sicherheit mit einem
Zinsfusse anzulegen, wird er dasselbe der industriellen Verwerthung verschliess
werden also nur diejenigen Industrien prosperiren können, deren Ertrag aus

oder örtlichen Ursachen ein der theueren Capitalskraft entsprechender ist. elangt also ohneweiters zu dem Resultate, dass derjenige Staat handelsh der leistungsfähigste ist, der mit dem billigsten Capitale concurriren kann. lligere, fördernde Kraft kommt dem Preise des Arbeitszweckes zugute.

n einem Staate, in welchem der Zinsfuss infolge ungünstiger finanzieller Verse, und der hiedurch in Mitleidenschaft gezogenen Sicherheit ein verhältnisshoher ist, spielt aber auch noch ein anderer wichtiger Factor eine Rolle. In des höheren Zinsfusses betheiligt sich auch sehr viel ausländisches Capital am der bezüglichen Staatstitres, wodurch naturgemäss ein grosser Theil der nen Zinsen nach dem Auslande gravitirt. Da sich jedoch das durch den Staat irte Capital nicht rentirt, so zehrt der Verlust, den derselbe in der Differenz en Erträgniss und Verzinsung erleidet, nach und nach das im Lande investirte l auf, wogegen die Zinsen hiefür auch fernerhin gezahlt werden müssen. Freilich s bei einem entsprechend grossen Exporte nicht möglich, weil der Staat leicht vom Auslande soviel Geld hereinbringt als er an Zinsen demselben zuführt. loch aus einem höheren Zinsfusse auch eine kostpieligere Förderung der Arbeit, uch eine geringere Concurrenzfähigkeit resultirt, so ist für diesen Fall ein s Auskunftsmittel nahezu ausgeschlossen.

Ziehen wir nun aus alldem die Consequenzen, so finden wir, dass in einem , wo der Zinsfuss bei relativ bester Sicherheit ein verhältnissmässig hoher ist, rbeit durch das Capital verdrängt wird, indem dieselbe gezwungen wird, einerihre Förderung mit grösseren Opfern zu erkaufen andererseits zur Verzinsung taatsanleihen mehr beizutragen. Hiedurch entsteht aber ein Missverhältniss en der rechtmässigen Forderung und thatsächlichen Entlohnung, welche einerder Arbeit im geringeren, andererseits dem Capital im erhöhten Masse für fördernde Leistung zufliesst. Die Leistung des Capitals wird daher verhältnissg höher angeschlagen, als ihr eigentlicher Werth im Verhältniss zu demjenigen rbeit repräsentirt. Die nächste Folge hievon ist, dass das Capital in einzelnen en rasch angehäuft wird und eine erhöhte Nachfrage erzeugt, wodurch das Uebel h grössere Dimensionen annimmt. Die Arbeit sinkt zusehends in ihrem Werthe, gen die fördernde Kraft des Capitals in ihrer relativen Werthschätzung steigt. kann daher den allgemein giltigen Satz aufstellen, *dass der Werth der eit im umgekehrten Verhältnisse zur relativen e des Zinsfusses sich befindet.* Stellt man nun eine Parallele hen zweien Nachbarstaaten auf, von denen der eine seine Schulden niederer als ndere verzinst, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die bezüglichen Arbeitse im umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden Verzinsungsbedingungen sich ten. Von welcher Tragweite es aber auf die Leistungsfähigkeit eines Staates nerhalb dessen Grenzen die Arbeit verhältnissmässig entwerthet ist, wird nicht r zu ermessen sein. Nicht nur schwerere Erwerbsbedingungen, sondern auch re Anforderungen von Seite des Staates sind es, welche dann im potenzirten einen verzweifelten Existenzkampf erzeugen, der noch durch den steten Abfluss obilen Capitales nach Aussen unaufhörlich verschärft wird. Das schliessliche

Resultat ist daher eine vollständige Erschöpfung des Nährstandes und endl
wirthschaftliche Ruin. Es liegt daher in der rationellen Finanzwirthschaf
Staates, beziehungsweise in der Förderung seines Credites, von dem bekanntlic
die Verwohlfeilung des Zinsfusses abhängt, die Grundlage für seine gesammte
Prosperität, da durch die wirthschaftliche Kräftigung der inneren Verhältnis
eine erhöhte Leistungsfähigkeit erzeugt wird, mit welcher wieder eine ges
Creditfähigkeit verbunden ist, so dass hier ein förmlicher Kreislauf der I
stattfindet, welcher je nach der Beschaffenheit derselben einen Aufschwun
Niedergang der gesammtstaatlichen Wirthschaftsverhältnisse hervorbringt. I
wird ein Agriculturstaat solchen Einflüssen länger zu trotzen im Stande se
ein Industriestaat, weil die Kraft seiner wirthschaftlichen Existenzbedingun
widerstandfähigere ist, jedoch wird dann die Veränderlichkeit im Ertrage
natürlichen Erwerbsquellen dessen Verhältnisse desto mehr beeinflussen.

Dort, wo der Staat zum grössten Theile auf den Ertrag der verschi
Industriezweige angewiesen ist, kann sich jedoch die Situation viel drohen
stalten, weil hier das wirthschaftliche Abhängigkeits-Verhältniss bedeutend
sich äussert, insbesondere, wenn die geographische Lage keine besonders g
ist. Industriestaaten, deren natürliche Grenzen vom Meere bespült werden, sind
fast ohne Ausnahme wirthschaftlich kräftiger, wogegen solche, bei denen di
theilweise oder gar nicht der Fall ist, zum grössten Theile auf den continentalen
beschränkt sind und daher unter der Concurrenz der angrenzenden Staaten zu leiden

Der Zinsfuss, auf Grund dessen ein Staat seine Schulden contrahirt,
daher mit Bezug auf denjenigen anderer Staaten, als Massstab der jeweiligen
schaftlichen Prosperität eines solchen betrachtet werden; und zwar ist dieselb
desto geringere, je höher sich dieser Zinsfuss relativ stellt. Ist also diese
eine verhältnissmässig bedeutende, so bildet dieselbe eine eminente Gefahr f
betreffenden Staat. Nicht aber dieses allein ist es, welches den wirthschaf
Bestand eines solchen bedrohen kann, sondern hauptsächlich die progressive Stei
dieses Verhältnisses, welche sich unwillkürlich in ihrem verderblichen Einflusse a
inneren Zustände kundgibt. Immerhin wird die mehr oder weniger schroffe W
desselben von den handelspolitischen Beziehungen beeinflusst, so dass die Art de
politik diesbezüglich eine oft entscheidende ist. Das Prohibitivsystem ist es
insbesondere, welches die schleichenden Schäden einer solchen Situation eig
entfesselt, da durch dasselbe die wirthschaftlichen Gegensätze unter den Staat
Allgemeinen und den jeweiligen Nachbarstaaten insbesondere bedeutend vers
werden. Dann gelangt dieser Factor erst so recht zur Geltung, indem die U
samkeit der Gegenmassnahmen des wirthschaftlich schwächeren Staates geg
dem solchermassen stärkeren in ihren Folgen sich kundgibt, welche eine förm
Wehrlosigkeit des Ersteren gegenüber dem Letzteren documentiren. Die wohl
fördernde Kraft des Capitals ersetzt auf diese Weise die Legionen im wirths
lichen Kampfe, welche dröhnenden Schrittes die ohnehin spärliche Saat des i
Wohlstandes eines unter minder günstigen Umständen rivalisirenden Staates zerm

---

ckdeckung, Austausch und Theilung der Brandschadenrisken.

Ein jedes Versicherungsobject bildet nach Massgabe seiner Feuergefährlichkeit grösseres oder kleineres Risico für die Versicherungsbank und wird bekanntlich dementsprechend die vom Versicherten zu zahlende Prämie bemessen. Einen ecten Einfluss auf die Höhe der Risken bildet aber auch das Quotenverhältniss denselben entsprechenden versicherten Summen und ist es im Allgemeinen neben richtigen Bemessung der Prämie eine Hauptbedingung für die rationelle Handung, diesen Einfluss nach Möglichkeit zu reguliren. Eine jede Versicherungsbank, ihrem Feuerversicherungs-Geschäft die nöthige Obsorge angedeihen lässt, wird in eigene Gefahr zu übernehmenden Versicherungsbeträge derart bemessen, dass nach Massgabe der Feuergefährlichkeit der zu versichernden Objecte blos die messenen Beträge auf eigene Rechnung einstellt, die übrigen zur Versicherung ngten Mehrbeträge jedoch entweder im Ganzen oder in Theilquoten auf andere sicherungs-Anstalten überträgt. Dies geschieht zumeist durch directe Rückdeckung, m die Versicherungsbank einen Theil ihres übernommenen Risicos einer Rückicherungs-Anstalt überträgt und derselben hiefür eine entsprechende Prämie hlt, oder durch vertragsmässige gegenseitige Theilung der übernommenen Risken chen mehreren Versicherungs-Anstalten, welche Form mit dem sogenannten Riskentausch gleichbedeutend ist. Der Zweck, welcher in diesem Risken-Austausch liegt, sich leicht erkennen, wenn man bedenkt, dass die Feuerversicherung in der ge der versicherten Objecte ihre Prosperität findet. Auf je mehr Objecte in einem icherungsstock das Risico vertheilt ist, desto mehr nähert sich das Verniss der diversen Prämien zum jeweilig übernommenen Risico dem wirklichen ndschaden-Ergebnisse. Hieraus lässt sich die logische Folgerung aufstellen, dass e Prosperität eigentlich der Verschiedenheit der Risken, welche aus deren Menge ltirt, entspringen muss, und man gelangt daher zu dem folgerichtigen Schlusse, man in der unverhältnissmässigen Höhe der übernommenen Gewähr eines Schadentzes für ein einzelnes Risico eine Beeinträchtigung der Riskenverschiedenheit icken muss, welche in dem Masse zunimmt, als das Verhältniss der versicherten nmen zur Höhe der entsprechenden Einzelnrisken von der regelmässigen Proporalität abweicht. Die Höhe des auf eigene Gefahr von der Versicherungsbank gewährleten Schadenersatzes muss daher der Feuergefährlichkeit des entsprechenden ectes nicht nur angemessen sein, sondern dieselbe muss auf einer einheitlichen ndlage, welcher sämmtliche Beträge des Versicherungsstockes angepasst sind, uhen; das heisst es muss eine verhältnissmässige Vertheilung der Versicherungsräge nach der jeweiligen Höhe des Einzeln-Risicos stattfinden, und zwar naturnäss je höher die Schadengefahr, desto geringer der in eigene Gefahr übernmene Versicherungsbetrag. Diese Regelmässigkeit des Verhältnisses zwischen ico und Versicherungssumme innerhalb eines Versicherungsstockes festzustellen, wir uns nun bekanntlich in den früheren Abhandlungen zur Aufgabe

gestellt und
percentual
Massgabe d
sein kann.
arbeitet un
beträgen d
sicherungs
vorsichtig
der Lage
zur Versi
gebend f
theil der
Anstalt
festgeset
welche
beziehun
gleichbl
kleiner
höhere
in der
reserve
verschi
der Be
handen
Risken
Basis
diese
Versic
behalt
jeder
stock
der kl
stufen
mögli
die S
druck
ergeb

zur
Gelt
Cont
setzu
stock

Dr. Ludwig Grossmann's

...tische Risken-Schätzung in der Brandschaden-Versicherung.

...dpunkte der Statistik sind wohl nur die zufälligen Ursachen, welche ...sgefahr proportional wachsen, mathematisch controlirbar. Immerhin ...ie meteorologischen und ökonomischen Verhältnisse, welche bei der ...g ebenfalls eine nicht unbedeutende Rolle spielen, auf erfahrungs-...dsätzen fussend, sich einem gewissen Modus unterordnen lassen. Das ...hältniss zwischen Ursache und Wirkung werden dieselben wohl nicht ...n, weil deren Einfluss ebenfalls mit der voraussichtlichen Feuersgefahr ...ächst und daher blos von generell afficirender Beschaffenheit ist; und ...olge dessen blos, die voraussichtliche Feuersgefahr der zu versichernden ... gewisses Verhältniss zu bringen und die ermittelten Resultate ver-...behandeln. Auf diese Weise gelangt man zu einer stufenweise geord-... von Ursachen, welche mit den zugehörigen statistisch ermittelten ...ne gewisse Gesetzmässigkeit involviren, mittelst deren es möglich ist, ... eines bestimmten einheitlichen Massstabes die Höhe der Risken und ... entsprechenden Prämien festzustellen. Aber nicht allein in Betreff der ...hkeit der Entstehung eines Brandes, vielmehr auch hinsichtlich seiner ...usbreitung lässt sich aus der Art der voraussichtlichen Feuergefähr-...nnähernd zuverlässiger Schluss ziehen, indem die vorhandenen Gefahr-... Umsichgreifen eines solchen mehr oder weniger begünstigen.

...wecke einer den Erfordernissen entsprechenden Riskenschätzung ist nun ...oben bemerkt worden, ein einheitlicher Massstab nothwendig, welcher ...enheit eines durchschnittlich guten Risicos besitzt, und dem eine gewisse ...emäss festgesetzte, sowohl den statistischen Resultaten, als auch den ...rtlichen Verhältnissen, wirthschaftlicher und meteorologischer Art entspre-...mie Genüge leistet.

... der Voraussetzung, dass für die einem Normal-Risico entsprechenden n_0 ...efahrmomente, der Gefahreffect 0 ist, gelangt nun bekanntlich folgende ...ur Geltung:

$$\varepsilon = \frac{p}{g} - 1$$

...n Gefahreffect, p die einem beliebigen Risico entsprechende Prämie und ...undprämie bezeichnet. Ist also die einem beliebigen Risico entsprechende ... $= g$, so wird in obiger Form offenbar $\varepsilon = 0$ werden müssen.

... Hilfe statistischer Untersuchungen und Benützung mathematisch analy-...rincipien gelangten wir ferner in den Abhandlungen über «Mathematische ...er Feuerv...erungs-Prämie» zur folgenden interessanten Formel:

$$\frac{\varepsilon + n_0}{n_0^2} \, lg \, \frac{\varepsilon + 1}{n_0 \, (n_0 - 1)}$$

... ... und Wirkung zum Ausdruck bringt, indem sie ... ε und jener dem jeweiligen Risico

normales und nicht normales Risico gänzlich von einander getrennt bleiben. Zum dürfte sich auch die Basis A für Fabriken- und Gebäude-Risico verschieden ergeben. Auf diese Weise würde auch das Unterbieten der Prämie aufhören, da jeder Versicherer im eigenen Interesse seine Risken mit grösserer Vorsicht zu un suchen gezwungen wäre, so dass die unsolide Concurrenz von selbst aufhören wü Anders verhält es sich jedoch beim Austausch von Risken. Hier wird hauptsäch der dem Risico entsprechende Schadeneffect S beziehungsweise S' eine Rolle spie Sind die beiden auszutauschenden Risken normaler Beschaffenheit, so kann blos Regelung in Betreff der entsprechenden Versicherungsbeträge und der Prämi differenz statthaben, da für normales Risico ein und derselben Risken-Kateg (Fabriken oder Gebäude) sich der Schadeneffect gleich bleibt. Nicht so einfach gest sich dies, wenn die beiden auszutauschenden Risken nicht normaler oder ungleicher Beschaffenheit sind, so dass in den entsprechenden Schadeneffecten Werthunterschied besteht. Dann wird die den betreffenden Risken entsprech rechnungsmässig ermittelte Brandschaden-Reserve von Massgabe sein. Es wird näm ein glatter Austausch von Risken nur dann stattfinden können, wenn die Sum der ermittelten Brandschaden-Reserven beiderseits als gleichwerthig sich ergeb d. h. das zu übernehmende Gesammtrisico auf der einen Seite, demjenigen auf der and gleichkommt. In Folge dessen wird auch hier ein Serien-Austausch von Vort sein, indem mit Hilfe desselben eine durchschnittliche Gleichwerthigkeit der Ris erreichbarer ist. Die rechnungsmässig ermittelte Höhe der Reservewerthe kann auch bei der Rückversicherung zur Grundlage eines Vertrages in Bianco gem werden, indem zwischen dem Versicherer und Rückversicherer ein nicht zu üb schreitender Durchschnittsreservewerth festgesetzt wird, dessen Beschaffenheit numerisch ausgedrückte Schadengefahr hiedurch in der zweckmässigsten Weise Geltung gelangt.

Geschieht die Rückdeckung an mehrere Anstalten zugleich, so ist es vorth haft, in dieser Beziehung nach einem gewissen Turnus vorzugehen, und zwar de dass je ein besseres Risico mit einem minder guten in einer womöglich entsprech verhältnissmässigen Weise in den Serien abwechselt, wodurch einer grösseren Ue schreitung der vertragsmässigen Beschaffenheit von vornherein vorgebeugt wird.

Die Retrocession der Risken erlangt auf diese Weise eine sichere Grund und zweckentsprechende Eignung, denjenigen Anforderungen Genüge zu leisten, an dieselbe mit Rücksicht auf ihren eigentlichen Zweck gestellt werden. Nicht dass der Versicherer viel glatter seine Rückdeckungen zur Durchführung zu brin in der Lage ist, es wird vielmehr auch dem Rückversicherer die Möglichk geboten, seinen Rückversicherungsstock rationeller zu handhaben, indem die re cedirten Riskenserien schon bei ihrer Uebernahme den Ansprüchen der relati Gleichwerthigkeit in Betreff des Gefahren-Coëfficienten ganz oder theilweise Ge leisten. Hiedurch wird die Collision, welche zwischen den auf Erfahrungsgrundsät beruhenden Voraussetzungen und den wirklichen Ergebnissen zu Tage tritt, in de selben Masse behoben, als den allgemeinen Beziehungen der Gesammtrisken zu einander Rechnung getragen wird.

Dr. Ludwig Grossmann's

Systematische Risken-Schätzung in der Brandschaden-Versicherung.

Vom Standpunkte der Statistik sind wohl nur die zufälligen Ursachen, welche der Feuersgefahr proportional wachsen, mathematisch controlirbar. Immerhin den auch die meteorologischen und ökonomischen Verhältnisse, welche bei der kenschätzung ebenfalls eine nicht unbedeutende Rolle spielen, auf erfahrungsässen Grundsätzen fussend, sich einem gewissen Modus unterordnen lassen. Das ntliche Verhältniss zwischen Ursache und Wirkung werden dieselben wohl nicht iren können, weil deren Einfluss ebenfalls mit der voraussichtlichen Feuersgefahr portional wächst und daher blos von generell afficirender Beschaffenheit ist; und ügt es in Folge dessen blos, die voraussichtliche Feuersgefahr der zu versichernden ecte in ein gewisses Verhältniss zu bringen und die ermittelten Resultate verchend zu behandeln. Auf diese Weise gelangt man zu einer stufenweise geordn Reihe von Ursachen, welche mit den zugehörigen statistisch ermittelten kungen eine gewisse Gesetzmässigkeit involviren, mittelst deren es möglich ist, Grundlage eines bestimmten einheitlichen Massstabes die Höhe der Risken und denselben entsprechenden Prämien festzustellen. Aber nicht allein in Betreff der hrscheinlichkeit der Entstehung eines Brandes, vielmehr auch hinsichtlich seiner ntuellen Ausbreitung lässt sich aus der Art der voraussichtlichen Feuergefährkeit ein annähernd zuverlässiger Schluss ziehen, indem die vorhandenen Gefahrnente das Umsichgreifen eines solchen mehr oder weniger begünstigen.

Zum Zwecke einer den Erfordernissen entsprechenden Riskenschätzung ist nun bereits oben bemerkt worden, ein einheitlicher Massstab nothwendig, welcher Beschaffenheit eines durchschnittlich guten Risicos besitzt, und dem eine gewisse hrungsgemäss festgesetzte, sowohl den statistischen Resultaten, als auch den eiligen örtlichen Verhältnissen, wirthschaftlicher und meteorologischer Art entsprende Prämie Genüge leistet.

Unter der Voraussetzung, dass für die einem Normal-Risico entsprechenden n_0 nster Gefahrmomente, der Gefahreffect 0 ist, gelangt nun bekanntlich folgende ation zur Geltung:

$$\varepsilon = \frac{p}{g} - 1$$

in ε den Gefahreffect, p die einem beliebigen Risico entsprechende Prämie und die Grundprämie bezeichnet. Ist also die einem beliebigen Risico entsprechende mie $p = g$, so wird in obiger Form offenbar $\varepsilon = 0$ werden müssen.

Mit Hilfe statistischer Untersuchungen und Benützung mathematisch analyher Principien gelangten wir ferner in den Abhandlungen über «Mathematische nitirung der Feuerversicherungs-Prämie» zur folgenden interessanten Formel:

$$\varepsilon = \frac{s + n_0}{n_0^2} \, lg \, \frac{s + 1}{n_0 \, (n_0 - 1)}$$

lche das Gesetz zwischen Ursache und Wirkung zum Ausdruck bringt, indem sie n Beziehungen zwischen dem Gefahreffect ε und jener dem jeweiligen Risico

entsprechenden Grösse s, das ist der Summe gewisser Gefahr-Aequivalente Genü
leistet, welche die Intensität des Einflusses der jeweilig vorhandenen grösseren od
kleineren Gefahrmomente ziffermässig auszudrücken, die Aufgabe haben.

Durch Verbindung der beiden Formen 1) und 2) gelangt man schliesslich
einem Ausdrucke, durch welchen die Prämie eines beliebigen Risicos bestim
werden kann; derselbe lautet:

$$3) \qquad p = g\left[1 + \frac{s + n_0}{n_0^2} lg \frac{s+1}{n_0(n_0-1)}\right]$$

Die Höhe der Prämie p wird hiedurch direct abhängig von der Anzahl der bei d
bezüglichen Risico vorhandenen Gefahrmomente, respective der denselben e
sprechenden Gefahräquivalentensumme, indirect von der allgemeinen Risk
Beschaffenheit des zu versichernden Objectes, und der relativen Beschaffenheit
jeweilig festgesetzten Normalrisicos, welches als Grundlage hinsichtlich der m
oder weniger rigorosen Art der Riskenschätzung einerseits und der Prämienbemess
andererseits angesehen werden kann.

Da nun sowohl die Festsetzung der Höhe der Grundprämie, als auch der d
Normalrisico entsprechenden Anzahl kleinster Gefahrmomente n_0 innerhalb der m
lichen Grenzen vollständig dem praktischen Gutachten anheimgestellt bleibt, so
hiedurch nicht nur ein Spielraum für die jeweiligen Feuerversicherungs-Kategor
nach Massgabe ihrer allgemeinen Riskenbeschaffenheit gegeben, sondern auch
Möglichkeit einer Correctur betreff der örtlich verschiedenartigen Verhältnisse wir
schaftlicher und meteorologischer Beschaffenheit geboten. Zur Erschöpfung des
liegenden Themas erübrigt daher nur noch, die jeweiligen Gefahrmomente, je n
ihrer Beschaffenheit, mit den entsprechenden Gefahräquivalenten zu versehen
dieselben mit ihrem Einflusse auf die Feuersgefahr diesbezüglich in gehörigen E
klang zu bringen.

Die in der festgesetzten Anzahl n_0 dem Normalrisico entsprechenden Gef
momente müssen bekanntlich durchwegs von kleinster Beschaffenheit sein. Zugl
entspricht, wie schon erwähnt, dem Normalrisico die Grundprämie g in ihrem nack
Werthe als Prämie.

In der Form 3) muss daher, wenn dem Normalrisico, d. i. der Bedingung

$$4) \qquad p = g$$

entsprochen werden soll, der Ausdruck

$$5) \qquad \frac{s + n_0}{n_0^2} lg \frac{s+1}{n_0(n_0-1)} = 0$$

zur Geltung gelangen; und da s und bekanntlich auch n_0 blos positiv sein ka
so wird dieser Bedingung nur dann Genüge geleistet, wenn der Relation

$$6) \qquad \frac{s+1}{n_0(n_0-1)} = 1 \text{ resp. } s_0 = n_0(n_0-1) - 1$$

entsprochen wird, wobei s_0 der Summe der Gefahräquivalente einer durch n_0 au
gedrückten Anzahl kleinster Gefahrmomente gleichkommt. Den Werth eines klein
Gefahräquivalenten — bezeichnen wir denselben mit v_0 und ohne Rücksicht auf se

rösse allgemein mit v — erhalten wir daher, wenn wir die dem Normalrisico entrechende Gefahräquivalenten-Summe s_0 durch n_0, d. i. die diesbezügliche Anzahl einster Gefahrmomente dividiren; also

$$v_0 = \frac{s_0}{n_0} = n_0 - 1 - \frac{1}{n_0}$$

kleinster Werth der ziffermässig ausgedrückten Intensität eines Gefahrmomentes, h. eines minimalen Gefahräquivalenten.

Ein Gefahräquivalent v zeigt jedoch im Allgemeinen diejenige Prämienquote welche wahrscheinlicherweise durch die aus dem entsprechenden Gefahrmomente ntuell entspringende zufällige Ursache eines Brandes, gefährdet erscheint. Da jedoch den Specialfall eines Normalrisicos die Grundprämie g massgebend ist, so muss ch das Verhältniss zwischen dem kleinsten Gefahräquivalenten v_0 und dieser, dieige Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck gelangen, mit welcher ein kleinster Gefahrment die zufällige Ursache eines Brandes fördern könnte.

Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit durch den Factor σ, so ergibt sich für die Relation

$$\sigma_0 = \frac{v_0}{g} = \frac{1}{g}\left(n_0 - 1 - \frac{1}{n_0}\right)$$

rch welche das Minimum der einem Gefahrmomente anhaftenden Förderungsrscheinlichkeit ausgedrückt ist.

Eine grösste Wahrscheinlichkeit wird nun ferner mathematisch durch den Werth 1 gedrückt, so dass ein Maximum für σ sich durch die Relation

$$\sigma = \frac{v}{g} = 1$$

ibt; also demjenigen Falle entsprechend, wo der Gefahrsäquivalent v den Werth Grundprämie g erreicht.

Der Wahrscheinlichkeits- oder Gefahräquivalenten-Factor σ variirt daher zwischen $\left(n_0 - 1 - \frac{1}{n_0}\right)$ und dem Werthe 1, so dass wir durch Theilung dieses Intervalles mehrere gleiche Theile mehrere Abstufungen von wahrscheinlichen Gefahrmomentenensitäten nebst dem Minimum erhalten, wodurch eine vollständig geeignete Handhe zur ziffermässigen Beurtheilung der verschiedenartigen Gefahrmomente mittelst ktischen Gutachtens geboten ist. Die Summe der sämmtlichen, einem Risico entechenden, ziffermässig ausgedrückten Gefahräquivalenten-Factoren $\Sigma\,(\sigma)$ repräsent die Anzahl der bezüglichen Gefahreinheiten, welche mit der Grundprämie multicirt, die Gefahräquivalenten-Summe s liefert.

Was nun die Fixirung des Normalrisicos anbelangt, so leistet das Product in r Form 8)

$$\frac{1}{g}\left(n_0 - 1 - \frac{1}{n_0}\right)$$

lches die statistischen Grundlagen für zufällige Ursachen in ihrem diesbezüglichen nflusse als mathematische Function zum Ausdrucke bringt, vorzügliche Dienste, n dasselbe die Beziehungen zwischen n_0 und g näher präcisirt und auf diese e den Begriff des Normalrisicos rücksichtlich seiner Beschaffenheit und Prämienssung genau begrenzt.

Es kann nämlich der Werth n_0, welche die Anzahl der dem Normalris sprechenden kleinsten Gefahrmomente angibt, offenbar nur eine positive ga sein, indem es weder Bruchtheile von Gefahrmomenten, noch solche n Beschaffenheit geben kann.

Ferner wird das obige Product als Begriff der Wahrscheinlichkeit nur positiv sein können. Die Beschaffenheit einer dem kleinsten Gefahrmome sprechenden Wahrscheinlichkeit wird aber im äussersten Falle blos eine sol können, bei welcher sich die Chancen für und gegen die Förderung eines ev Brandschadens das Gleichgewicht halten; somit die Begrenzung

$$0 < \frac{1}{g}\left(n_0 - 1 - \frac{1}{n_0}\right) \leqq \frac{1}{2} \tag{10}$$

gelten muss, bei welcher die Wahrscheinlichheit $1/_2$ dieser letzteren Anf entspricht. Die Grundprämie g ist aber ebenfalls nur positiv denkbar, wes der Form 14) allen diesen Bedingungen nur dann Genüge geleistet wird, mindestens die Zahl 2 repräsentirt; d. h. wenn einem Normalrisico wenigst kleinste Gefahrmomente entsprechen, und wird daher die Grösse n_0 die 2, 3, 4, 5, ... annehmen können.

Die verschiedenartige Anzahl der einem Normalrisico anhaftenden k Gefahrmomente und die hiemit einer Veränderung unterworfene Grundprämi aber nur die Variation der Riskenkategorie zur Grundlage haben, woraus her dass hier nachfolgende Supposition gerechtfertigt sein dürfte:

Normalrisico

Anzahl der Gefahrmomente	Grundprämie	Riskenkategorie
$n_0 = 2$	g grösser als 1	Gebäude
$n_0 = 3$	g « « $3^1/_3$	Fabriken
$n_0 = 4$	g « « $5^1/_2$	Theater
$n_0 = 5$	g « « $7^3/_5$	Heu- und Stroh-Magazine

Diese Minimalwerthe der Grundprämien der einzelnen supponirten kategorien mögen folgerichtig den günstigsten örtlichen Verhältnissen wirt licher und meteorologischer Art entsprechen. Bei minder guter Beschaffenh selben wird jedoch offenbar eine höhere Grundprämie zur Geltung gelangen wodurch dem praktischen Gutachten ein Spielraum für eine diesbezügliche C geschaffen ist. Es wird nun eine durch Erhöhung der Grundprämie hervorg Correctur zwar das Minimum des Wahrscheinlichkeitsfactors σ auf ein tieferes herabdrücken, der demselben entsprechende kleinste Gefahräquivalent $v_0 = g\sigma$ sich jedoch unter allen Umständen insolange gleich, als die dem Norn anhaftende Anzahl kleinster Gefahrmomente keine Veränderung erleidet. H befinden sich die Gefahräquivalente der höheren Abstufungen mit der Grun im Wachsthum, was zur Folge hat, dass bei höherer Fixirung der Grundprän gleichbleibender Anzahl kleinster Gefahrmomente sich auch unwillkürlich eine ri Schätzung der Letzteren ergeben muss, wodurch also auch den mathematisch trolirbaren örtlichen Verhältnissen der entsprechende Einfluss auf die Riskensc und somit auch auf die Prämienbemessung eingeräumt ist.

Fragmente finanzieller Disciplinen.

II.

Die Berechnungen, welche in der vorigen diesbezüglichen Abhandlung zur terung gelangten, hatten die Tilgung von Darlehen sammt den entsprechenden en durch gleichmässige Jahresquoten zur Grundlage. Nun mag auch derjenige in Betracht gezogen werden, in welchem zwar das Darlehenscapital durch gleiche en getilgt wird, aus denen jedoch die Zinsen ausgeschieden und jährlich in sepa- Weise entrichtet werden. Der Unterschied, welcher zwischen diesen beiden Til- smodalitäten liegt, ist ein offenbarer, wenn man bedenkt, dass bei der erst- nnten Art die jährlich zu entrichtenden Annuitäten, in denen bereits die ent- nden Zinsen enthalten sind, während der ganzen Tilgungsdauer sich gleichbleiben, dass in Folge des von Jahr zu Jahr im Abnehmen begriffenen Zinsenbetrages eich der für die Tilgung des Darlehens verbleibende Betrag wächst; wogegen im eren Falle die Tilgung des Darlehens während der ganzen Dauer durch gleiche en vor sich geht, welche mit den abgesondert zu entrichtenden, jährlich im ehmen begriffenen Zinsen sogenannte fallende Annuitäten bilden.

Der Schuldner zahlt nämlich am Schlusse des ersten Jahres den Betrag Kp, worin a die jährliche Tilgungsquote für ein Darlehen im Nominalwerthe nd $P = 100\,p$ den Zinsfuss bezeichnet. Am Schlusse des zweiten Jahres ist om Schuldner zu zahlende Quote blos $a + (K - a)\,p$, weil bereits der Betrag a Capitale getilgt ist; ferner ist aus derselben Ursache am Schlusse des dritten es $a + (K - 2\,.\,a)\,p$, am Schlusse des vierten Jahres $a + (K - 3\,.\,a)\,p$, u. s. f. schliesslich am Schlusse des $n$ten Jahres $a + [K - (n-1)\,a]\,p$ zu bezahlen.

Werden nun die sämmtlichen zu entrichtenden Beträge auf den Zeitpunkt der ehenscontrahirung zum Zinsfusse $Q = 100\,q$ discontirt, so repräsentirt deren me denjenigen Betrag, welchen der Contrahent baar empfängt. Es ist somit

$$K' = \frac{a + Kp}{v} + \frac{a + (K - a)\,p}{v^2} + \ldots + \frac{a + [K - (n-1)\,a]\,p}{v^n}$$

n die Grösse

$$v = 1 + \frac{Q}{100} = 1 + q \text{ angenommen ist.}$$

Aus der Form 1) ergibt sich nun weiter

$$= (a + Kp)\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \ldots \frac{1}{v^n}\right] - \frac{ap}{v}\left[\frac{1}{v} + \frac{2}{v^2} + \frac{3}{v^3} + \ldots + \frac{n-1}{v^{n-1}}\right]$$

it erhält man, da diesen Reihen die Werthe

$$\frac{1}{v} + \frac{2}{v^2} + \ldots \frac{1}{v^n} = \frac{v^n - 1}{v^n\,(v-1)}$$

$$\frac{1}{v} + \frac{2}{v^2} + \frac{3}{v^3} + \ldots + \frac{n-1}{v^{n-1}} = \frac{v^n - n\,(v-1) - 1}{v^{n-1}\,(v-1)^2}$$

Mit Zuhilfenahme der Form 3) ergibt sich nun als Werth des zu Handen s Contrahenten effectiv zugezählten Capitales

$$K' = \frac{5,000.000}{0·05}\left[0·04 + \frac{0·01}{40} \cdot \frac{(1·05)^{40} - 1}{(1·05)^{40} \,.\, 0·05}\right] = 4,428.977·27 \text{ fl.},$$

nzufolge ergibt sich als Uebernahmscours

$$C = 100\,\frac{K'}{K} = 88·72^{11}/_{25}$$

Soll dagegen bei einem fixen Effectivbetrage des Darlehens K' der Nominal-rth desselben K gefunden werden, so bildet die der Form 3) entspringende dies-zügliche Relation

$$K = \frac{K'\,q}{p + \frac{q-p}{n} \cdot \frac{v^n - 1}{v^n\,(v-1)}}$$

e nöthige Handhabe hinzu.

Im Falle jedoch der Uebernahmscours sowie auch der nominelle Zinsfuss be-nnt ist; und es soll ermittelt werden wie sich das entlehnte Capital effectiv ver-st, so ist es nothwendig, den Zinsfuss Q aus der Gleichung 3) zu berechnen.

Diesbezüglich ist nun folgender Vorgang nöthig:

Der Gleichung 3) entspringt die Form

$$100\,\frac{K'}{K} = \frac{100}{q}\left[p + \frac{q-p}{n} \cdot \frac{v^n - 1}{v^n\,(v-1)}\right] = C$$

rin C offenbar den entsprechenden Uebernahmscours, und $P = 100\,p$ den nomi-llen Zinsfuss bezeichnet.

Es soll daher aus dieser Gleichung der Werth von

$$v = 1 + \frac{Q}{100} = 1 + q$$

d hieraus derjenige des effectiven Zinsfusses Q ermittelt werden.

Zu diesem Behufe möge in der Gleichung 5) überall anstatt q der Werth sselben $v - 1$ substituirt werden und erhält man auf diese Weise die quadratische eichung von der Form.

$$(v-1)^2 - \left[\frac{100\,p}{C} + \frac{100}{nC} \cdot \left(1 - \frac{1}{v^n}\right)\right](v-1) + \frac{100\,p}{nC}\left(1 - \frac{1}{v^n}\right) = 0$$

d mit Rücksicht darauf, dass $100\,p = P$ ist, ergibt sich hieraus

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{P}{C} + \frac{100}{nC}\left(1 - \frac{1}{v^n}\right)\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{P}{C} + \frac{100}{nC}\left(1 - \frac{1}{v^n}\right)\right]^2 - \frac{P}{nC}\left(1 - \frac{1}{v^n}\right)}$$

d dies auf beiden Seiten zur $n$ten Potenz erhoben, liefert die Ersatzgleichung 8)

$$= \underset{m\,>\,(1+p)^n}{\overset{q>p}{\mathrm{E}}}\left(1 + \frac{1}{2}\left[\frac{P}{C} + \frac{100}{nC}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right] + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{P}{C} + \frac{100}{nC}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^2 - \frac{P}{nC}\left(1 - \frac{1}{m}\right)}\right)^n$$

orin m den Näherungswerth von v^n bezeichnet. Für unseren Fall, wo $q > p$ ist, at vor dem Wurzelwerth blos das positive Zeichen Giltigkeit.

Zum besseren Verständniss mag hier folgendes Beispiel durchgeführt we

Ein Darlehen, welches bei vierpercentiger no
neller Verzinsung im Laufe von 50 Jahren geti
werden soll, wird zum Course von 84 übernommen:
hoch stellt sich die effective Verzinsung dessel

Für diesen Fall werden in die Gleichung 8) folgende Werthe substituirt w
müssen; $P = 100$ $p = 4$, $n = 50$ und $C = 84$. Demgemäss erhält man

$$v^{50} = \underset{m > (1 \cdot 04)^{50}}{\overset{q > p}{E}} \left(1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{21} + \frac{1}{42}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right] + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{21} + \frac{1}{42}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^2 - \frac{1}{1050}\left(1 - \frac{1}{m}\right.}\right.$$

und nach durchgeführter Rechnung als Resultat

$$v^{50} = 13 \cdot 207$$

und somit $\qquad v = 1 \cdot 05297$ respective $Q = 5 \cdot 297$ %

als Percentsatz der effectiven Verzinsung des genannten Darlehens.

Wie ersichtlich, gelangten wir bisher bei allen unseren Berechnungen zu
cendenten Formen, deren Lösung nach den bisherigen allgemeinen wissenschaftl
Erfahrungen theils gänzlich ungenau und da nur auf Umwegen möglich ge
wäre, in den meisten Fällen jedoch zu gar keinem Resultate geführt hätte.
Hilfe unserer „Theorie und Lösung der irreductiblen transcendenten Gleichunge
sichtlich eine einfache und äusserst elegante Lösung dieser Formen in be
genauer Weise zulässig, was bei der Wichtigkeit der finanziellen Fragen, bei we
deren Anwendung nöthig ist, nicht unterschätzt werden darf. Der praktische W
den diese eigentlich rein theoretische Frage hiedurch erlangt, ist mit Rücksich
die Entwicklung der politischen Arithmetik ein so bedeutender, dass wir nicht u
können, denselben besonders hervorzuheben.

Die in der Gleichung 6) zum Ausdruck kommende transcendente Form
offenbar eine solche, deren Lösung zu den schwierigsten gehört, weil wir es
mit Factoren zu thun haben, die ihrer Empfindlichkeit halber der Convergenz
Annäherungsprocedur störend entgegentreten.

Wir mussten daher die fragliche Unbekannte v mit einer grösseren Consi
auszustatten trachten, und haben daher durch Modification der genannten Glei
anstatt der verschiedenen Potenzen von v durchwegs blos diejenige von v^n einge
wodurch es uns möglich war, die nöthige Convergenz der Annäherung der Unbeka
zu ihrem wahren Werthe zu erzielen.

Nicht in allen Fällen ist es aber durchführbar, die Consistenz der zu ermi
den Unbekannten auf diese einfache Weise zu vergrössern, und bleibt es bei
stellung der Ersatzgleichung zumeist der Findigkeit des Mathematikers anheimge
auf geeignete Art diesbezüglich zum Ziele zu gelangen, und die Convergenz de
näherung nach den in unserer Theorie den verschiedenen Modalitäten zu G
liegenden Principien möglich zu machen. Immerhin verlohnt es sich jedoch ein
allemal die jeweilig geeignete Ersatzgleichung aufzustellen, weil hiedurch die
mässige Rechnung unter allen Umständen nicht nur an Einfachheit, sondern
rücksichtlich des Resultates an Genauigkeit bedeutend gewinnt.

Dr. Ludwig Grossmann's

itrag zur Einschränkung der Storni in der Lebensversicherung.

I.

Der Erbfeind des Lebensversicherungs-Geschäftes ist bekanntlich der riesige no, welcher alljährlich den Versicherungsstock der verschiedenen Versicherungs- llschaften um ein Bedeutendes abschwächt. Die Storno-Phylloxera devastirt das häft und raubt demselben jene Continuität, welche die Prosperität so sehr för- . Wohl kann man auch an dem Storno viel verdienen, namentlich, wo es sich etwas ältere Versicherungen handelt und die Prämienreserve den Rückkaufwerth Polizzen ziemlich überragt, allein auf derlei Gewinne möchten die Anstalten gerne ichten. Der Hauptgrund dieser stetig zunehmenden Calamität ist hauptsächlich ler mangelhaften Acquisitions-Methode und den schlechten wirthschaftlichen Ver- nissen zu suchen. Der Lebensversicherungs-Agent sucht bei jeder Acquisition ptsächlich seinen eigenen Vortheil zu wahren, indem er eine jede Versicherung einen möglichst hohen Betrag abzuschliessen sucht. Nur um seine Provision so als möglich zu gestalten, schwatzt er dem zu Versichernden eine hohe Ver- erungssumme auf; ohne Rücksicht darauf, ob derselbe im Stande sein wird, für Dauer die entsprechende, oft seine Verhältnisse weit übersteigende Prämie zu en. Mit der Zeit stellen sich nun die diesbezüglichen Schwierigkeiten ein, obzwar einer geringeren Versicherungssumme entsprechende minder hohe Prämie vom icherten leicht zu erschwingen gewesen wäre; und das Facit hievon ist, der rmeidliche Storno, oder im günstigsten Falle, die Herabsetzung des versicherten rages, was ebenfalls nichts Anderes als einen theilweisen Storno bedeutet.

Bekanntlich war bisher die mittlere Dauer des Bestandes einer Versicherung n Jahre; in der letzten Periode ist jedoch diese ohnehin nicht hohe Frist auf s und bei manchen Anstalten sogar auf fünf Jahre gesunken, was zur Genüge eist, dass Angesichts des schädigenden Einflusses dieser Erscheinung auf das ensversicherungs-Geschäft im Allgemeinen ein rasches Eingreifen dringend noththut.

Im Falle einer nothleidenden Prämienzahlung, kommen zur Zeit mehrere Momente etracht, welche geeignet sind in dieser Beziehung betreff einer zeitweisen Abhilfe nung zu tragen, und zwar: 1. Die Stundung der Prämie innerhalb einer gewissen er; 2. Darlehensgewährung auf die Polizze bis zur Höhe eines 75percentigen Bar- thes derselben zum Zwecke der Entrichtung einer oder mehrerer Jahresprämien; Herabsetzung des versicherten Betrages und somit auch der fernerhin zu zahlenden mie mit Berücksichtigung des derzeitigen Polizzenbarwerthes, und 4. Rückkauf Storno. Alle diese Momente, mit Ausnahme der Stundung oder eventuellen Herab- ung der versicherten Summe, können aber nach den bisherigen Bestimmungen dann in Betracht kommen, wenn die Bestandesdauer der Versicherung das dritte r überschritten hat, wesshalb auch der grösste Theil der Storni, welcher meistens die Periode der ersten drei Jahre fällt, unter diesen Umständen fast unvermeidlich Dies trägt sehr viel dazu bei, das Lebensversicherungs-Geschäft zu misscreditiren.

weil dem Laien das nöthige Verständniss fehlt, um die Berechtigung des vollständig
Heimfalles der gezahlten Prämien an die Anstalt im Falle einer kürzeren als dr
jährigen Bestandesdauer einzusehen.

Es ist daher schon aus diesem Grunde im Interesse der Lebensversicheru
nothwendig, in erster Linie die Chancen für die Erreichung einer zum mindest
dreijährigen Bestandesdauer der Versicherungen nach Möglichkeit zu vergrössern
in anderer Beziehung dem genannten Uebelstande abzuhelfen. Diesbezüglich kön
die bedingungsweise Zulassung einer Herabsetzung des versicherten Betrages
ein- oder zweijähriger Bestandesdauer für das Lebensversicherungsgeschäft nur
Vortheil sein, insbesondere wenn diesfalls die statutarische Bestimmung eingesch
wäre, mit welcher sich der Versicherte verpflichten müsste, die dem herabgeset
Versicherungsbetrage entsprechende Jahresprämie mindestens durch weitere drei J
einzuzahlen, falls der neue Vertrag nicht als ungiltig erklärt werden soll,
sämmtliche eingezahlten Prämien verfallen sollen. Hierbei möge die neue Prä
nach dem ursprünglichen Eintrittsalter bemessen werden und die bisherige Bestan
dauer dem neuen Vertrage zugute kommen. Immerhin könnte hier auch das gün
Resultat einer neuerlichen ärztlichen Untersuchung als weitere Bedingung einer
tragserneuerung gelten. Nach längerer, als weiterer dreijähriger Einzahlung,
es sodann dem Versicherten unbenommen, den Rückkauf der neuen Polizze
beantragen. Auf diese Weise würden die Versicherungsanstalten immerhin ein
Geschäft machen, indem dieselben ohne weitere Spesen Versicherungen abschlie
würden, und überdies dem Storno in mancher Beziehung steuern könnten. In
bindung mit dieser Annahme wäre es möglich, mittelst der einzelnen Com
tionen von Versicherungen mit Gewinnantheil eine Grundlage für eine grö
Stabilität der Lebensversicherungen im Allgemeinen zu erzielen. Auf Grund
10—20percentigen Zuschlages zur Prämie, würde sich mit Hilfe des resultiren
bis zu einem gewissen Zeitpunkte der Versicherungsdauer zurückzuhalte
Gewinnantheiles eine Art Specialreserve ergeben, welche im Falle der nichterfo
Zahlung einer Jahresprämie nach Massgabe zum Zwecke des Ersatzes herange
werden könnte, wodurch neben den genannten Momenten, welche zur Vermei
eines sofortigen Inkrafttretens des Storno dienen, noch ein neues nicht zu un
schätzendes hinzutreten würde.

Freilich könnte der angesammelte Gewinnantheil nach einer kürzeren Bestan
dauer nicht hinreichen, um eine ganze Jahresprämie zu ersetzen; es würde je
durch Heranziehung desselben, deren eventuelle Ergänzung durch den Versiche
leichter bestritten werden können.

Sollte dies aber trotzdem nicht der Fall sein, so dürfte diese Specialreserve
einer eventuell nicht zu vermeidenden Herabsetzung des versicherten Betrages,
vollständigen Deckung der soeben fälligen Prämie hinreichen.

Diesbezüglich könnte der Bestimmung Raum gegeben werden, dass die Spec
reserve durch eine gewisse Dauer nur dem Zwecke des Prämienersatzes zu die
hätte, wodurch sich ein indirecter Zwang ergeben würde, bei eingestellter Prämi

lung die Versicherung nach Massgabe der vorhandenen Specialreserve auslaufen lassen.

Im Falle einer nichterfolgten Inanspruchnahme dieser Specialreserve, welche pünktlichem Prämieneingange, während der festgesetzten Zurückhaltungsfrist inbliebe, könnte nach Ablauf der genannten Dauer eine ausgiebigere successive absetzung der ferneren Jahresprämien platzgreifen, weil ein grösserer Fonds zur ulirung der sodann flüssig werdenden Gewinnantheile vorhanden wäre. Um diese nbination für den Versicherten verlockender zu gestalten, könnte eventuell statt sen ein Freijahr, welches sich je nach der Höhe der Gewinnantheile in gewissen ioden wiederholen würde, gewährt werden.

Die Frist, während welcher der Gewinnantheil zur Schaffung einer Specialrve zurückzuhalten wäre, könnte mit einer Dauer von 7—8 Jahren festgesetzt den, da nach Ablauf dieser Zeit eine Versicherung bereits die nöthige Stabilität itzt. Demzufolge könnte vom achten Jahre angefangen die Prämie entweder von r zu Jahr bis zu einer gewissen mathemathisch zu ermittelnden Grenze abmen, oder bei gleichbleibender Höhe periodisch gänzlich entfallen.

Zweckmässig wäre es auch, dem Versicherten eine tabellarische Zusammenllung der jeweilig fälligen Prämienbeträge per 1000 fl. Versicherungssumme zur rfügung zu stellen, wodurch demselben der Vortheil besser veranschaulicht rden würde.

Wenn nun dann auch eine oder die andere solchermassen in ihrem Bestande altene Versicherung mit der Zeit dennoch stornirt werden müsste, so wäre zum ndesten der Zweck ihrer längeren Dauer erreicht.

Unter Anderem wäre es auch von Vortheil, wenn man den Zeitpunkt der ckkaufszulässigkeit überhaupt von einer längeren Bestandesdauer abhängig machen rde; durch diese Massnahme wäre auch hinsichtlich eines anderen Uebelstandes gebeugt, indem der unsolide Agent nicht mehr in der Lage wäre, die durch ihn eschlossenen Versicherungen nach einem jeweiligen Bestande von drei Jahren, um llen einer neuerlichen Provision bei einer anderen Anstalt, zum Ausspannen zu anlassen.

Hiemit wäre das Mittel zur Schaffung einer höheren durchschnittlichen Bendesdauer von selbst gegeben, wodurch sich eine grössere Continuität des Verherungsstockes, und somit auch eine grössere Prosperität des Lebensversicherungsschäftes ergeben würde.

In Nachfolgendem mögen einige mathematische Anhaltspunkte in dieser Behung zur Aufklärung dienen.

Nehmen wir z. B. an, es wäre der Gewinnantheil in dernigen Höhe festzusetzen, um mit Zinsen und Zinseszinn nach Ablauf von acht Jahren durch Ansammlung zwei nze Nettoprämien zu ergeben; u. zw. unter der Voraustzung, dass derselbe jährlich in einem entsprechenden rcentsatz der jeweilig bezahlten Prämien zu Gunsten s Versicherten zurückgelegt wird.

Um diese Frage zu beantworten, benützen wir die in unserer diesbezüglich Abhandlung unter dem Titel: „Berechnung von Prämientarifen einiger Assecura combinationen“ (I. Lief.) enthaltenen Formen; und zwar ist daselbst N die Net prämie, n die zurückgelegte Dauer der Einzahlung, $M = 100\,m$, das den Gewi antheil repräsentirende Percent der Nettoprämie, G der Gesammtwerth der Gewi antheile sammt Zinsen und Zinseszinsen nach einer Anzahl von Jahren und k Verhältniss des zu diesem Behufe nöthigen Prämienzuschlages zur Nettoprämie.

Die Form

$$1)\qquad G = m\,N\left(\frac{1+p}{p}\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p}-\frac{n}{p}\right)$$

wird der obigen Frage entsprechen, wenn $n = 8$ und $G = 2\,N$ gesetzt wird. De gemäss ergibt sich

$$2)\qquad m = \frac{2\,p^2}{(1+p)\,[\,(1+p)^8-1]-8\,p}$$

als Gewinnantheil in Hundertstel Percenten der Nettoprämie.

Soll nun der nöthige Prämienzuschlag für diesen Fall ermittelt werden, liefert die Form

$$3)\qquad k = m\left(\frac{1}{p}-\frac{n}{(1+\ )\,[\,(1+p)^n-1]}\right)$$

hiefür die nöthige Handhabe, so dass wir nach vollzogener Substitution, die Gleich

$$4)\qquad k = \frac{2\,p}{(1+p)\,[(1+p)^8-1]}$$

erhalten, welche bei Annahme des entsprechenden Zinsfusses die nöthigen A schlüsse bietet.

Es sei z. B. die Verzinsung der Gewinnantheile mit $P = 100\,p = 3{\cdot}5$ P cent präliminirt, so erhalten wir die Werthe

$$m = 0{\cdot}05116$$

d. i. etwas mehr als 5 Percent; somit beträgt unter diesen Voraussetzungen Gewinnantheil fünf Percent des Nettowerthes der jeweilig bezahlten Prämien.

Der unter diesen Umständen erforderliche Jahresprämien-Zuschlag wird Form 4) gemäss, da

$$k = 0{\cdot}2135$$

ist, 21.35 Percent der Nettoprämie betragen, mit dessen Hilfe man nach 4jähri Bestandesdauer der Versicherung mehr als 50 Percent, nach 5jähriger etwa 80 P cent, nach 6jähriger schon nahezu 110 Percent u. s. w. der jährlichen Nettoprä als Specialreserve anzusammeln in der Lage ist. Nach Ablauf von 8 Jahren bereits ein Freijahr möglich und verbleibt nach Abzug des einjährigen Verwaltun kostenzuschlages noch immer etwa 70 Percent der Nettoprämie als weitere Speci reserve, welche, ohne in Anspruch genommen zu werden, bei fernerer Einzahlu der gleichen Prämien bereits nach weiteren fünf Jahren ein zweites Freijahr zulä

Fragmente finanzieller Disciplinen.

III.

Die letzten Auseinandersetzungen über dieses Thema behandelten bekanntlich age der Darlehenstilgung durch gleiche Jahresquoten nebst Zinsen. Dieselbe un verschiedene Variationen zu, welche je nach ihrer Form und Eigenart eine chiedliche mathematische Bearbeitung erfordern. Wir wollen daher zuvörderst igen Modus in Betracht ziehen, wo die Capitalsrückzahlung von $K : n$ Gulden am Schlusse eines jeden Jahres, und die Zinsen r am Schlusse eines jeden Semesters gezahlt werden. Diese Form in der Praxis die meiste Anwendung und ist es daher opportun, sich mit en etwas näher zu beschäftigen

Die zum Schlusse eines jeden Jahres flüssig werdenden Tilgungsquoten, bleiben ekanntlich für diesen Fall während der ganzen Tilgungsdauer gleich, wogegen Ende eines jeden Semesters zu zahlenden Zinsen in demselben Verhältniss nen, als die Tilgung des Capitales vorsichgeht. Oeffentliche Darlehen werden t in einer entsprechenden Anzahl gleicher Titres herausgegeben, denen eine e fixe Verzinsung im Verhältniss zum Nominalwerthe zu Grunde liegt. Die echende Zinsenquote wird nun der obigen Voraussetzung zufolge in zwei gleichen n am Schlusse der beiden Jahressemester fortlaufend zur Auszahlung gebracht; ilgung geschieht jedoch in der Weise, dass zum Schlusse eines jeden Jahres je em gleichen Werthe entsprechende Anzahl von Titres zur Einlösung gelangt, s von Jahr zu Jahr immer weniger derselben im Umlaufe verbleiben. Die istrative Controle bei der Rückzahlung ähnlicher Anleihen gestaltet sich auf Art äusserst einfach, was einen nicht zu unterschätzenden Vorzug bedeutet.

Was nun die mathematische Behandlung dieser Frage anbelangt, so gestaltet dieselbe folgendermassen:

Der Darlehenscontrahent zahlt in den einzelnen Semestern die Beträge

$\frac{Kp}{2}$ am Schlusse des 1. Semesters

$\frac{Kp}{2} + a$ « « « 2. «

$\frac{(K - a)\,p}{2}$ « « « 3. «

$\frac{(K - a)\,p}{2} + a$ « « « 4. «

$\frac{(K - 2\,a)\,p}{2}$ « « « 5. «

$\frac{(K - 2\,a)\,p}{2} + a$ « « « 6. «

. . . .

$\frac{(K - (n - 1)\,a)\,p}{2}$ « « « $(2\,n - 1)$ «

$\frac{(K - (n - 1)\,a)\,p}{2} + a$ « « « $2\,n$ «

worin K das nominelle Darlehenscapital, a die jährliche Tilgungsquote, $P =$ den jährlichen Zinsfuss und n die Anzahl der Tilgungsjahre bezeichnet.

Es sei nun die effective Verzinsung $Q = 100\,q$, so ergibt sich diesbe für den Semester der Ausdruck $1 + \frac{1}{2} q = v$ als Abkürzung; und man somit, wenn sämmtliche obigen Beträge auf den Zeitpunkt der Darlehenscontra nach dem effectiven Zinsfusse auf die jeweilige Anzahl von Semestern di worden, den effectiven Darlehensbetrag

$$K' = \frac{1}{2}\left(\frac{Kp}{v} + \frac{Kp + 2a}{v^2} + \frac{(K-a)p}{v^3} + \frac{(K-a)p + 2a}{v^4} + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{[K-(n-1)a]p}{v^{2n-1}} + \frac{[K-(n-1)a]p + 2a}{v^{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} Kp\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \ldots + \frac{1}{v^{2n-1}} + \frac{1}{v^{2n}}\right] + a\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^4} + \ldots +\right.$$

$$- \frac{1}{2} a p\left[\frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^4} + \frac{2}{v^5} + \frac{2}{v^6} + \ldots + \frac{n-1}{v^{2n-1}}\right]$$

Bezeichnen wir die einzelnen Reihen der Ordnung gemäss mit den Buch A, B, C, so ergibt sich folgende Relation

$$K' = K.\frac{p.A}{2} + aB - a\frac{pC}{2}$$

worin nach vollzogener Summirung der Reihen, folgende Werthe zu substituire

$$A = \frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v-1)}, \quad B = \frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v^2-1)} \text{ und } C = \frac{1}{v^{2n}(v-1)}\cdot\left(\frac{v^{2n} - 1}{v^2 - 1}\right.$$

somit ergibt sich für K' die Relation

$$K' = \frac{Kp}{2}\,\frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v-1)} + a.\frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v^2-1)} - \frac{ap}{2v^{2n}(v-1)}\left(\frac{v^{2n} - 1}{v^2 - 1}\right.$$

und dies gehörig reducirt, liefert die Gleichung

$$1) \qquad K' = \frac{K}{q}\left[p + \frac{q-p}{n}\cdot\frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v^2-1)}\right]$$

worin $v = 1 + \frac{q}{2}$ ist.

Die Gleichung 1) stimmt der Form nach vollkommen mit der Gleich der vorigen Abhandlung zusammen, nur mit dem Unterschiede, dass in di Grösse v auf den Zinsenzuwachs während eines Jahres, dagegen in obiger For auf denjenigen während eines Semesters bezogen ist. Für $q = p$ wird offenba hier $K' = K$ und für $n = \infty$

$$2) \qquad K' = K\frac{p}{q}$$

als Ausdruck für den effectiven Capitalswerth eines untilgbaren Darlehens ge

Folgendes Beispiel mag zur besseren Beleuchtung dieser Auseinanderse dienen:

Es soll ein Anlehen von K Gulden derart zurückge werden, dass am Schlusse eines jeden Tilgungsjahres K:

uiden zur Rückzahlung gelangen, wogegen die entsprechen-
en P percentigen nominellen Jahreszinsen in zwei Hälften,
nd zwar zum Schlusse eines jeden Semesters flüssig werden.
er Capitalist will jedoch sein Geld effectiv zu Q Procent
$Q > P$) verzinst haben; wie viel wird der Contrahent beim
eschäfts-Abschlusse erhalten, und wie stellt sich der Cours
es Anlehens?

Zum Zwecke der vergleichsweisen Beurtheilung seien die ziffermässigen Werthe
eses Beispieles derart gewählt, dass dieselben mit der in der vorigen Abhandlung
stellten diesbezüglichen praktischen Aufgabe übereinstimmen. Es sei also
$= 5{,}000.000$, $n = 40$, ferner $P = 100p = 4$ und $Q = 100q = 5$ Percent.
Venn wir nun diese Werthe in die Form 1) substituiren, erhalten wir für

$$K' = \frac{5{,}000.000}{0{\cdot}05} \cdot \left[0{\cdot}04 + \frac{0{\cdot}01}{40} \cdot \frac{(1{\cdot}025)^{80} - 1}{(1{\cdot}025)^{80} .\ 0{\cdot}050625}\right] = 4{,}425.331{\cdot}40$$

den zu Handen des Contrahenten zur Auszahlung gelangenden effectiven Betrag.
Hieraus ergibt sich nun der Uebernahmscours

$$C = 100\,\frac{K'}{K} = 88{\cdot}50\,^2/_3$$

elcher, wie ersichtlich, mit dem in der vorigen Abhandlung sich ergebenden Resul-
te blos um ein Unbedeutendes differirt.

Der Form 1) entspringt nun ferner auch Diejenige, welche für den Fall mass-
bend ist, in welchem K' als fixer Effectivbetrag des Darlehens angenommen ist,
d auf Grund desselben dessen Nominalwerth K bestimmt werden soll. Es ist somit

$$K = \frac{K'\,q}{p + \frac{q - p}{n} \cdot \frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v^2 - 1)}}$$

s diejenige in diesem Falle giltige Relation zu bezeichnen.

Es bleibt uns daher nur noch die Frage offen, auf welche Art der effective Zins-
ss ermittelt werden kann, wenn der Uebernahmscours, die Tilgungsdauer und der
ominelle Zinsfuss bekannt sind.

Der Gleichung 1) entspringt die Form

$$5)\quad 100\,\frac{K'}{K} = \frac{100}{q}\left[p + \frac{q-p}{n} . \frac{v^{2n} - 1}{v^{2n}(v^2-1)}\right] = C$$

worin C offenbar den entsprechenden Uebernahmscours bezeichnet.

Wie ersichtlich, ist somit die Höhe des zu contrahirenden Darlehens in diesem
Falle eine vollständig irrelevante, weil dieselbe in Form 5) vollständig ausser Rech-
nung kommt. Wenn wir nun dasselbst für q dessen Werth $2\,(v - 1)$ und für $100\,p$
den Werth P substituiren, erhalten wir die Relation

$$6)\quad (v - 1)^2 - (v - 1)\left(\frac{P}{2C} + \frac{100}{nC}\left[\frac{1 - \frac{1}{v^{2n}}}{1 + v}\right]\right) + \frac{P}{2nC}\left[\frac{1 - \frac{1}{v^{2n}}}{1 + v}\right] = 0$$

woraus hervorgeht, dass

$$7)\quad v = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2C} + \frac{100}{nC}\left[\frac{1 + \frac{1}{v^{2n}}}{1 + v}\right]\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{P}{2C} + \frac{100}{nC}\left[\frac{1 - \frac{1}{v^{2n}}}{1 + v}\right]\right)^2 - \frac{P}{2nC}\left[\frac{1 - \frac{1}{v^{2n}}}{1 + \ldots}\right.}$$

und dies schliesslich auf beiden Seiten zur $2n$ten Potenz erhoben, liefert die E
gleichung 8)

$$v^{2n} = \underset{m > \left(1+\frac{p}{2}\right)^{2n}}{\overset{q>p}{\mathrm{E}}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2C} + \frac{100}{nC}\left[\frac{1-\frac{1}{m}}{1+m^{\frac{1}{2n}}}\right]\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{P}{2C}+\frac{100}{nC}\left[\frac{1-\frac{1}{m}}{1+m^{\frac{1}{2n}}}\right]\right)^2 - \frac{P}{2nC}\left[\frac{1-}{1+m}\right.}\right.$$

mittelst deren sodann v^{2n} bestimmt wird. Da jedoch die Tilgungsdauer n für
Fall als bekannt vorausgesetzt ist, so liefert die Relation

$$\frac{Q}{100} = q = 2\ (v - 1) \text{ das gewünschte Resultat.}$$

Schliesslich mag noch folgende bisher unerörterte Frage einer Untersu
unterzogen werden.

Es wird ein Darlehen zu einem bestimmten Uebernal
course C und bestimmter nomineller Verzinsung von P
cent contrahirt. Auf welche Dauer wird sich dessen Til
erstrecken, wenn der effective Zinsfuss Q Percent errei
soll, wobei die Zinsen am Schlusse eines jeden Semesters
Tilgungsquoten jedoch am Schlusse eines jeden Jahres flü
werden.

Aus der Form 5) ist für diesen Fall die Tilgungsdauer n durch die üb
bekannten Grössen ebenfalls nur durch eine transcendente Gleichung auszudr
möglich, so dass wir die derselben entsprechende Ersatzgleichung continuir
Beschaffenheit folgendermassen ausdrücken können:

$$9) \qquad n = \underset{n_0 \overset{=}{<} \frac{(v^2-1)(Cq-100p)}{100\ (q-p)}}{\overset{q>p}{\mathrm{E}}} \left(\frac{(q-p)(1-v^{-2n_0})}{\left(\frac{C}{100}\cdot q - p\right)(v^2-1)}\right)$$

worin n_0 den Näherungswerth von n repräsentirt.

Z. B. Ein Darlehen wird bei einem Uebernah
course von 92 und einer nominellen Verzinsung
4·5 Percent contrahirt. Durch wie viel Jahre w
dasselbe getilgt werden müssen, um für den Darlei
eine effective Verzinsung von 5·5 Percent zu liefe
wobei die Zinsen am Schlusse der jeweiligen Semes
die Tilgungsquoten am Schlusse der jeweiligen
gungsjahre flüssig werden.

Es ist somit in die Form 9) zu substituiren: $C = 92$, $P = 100\ p =$
$Q = 100\ q = 5{\cdot}5$ und n? Demgemäss wird die Form 9) sich folgenderm
gestalten:

$$n = \underset{n_0 < 32}{\mathrm{E}} \left(32{\cdot}0847\ (1 - v^{-2n_0})\right)$$

und lauten daher die successiven Näherungswerthe:

$n_0 = 31$, $(n_0)_1 = 26$, $(n_0)_2 = 24$, $(n_0)_3 = 23{\cdot}3$, $(n_0)_4 = 22{\cdot}7$, $(n_0)_5 =$
$(n_0)_6 = 22{\cdot}74$, $(n_0)_7 = 22{\cdot}75$, $(n_0)_8 = 22{\cdot}748\ldots.$

Demnach ist $n = 22^3/_4$ Jahre, als die zu ermittelnde Tilgungsdauer.

Dr. Ludwig Grossmann's

Beitrag zur Einschränkung der Storni in der Lebensversicherung.

II.

Nachdem in der vorigen Abhandlung ein Ueberblick für die praktische Beur-eilung der Eventualität periodisch einzuführender Freijahre unter den daselbst fest-estellten Voraussetzungen geboten wurde, so wirft sich unwillkürlich die Frage auf, b im Falle von dem Modus der periodischen Freijahre abgesehen werden würde, sich ie während der ersten acht Jahre angesammelte Specialreserve nicht auch auf andere Weise vortheilhaft für eine Combination verwenden liesse, welche in dem Principe iner von Jahr zu Jahr abnehmenden Prämie, und zwar vom achten Jahre der Ver-icherungsdauer angefangen, zur Geltung käme.

Es wäre dies nichts Anderes, als eine Combination der Versicherung mit gleich-ässig steigendem Gewinnantheil, bei welcher der Letztere erst mit der Einzahlung er neunten Jahresprämie flüssig zu werden beginnen würde, wobei offenbar auch die ährend acht Jahren angesammelte Specialreserve nicht wenig dazu beitragen würde, ie hiedurch im arithmetischen Sinne wachsende jährliche Prämien-Ermässigung erart ausgiebig zu gestalten, dass dieselbe dem Versicherten gegenüber einen in die ugen springenden Vortheil manifestiren würde.

Freilich dürfte insbesondere bei der einfachen Todesfall-Versicherung auch die rnere wahrscheinliche Lebensdauer des Versicherten stark in's Gewicht fallen, weil n derselben in diesem Falle die Höhe des Gewinnantheil-Percentes einerseits und ne eventuelle frühere oder spätere gänzliche Einstellung der Prämien-Zahlungs-flicht anderseits abhängt, welch' letztere Eventualität hauptsächlich dann eintreten önnte, wenn die durch den Jahreszuschlag und die Specialreserve angesammelten Beträge auch bei einem entsprechenden Ueberleben der fixirten wahrscheinlichen rneren Lebensdauer durch die steigenden Gewinnantheile nicht erschöpft werden önnten.

Das Princip, welches diesen Modus charakterisirt, lässt sich in folgenden Bestimmungen näher ausdrücken:

Der Versicherte, welcher in diesem Falle eine Versicherung mit Gewinnantheil ingeht, zahlt in Folge dessen nebst der einfachen bezüglichen Jahresprämie um den -fachen Theil der Nettoprämie mehr als Zuschlag. Während der achtjährigen Ein-ahlung einer solchen ist jedoch die Versicherungsbank nicht verpflichtet, dem Ver-icherten die den Prämienzuschlägen entsprechenden Gewinnantheile auszufolgen, ondern verwendet dieselben zur Schaffung einer Specialreserve, welche sammt Zinsen und Zinseszinsen im Falle der nicht erfolgten Erschöpfung durch Inanspruchnahme für eventuelle nothleidende Prämienzahlung während der ersten acht Jahre der Bestandesdauer, vom neunten Jahre angefangen mit den nunmehr flüssig werdenden Gewinnantheilen zu einer von Jahr zu Jahr fortschreitenden Ermässigung der ursprüng-lichen Prämie beiträgt.

Es ist dies eine Verquickung eines Creditvereines mit der Lebensversicherung, indem ein *derart Versicherter in die* Lage kommt, im Falle derselbe eine oder zwei

Prämien durch irgend welche momentan eingetretene Verhältnisse nicht bezahlen könnte, die hiezu nöthigen Beträge aus dem gemeinschaftlichen Special-Reservefond vorgestreckt zu erhalten, und zwar unter folgenden Bedingungen. Bis zum achten Jahre der Bestandesdauer der Versicherung darf die Specialreserve nur in demjenigen Falle in Anspruch genommen werden, wenn sich der Versicherte ausser Stande erklärt, eine jeweilig fällige Prämie bezahlen zu können, und zwar kann dies während einer kürzeren als dreijährigen Bestandesdauer nur nach Massgabe der vorhandenen eigenen Special-Reservemittel des Versicherten geschehen. Nun wird aber die eigene Specialreserve desselben nicht hinreichen, um eine ganze Prämie zu decken, weshalb das Fehlende vom Versicherten entweder ergänzt werden muss, in welchem Falle naturgemäss vom Zuschlag abgesehen wird, oder es kann die Versicherung auf den der gedeckten Prämie entsprechenden Versicherungsbetrag reducirt werden, und zwar unter der Bedingung, als sich der Versicherte verpflichtet, weitere drei Jahre die herabgesetzte einfache Prämie einzuzahlen, ansonsten die bereits eingezahlten Prämien zu Gunsten der Anstalt verfallen. Es bleibt ihm jedoch unbenommen, während der Dauer eines Jahres die ganze Prämie sammt Zinsen nachzutragen und seine frühere Versicherungssumme zu reactiviren, in welchem Falle er wieder in den Verband der Versicherten mit Gewinnantheil tritt.

Nimmt jedoch der Versicherte nach einer längeren als dreijährigen Bestandesdauer die Specialreserve in Anspruch, so wird unter allen Umständen aus dem gemeinsamen Specialreservefonds die ganze fällige Prämie gedeckt. Nach Massgabe kann auch eine zweite und dritte Prämie im gegebenen Falle vorgestreckt werden, nur wird der die eigenen Reservemittel des betreffenden Versicherten übersteigende Vorschussbetrag das Pfandrecht auf den Rückkaufswerth der Polizze besitzen. Nach einer mehr als dreijährigen Bestandesdauer tritt somit der Versicherte in die vollen Rechte des Mitgliedes eines derartigen Versicherungs-Creditvereines.

Die Rückzahlung der vorgestreckten Prämien sammt einer mässigen Verzinsung kann vom Versicherten in beliebiger Zeit erfolgen; sollte dieselbe jedoch gänzlich unterlassen werden, so wird die durch die eigene Specialreserve nicht hinreichend gedeckte Summe durch die nach dem achten Jahre flüssig werdenden Gewinnantheile ergänzt, so dass der Versicherte erst nach erfolgter Tilgung seiner Schuld in den Genuss derselben tritt.

Für den Fall, als der Versicherte vor der erfolgten Tilgung dieses Betrages die Polizze kapitalisiren, auf eine kleinere Versicherungssumme herabsetzen oder in eine solche ohne Gewinnantheil umwandeln, oder schliesslich deren Rückkauf beantragen sollte, müsste die Schuld sofort vom Baarwerthe der Polizze in Abzug gebracht werden.

Ein dritter Fall ist derjenige, wo der Versicherte nach einer längeren als achtjährigen Bestandesdauer die Prämie nicht zahlen könnte, früher jedoch die Specialreserve nie in Anspruch genommen haben würde. Hier kommt offenbar die Combination der periodischen Freijahre sehr zu statten, weil es nur einer Umänderung der Combination mit abnehmenden Prämien in diese bedarf, um der gestellten Anforderung zu entsprechen.

Angesichts dieser Vortheile wird der Versicherte den Rückkauf nach dreijähriger
standesdauer offenbar verschmähen, weil er sich hiedurch des Rechtes auf den
neinsamen Specialreservefonds selbst begibt.

Wie ersichtlich, kann in allen diesen Fällen eine jeweilige Transaction der
izze erst dann stattfinden, wenn die vorhandene eigene Specialreserve des Ver-
ierten vollends erschöpft ist.

Bezeichnet daher k das Verhältniss zwischen den zur Bildung des Gewinn-
heiles nöthigen Zuschlages Z und der Nettoprämie N, wogegen s dasjenige
schen der nach achtjähriger Bestandesdauer noch disponiblen Specialreserve S und
darstellt; ferner μ die Jahresanzahl der ferneren vom Zeitpunkte des achtjährigen
tandes zu gewärtigenden Prämienzahlungsdauer und G den nach Ablauf der-
ien sich ergebenden Gesammtwerth der jährlichen den Gewinnantheil bildenden
mienzuschläge, so ergeben sich folgende Relationen:

$$k = \frac{Z}{N}\ ,\ s = \frac{S}{N}$$

Zur Zeit der beendigten Prämienzahlung, mag dieselbe als eine beim Ver-
ierungsabschlusse bedingte oder durch den Tod des Versicherten verursachte sein,
d die Specialreserve S den Werth $S\,(1+p)^\mu$ erreichen. Der den Gewinn-
heil bildende jährliche Prämienzuschlag Z kann während dieser Dauer als
e jährlich einlaufende vorschussweise Rente betrachtet werden, so dass der Aus-
ck

$$Z\,\frac{(1+p)}{p}\Big[(1+p)^\mu - 1\Big] = A$$

en Werth sammt $P = 100p$-percentigen Zinsen nach μ Jahren darstellt. Es
somit

$$G = S\,(1+p)^\mu + Z\,\frac{(1+p)}{p}\Big[(1+p)^\mu - 1.\Big]$$

Gesammtwerth aller während der ganzen Versicherungsdauer für den Gewinn-
heil disponiblen Beträge. Nun ist aber der Gesammtwerth der vom achten Jahre
Bestandsdauer flüssig werdenden, und durch μ Jahre fortlaufend zunehmenden
vinnantheile nach Ablauf dieser Frist bekanntlich

$$G = m\,N\,.\left(\frac{1+p}{p}\,.\,\frac{[(1+p)^\mu - 1]}{p} - \frac{\mu}{p}\right)$$

dass man durch Verbindung der beiden Formen 3) und 4) die Relation

$$S\,(1+p)^\mu + \frac{Z\,(1+p)}{p}\,[(1+p)^\mu - 1] = m\,N\,.\left(\frac{1+p}{p}.\,\frac{[(1+p)^\mu - 1]}{p} - \frac{\mu}{p}\right)$$

aus dieser

$$m = \frac{\frac{S}{N}(1+p)^\mu + \frac{Z}{N}\frac{(1+p)}{p}\,.\,[(1+p)^\mu - 1]}{\frac{(1+p)}{p}\,.\,\frac{(1+p)^\mu - 1}{p} - \frac{\mu}{p}}$$

ilt, welche gehörig reducirt in folgende Form übergeht:

$$7)\qquad m = \frac{s \cdot p^2 (1+p)^\mu + k \cdot p (1+p) [(1+p)^\mu - 1]}{(1+p) [(1+p)^\mu - 1] - p \cdot \mu}$$

Es ist somit durch den Ausdruck

$$m \cdot N \cdot \alpha = \gamma$$

der jeweilige Gewinnantheil, welcher nach dem achten Jahre der Bestandesdau beginnt und während μ Jahren fortlaufend an den Versicherten zur Auszahlu gelangt, dargestellt, worin α die Werthe 1, 2, 3, 4 . . . . μ durchlauft.

Die zur Zeit des Versicherungsabschlusses zu gewärtigende Prämienzahlung dauer ist also

$$8)\qquad \delta = \mu + 8$$

und werden sich die während derselben einzuzahlenden Prämienbeträge folgendermass gestalten:

alljährlich vom 1. bis zum	8.	Jahre	$N(1+k)$
ferner im	9.	«	$N(1+k-m)$
«	10.	«	$N(1+k-2m)$
«	11.	«	$N(1+k-3m)$
«	12.	«	$N(1+k-4m)$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
«	$\mu + 8$.	«	$N(1+k-\mu m)$

Was nun die Feststellung der zu gewärtigenden Prämienzahlungsdauer a belangt, so wird dieselbe nur dann eine fragliche sein können, wenn dieselbe bis zu Ableben des Versicherten fortdauert. Nun könnte dieselbe einfach durch Zuhilfenah der ferneren wahrscheinlichen Erlebensdauer ermittelt werden; in welchem Fal jedoch bei einem eventuellen Ueberleben derselben, wo offenbar die Prämienzahlu fortzudauern hätte, einerseits die Gewinnantheile eingestellt werden mussten, w der Fonds derselben erschöpft wäre, andererseits aber der Versicherte plötzlich b müssigt wäre, die höher bemessene normale Prämie weiterhin einzuzahlen, was off bar gegen das Princip dieser Combination verstossen würde.

Um dem vorzubeugen, muss eine Grenze geschaffen werden, bis zu welch eine durch Gewinnantheile succesive hervorgebrachte Prämienermässigung unb schadet der Rechte der Versicherungsbank erfolgen kann.

Diese Grenze sei einfach in der Nettoprämie selbst gegeben, welche mit de Gewinnantheilzuschlag Z und dem Verwaltungskostenzuschlag V die Bruttoprä bildet, welche nun durch die successive zunehmenden Gewinnantheile nur bis z Höhe der Nettoprämie reducirt werden kann.

Der zum Zwecke der Gewinnantheile verbleibende Fonds wird zur Deckung d ferneren jährlichen Verwaltungskostenzuschlages verwendet werden.

Sollte der Versicherte die zur Zeit der achtjährigen Bestandesdauer seiner Ve sicherung ermittelte fernere wahrscheinliche Erlebensdauer überleben, und de erwähnte Fonds bis zu seinem späteren Ableben noch nicht erschöpft sein, so wi der Rest zugleich mit der versicherten Summe an dessen Erben zur Auszahlung gebrac

Der Fond, welcher durch zeitliches Ableben des Versicherten, also vor d festgesetzten Zeit frei wird, also seinem eigentlichen Zwecke der Gewinnbetheiligu nicht zugeführt werden könnte, vererbt sich eventuell auf die übrigen noch leben icherten dieser Categorie.

Fragmente finanzieller Disciplinen.

IV.

Nachdem nun in den früheren Abhandlungen die verschiedenen Formen der
lebenstilgung nach dem neuesten Gesichtspunkte zur Sprache gelangt sind, so
gen noch zur Vervollständigung des vorliegenden Themas nachstehende zeitweise
Anwendung gelangende Tilgungsarten einer Berücksichtigung unterzogen werden.
einfachste Tilgungsart von Anlehen ist diejenige, welche beim Hypothekar und
lencredit im Allgemeinen angewendet wird und auf der Grundlage beruht, dass
pital und Zinsen in einer gewissen Anzahl von Jahren durch gleiche am Schlusse
es jeden Tilgungsjahres zu entrichtende Quoten zur Tilgung gelangen, und zwar
d der jeweilige nach Abzug der entsprechenden Jahreszinsen verbleibende Quotenrest
Tilgung des Capitales herangezogen, so dass die Zinsen von Jahr zu Jahr im
nehmen, die Tilgungsquote jedoch im selben Verhältnisse im Zunehmen begriffen ist.

Die mathematische Form, welche hier zur Anwendung gelangt, entspringt aus
bekannten Relation

$$K\,(1+p)^n - \frac{R}{p}\,[(1+p)^n - 1] = 0 \qquad \text{und lautet}$$

$$R = \frac{K\,.\,p\,.\,(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

an R die gesuchte jährlich zu zahlende Quote bezeichnet. Setzt man in dieser
chung $1 + p = u$, so erhält man

$$K = \frac{u^n - 1}{u^n\,(u-1)}\,\cdot\,R$$

n der rechterhand sich befindende Factor einen bereits in den früheren Abhand-
gen wiederholt vorkommenden Bruch erkennen lässt, welcher in der Theorie der
lebenstilgung eine exceptionelle Stelle einnimmt, indem derselbe in den Formeln
mtlicher Tilgungsarten vorkommt und daher die Anlegung von diesbezüglichen
ellen zweckentsprechend erscheinen lässt.

Die Jahresquote R wird nun dem Gesagten zufolge in zwei Theile zerfallen,
denen der erste den jeweiligen jährlich zu entrichtenden Zinsenbetrag Z und der
ite den für die Tilgung des Darlehens verbleibenden bezüglichen Restbetrag der-
en T darstellt. Es ist somit

$$R = Z_a + T_a$$

in a das entsprechende Tilgungsjahr, für welches Z und T ermittelt werden soll,
ichnet und somit die Werthe 1, 2, 3, ... n durchlaufen kann.

Ist nun das Darlehen in Theilschuldverschreibungen zu 100, 200, 500 oder
0 Gulden eingetheilt, so wird der jeweilige nach Bezahlung der Zinsen von der
rtisationsquote verbleibende, durch den Theilschuldbetrag untheilbare Rest auf
nächstfolgende Jahr zur Tilgung vorgetragen, wobei selbstverständlich auch auf
en Verzinsung Rücksicht genommen werden muss. Auf diese Weise wird die
rtisation der Schuld durch die jeweilig entsprechende Anzahl Theilschuldverschrei-
gen ermöglicht.

Z. B. Es sei ein Darlehen von 1,000.000 Gulden, welchem
e fünfpercentige Verzinsung zugrunde liegt, inner-

halb zwanzig Jahren zu tilgen; wie gross ist die liche Annuität und in welcher Weise wird die successive verwendet werden können, wenn das lehen in Theilschuld-Verschreibungen zu 100 G sich im Umlaufe befindet?

Dieser Aufgabe wird nun der Werth

$$R = \frac{1{,}000.000 \,.\, (1{\cdot}05)^{20} \,.\, 0{\cdot}05}{(1{\cdot}05)^{20} - 1} = 80242{\cdot}545$$

als jährliche Annuität entsprechen und somit die Tilgung in folgender W sich gehen:

a	Schuldstand zu Beginn des a^{ten} Jahres	Jeweilig fälliger Zinsenbetrag bei 4% Verzinsung Z_a	Jährliche Amortisationsquote T_a	Jeweiliges Jahr Erforderniss
1	1,000.000	50.000	30.200	80.200
2	969.800	48.490	31.700	80.190
3	938.100	46.905	33.400	80.305
4	904.700	45.235	35.000	80.235
5	869.700	43.485	36.700	80.185
6	833.000	41.650	38.600	80.250
7	794.400	39.720	40.600	80.320
8	753.800	37.690	42.500	80.190
9	711.300	35.565	44.700	80.265
10	666.600	33.330	46.900	80.230
11	619.700	30.985	49.300	80.285
12	570.400	28.520	51.700	80.220
13	518.700	25.935	54.300	80.235
14	464.400	23.220	57.000	80.220
15	407.400	20.370	59.900	80.270
16	347.500	17.375	62.900	80.275
17	284.600	14.230	66.000	80.230
18	218.600	10.930	69.300	80.230
19	149.300	7.465	72.800	80.265
20	76.500	3.825	76.500	80.325
			1,000.000	

Der Tilgungsplan eines unter den gegebenen Umständen contrahirten Da ist somit in der vorliegenden Tabelle dargestellt.

Die Berücksichtigung der auf Hunderte abgerundeten Amortisations welche hier in Folge einer jeweilig einzulösenden ganzen Anzahl von Theil verschreibungen nöthig ist, verursacht somit eine Ausgleichung der jeweiligen Erfordernisse nach Massgabe des Bedarfes, einestheils durch Ergänzung, ande durch Hinweglassung solcher Beträge, welche die Abrundung der Amortis quoten verhindern. Diese negativen oder positiven Restbeträge, welche immer nächstfolgende Jahr vorgetragen werden müssen, verursachen offenbar eine unbede Unregelmässigkeit der gleich sein sollenden jährlichen Annuitäten, obzwar d ... Richtigkeit der Rechnung in gar keiner Beziehung von Einfluss ist.

Im Allgemeinen entfällt also von der jährlichen Quote R für die Zinsen am
sse

Jahres $Z_1 = Kp$

« $Z_2 = [K(1+p) - R]\,p$

« $Z_3 = [K(1+p)^2 - R(1+p) - R]\,p$

« $Z_4 = [K(1+p)^3 - R(1+p)^2 - R(1+p) - R]\,p$

$\vdots$

« $Z_n = [K(1+p)^{n-1} - R(1+p)^{n-2} - R(1+p)^{n-3} - \cdots R(1+p) - R]\,p$

e Tilgung am Schlusse

des 1. Jahres $T_1 = R - Kp$

« 2. « $T_2 = (R - Kp)(1+p)$

« 3. « $T_3 = (R - Kp)(1+p)^2$

« 4. « $T_4 = (R - Kp)(1+p)^3$

$\vdots$

« n « $T_n = (R - Kp)(1+p)^{n-1}$

Die Formel für die Ermittlung des für die Zinsen entfallenden Betrages für ein
iges Tilgungsjahr ist somit

$$Z_a = R - \Big[R - K(u-1)\Big]u^{a-1}$$

ür den für die Tilgung jeweilig verbleibenden Quotentheil

$$T_a = \Big[R - K(u-1)\Big]u^{a-1}$$

t das Wesentliche dieser Frage abgeschlossen ist.

Es sei nun schliesslich noch derjenigen Tilgungsform Erwähnung gethan, bei
er im Vorhinein ein bestimmter Percentsatz des Darlehens als jährliche
itätenquote fixirt wird. Während also $P = 100\,p$ der entsprechende Zinsfuss
arlehens ist, bezeichnet $Q = 100\,q$ denjenigen Percentsatz desselben, mittelst
alljährlich die Interessen sammt Tilgungsquote bestritten werden. Offenbar
wenn von einer Tilgung des Darlehens die Rede sein soll, $Q > P$ sein müssen.
Auch hier wird die bekannte Form 3), d. i.

$$K = \frac{u^n - 1}{u^n(u-1)}.R$$

rwünschten Ziele führen, indem einfach, um der Anforderung zu entsprechen,
nnuität

$$R = K.q$$

t wird; und man erhält somit, wenn die bekannte Relation

$$u = 1 + p$$

in Action tritt, die Gleichung

8)
$$(1+p)^n \frac{p}{q} = (1+p)^n - 1$$
und dies gehörig reducirt, liefert die Form

9)
$$q = (1+p)^n (q-p) \quad \text{oder}$$
10
$$n = \frac{lg\ q - lg\ (q-p)}{lg\ (1+p)}$$ als Resultat.

Wenn daher der Zinsfuss und die Annuität in Percenten des Darlehens ist, so erhält man aus dieser Form die entsprechende Tilgungsdauer n, we doch in den seltensten Fällen in einer Anzahl abgeschlossener Jahresperiod ergibt, weshalb zum Schlusse gewöhnlich eine Restquote zur Tilgung gelang

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, wie sich der Zinsfuss stell wenn die jährliche Annuität einen gewissen Percentsatz des Darlehens betr die Tilgungsdauer in einer gegebenen Anzahl abgeschlossener Jahresperio geben ist.

In diesem Falle wird die Form 8) die nöthige Handhabe bieten, un sich aus derselben, wenn hierin wieder $1 + p = u$ eingeführt wird
$$u = q\left(1 - \frac{1}{u^n}\right) + 1$$
und hieraus, wenn beide Seiten zur $n$ten Potenz erhoben werden

11)
$$u^n = \left[1 + q\left(1 - \frac{1}{u^n}\right)\right]^n$$
woraus schliesslich die Ersatzgleichung

12)
$$u^n = \underset{m>1}{E}\left[1 + q\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^n$$
resultirt, in welcher m den Näherungswerth für u^n darstellt.

Z. B. Es wird ein Darlehen von beliebiger Höhe d contrahirt, dass am Schlusse eines jeden Jahres eine An von 10 Percent desselben zurückgezahlt wird und di gungsdauer 13 Jahre beträgt; wie hoch wird sich der fuss belaufen?

Für diesen Fall ist also $Q = 100\,q = 10$ Percent, $n = 13$ un $100\,p = ?$ und es ergibt sich somit nach Substitution dieser Werthe Form 12) die Gleichung
$$u^{13} = \underset{m>1}{E}\left[1 + 0\cdot1\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]^{13}$$

Nach durchgeführter Rechnung erhält man für $u^{13} = 1\cdot6603$ und hi
$$u^{13} = (1+p)^{13}$$
schliesslich
$$p = (1\cdot6603)^{\frac{1}{13}} - 1 = 0\cdot03977$$
oder
$$P = 3\cdot977\%$$

Hiemit kann die Serie der verschiedenartigen Tilgungsmodalitäten u Erweiterung derselben auch für den Fall, als die für deren praktische Han zu ermittelnden Werthe transcendenter Art sind, für abgeschlossen betrachtet

Dr. Ludwig Grossmann's

Mathematische Begriffe staatswirthschaftlicher Finanzpolitik.

Ein wissenschaftlich in allen Phasen heikles Gebiet muss vom volkswirthschaft-
hen Standpunkte unbedingt die Staatswirthschaft genannt werden. Diejenigen
mente, welche berufen sind, hier eine Rolle zu spielen, sind derartige, dass es
ht möglich ist, dieselben immer auf dem Niveau des Gleichgewichtes zu erhalten,
oft vitale Interessen des Staates es erfordern, vom staatswirthschaftlichen Rück-
hten zu abstrahiren. Was nützt denn auch die mit grösster Penibilität und Ueber-
gung festgestellte äusserste Zulässigkeit der finanziellen Kräfteanspannung des
kes, wenn deren Grenze, gegen jedwede wirthschaftliche Tendenz, unter dem
nge der jährlich sich steigernden Erfordernisse überschritten werden muss. Das
erste Merkmal dieser Erscheinung äussert sich in der Abnahme der Ergiebigkeit
jeweiligen Ertragsquellen und kann hieraus auf eine steigende Gefährdung der
stenzbedingungen derselben geschlossen werden. In Folge der immer mehr schwin-
den Ergiebigkeit müssen jedoch wieder neue Ertragsquellen geschaffen oder die
n noch stärker in Anspruch genommen werden, wodurch die wirthschaftliche Lage
Staates einer Déroute entgegensteuert. Es drängt sich also die Frage auf, in
her Weise es möglich ist, diese Ergiebigkeit zu steigern oder zum Mindesten
demselben Niveau zu erhalten, ohne die Ertragsquellen relativ höher in Anspruch
nehmen. Die Antwort hierauf ist sehr naheliegend, wenn man erwägt, dass durch
ftigung des Volksvermögens und Förderung der wirthschaftlichen Lage des Volkes
h eine Steigerung der Lasten desselben zulässig ist, wenn diese mit einer gedeih-
en ökonomischen Entwicklung des Staates gleichen Schritt zu halten vermag. Für
Staat gibt es wohl neben demjenigen der Selbsterhaltung kein vitaleres Interesse
die Aufrechterhaltung seiner wirthschaftlichen Leistungsfähigkeit; wird jedoch
e durch andere Interessen in den Hintergrund gedrängt, so bedeutet dies nichts
iger, als das Aufgeben des wirthschaftlichen Selbsterhaltungsbestrebens. Der Finanz-
itik liegt also die Aufgabe ob, nicht nur das finanzielle, sondern auch das wirth-
aftliche Gleichgewicht im Staate herzustellen, weil es derselben in erster Linie
um zu thun sein muss, die Ertragsquellen zu schonen, deren Ergiebigkeit sonst
hleidend werden könnte.

Das finanzielle Gleichgewicht, welches im Principe die Aufrechterhaltung einer
nellen Finanzwirthschaft oder mit anderen Worten die Bestreitung der prälimi-
en Ausgaben mittelst der jeweiligen Einnahmen bedeutet, ist bei weitem nicht
solch' einschneidendem Einflusse, wie das durch seine besondere Wichtigkeit her-
retende wirthschaftliche Gleichgewicht. Eine dauernde Hintansetzung eines solchen
n in ihrer Tragweite von unberechenbaren Folgen begleitet sein. Was ist nun
Begriff dieses in seiner Beschaffenheit mit so intensivem Einflusse ausgestatteten

wirthschaftlichen Gleichgewichtes, und wann ist dasselbe hergestellt. Wie schon ob
bemerkt worden, existirt eine gewisse äusserste Zulässigkeit der Kräfteanspannu
der vorhandenen Ertragsquellen, wenn deren successives Versiegen nicht eintreten sol
Sind nun mit jedem Jahre die Erfordernisse im Steigen begriffen, so wird offenba
auch die Kräfteanspannung von Jahr zu Jahr eine Verschärfung erfahren, welch
durch eine entsprechende wirthschaftliche Kräftigung der Ertragsmittel wieder au
geglichen werden muss, um deren Leistungsfähigkeit zu erhöhen.

Mittelst einer rationellen Zollpolitik, Erleichterung und Verbilligung der Tra
portmittel und der fördernden Capitalskraft, sowie durch Erschliessung neuer Absa
gebiete wird die Concurrenzfähigkeit der Landesproducte gehoben und die Einnah
quellen des Volkes und somit auch des Staates vergrössert. In demselben Maasse,
die finanziellen Kräfte des Volkes durch den Staat in Anspruch genommen wer
müssen dieselben wieder genährt werden. Es liegt also im Wohlstande des Vol
für den Staat eine Gewähr seiner wirthschaftlichen Lebensfähigkeit. Unter den e
zelnen Momenten, welche geeignet sind, auf die relative Belastung des Volkserwe
direct oder indirect einen Einfluss auszuüben, nehmen vor allen Anderen die Sta
schulden und deren Verzinsung respective Tilgung die erste Stelle ein. Abgese
von der jeweiligen Höhe des effectiven Zinsfusses derselben, nach welcher die E
lohnung der arbeitfördernden Capitalskraft taxirt wird, bilden sie einen nach mehr
Richtungen hin mit der wirthsschaftlichen Leistungsfähigkeit eines Staates verknüp
Factor. Verhältnissmässig hochverzinsliche Staatsschuldentitres werden bei entsprechen
Sicherheit immer ein begehrenswerthes Anlagepapier auch für Capitalisten frem
Staaten bilden, und wird somit ein nicht unbedeutender Theil der Staatsschuld
Auslande placirt sein, wohin auch nothgedrungen ein grosser Theil der budgetmäss
Zinsen gravitiren muss. Je grösser also mit Rücksicht auf die Securität der Un
schied in dem Zinsfusse des Inlandes zu Gunsten des jeweiligen Nachbarstaates
desto grössere Posten von Staatstitres dem inländischen Markte entzogen werden.
nun die nach dem Auslande zu entrichtenden Zinsen im Verhältnisse ihrer relati
diesbezüglichen Differenz einen effectiven Verlust für den Staat bedeuten, so invol
dies vom Standpunkte der Staatswirthschaft eine fortschreitende Abnahme des Vol
vermögens. In demselben Verhältnisse als dieses jedoch in Mitleidenschaft gez
wird, muss offenbar auch der Coëfficient der relativen Belastung desselben zunehm
und zwar selbst dann, wenn auch absolut eine Erhöhung des Staatsbudgets ni
eintritt. Dies alles gilt unter der Voraussetzung, als nicht andere, die wirthschaftli
Leistungsfähigkeit fördernde Factoren, ihren ausgleichenden Einfluss geltend mach
Es frägt sich nun, in welcher Weise sich dieser Absorbirungsprocess in verständli
und leichtfasslicher Form darstellen lässt, weshalb nachstehende Auseinandersetzun
die nöthige Handhabe hiezu bieten mögen. Da das Capital die fördernde Kraft d
Arbeit ist und in Folge dessen die Erwerbsbedingungen durch Entziehung dessel
leiden, so wird die wirthschaftlich fördernde Consistenz der Erwerbsmittel geschmäl
d. h. die Arbeit wird rarer, wogegen die Erwerbsfähigkeit eine unveränderte blei
oder mit anderen Worten, es wird mit der jeweiligen partiellen Capitalsentzieh
ein Theil der Erwerbskräfte brachgelegt. Je mehr aber der Erwerb erschwert wi

drückender gestalten sich die Abgaben und desto mehr werden die Erwerbs-
gungen in Frage gestellt, d. h. in Folge der Verringerung der wirthschaftlich
rnden Consistenz der Erwerbsmittel, müssen immer weitere Gebiete derselben in
ruch genommen werden, um ein gleich grosses Budget zu bedecken. Es ist dies
einem Worte nichts anderes als ein Diffusionsprocess, welcher des besseren Ver-
nisses halber durch folgendes Beispiel erläutert werden mag.

Aus einem vollen Fasse Spiritus von bestimmter Gradhöhe wird wiederholt
gleiche Quantität derart entnommen, dass dieselbe immer wieder durch die
ne Quantität Wasser ersetzt wird, so dass das Fass wohl voll bleibt, der Inhalt
h an seiner Consistenz abnimmt. In Folge dessen wird blos die zuerst ent-
nene Quantität ihrer Qualität nach im Verhältniss zu derjenigen im Fasse voll-
g, die zunächst entnommene jedoch schon in demselben Verhältnisse minder-
g sein, als nach der ersten Entnahme durch Wasserersatz der Spiritus ver-
t wurde u. s. f. Je öfter also diese Procedur wiederholt wird, desto verdünnter
sich die entnommene Quantität gestalten, und kann man das Verhältniss der
erselben jeweilig vorhandenen Spiritusmenge durch folgende Coëfficienten dar-
n.

Sind die successive entnommenen Quantitäten ungleicher und beliebiger Art
rd, wenn man dieselben durch die Grössen u_1, u_2, u_3, u_4 .... darstellt
n denselben enthaltene Mengenverhältniss an Spiritus durch die Factoren

$$1\ ,\ 1-\frac{u_1}{v}\ ,\ 1-\frac{u_1+u_2}{v}+\frac{u_1\,u_2}{v^2}\ ,$$

$$1-\frac{u_1+u_2+u_3}{v}+\frac{u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3}{v^2}-\frac{u_1\,u_2\,u_3}{v^3}\ ,\ \text{u. s. f.}$$

drückt sein, wobei v den Inhalt des Fasses bezeichnet. Im gegebenen Beispiele
jedoch die zu entnehmenden jeweiligen Quantitäten gleich gross angenommen;
ellt somit daraus, dass für diesen Fall zwischen deren Werthen die Relation

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \ldots\ldots = u$$

en muss; und man erhält somit die gesuchten Coëfficienten

$$1\ ,\ 1-\frac{u}{v}\ ,\ \left(1-\frac{u}{v}\right)^2\ ,\ \left(1-\frac{u}{v}\right)^3\ldots\ldots\left(1-\frac{u}{v}\right)^{n-1}$$

e das jeweilige Verhältniss der vollgradigen Spiritusmenge zur ganzen Quantität
entiren. Will man nun das Verhältniss der successiven Entnahmen für den-
n Fall ermitteln, wo die vollgradige Spiritusmenge in denselben sich fort-
nd gleich bleibt, so werden die reciproken Werthe der beziehungsweisen obigen
ienten dasselbe liefern. Es werden somit die Werthe

$$,\ u\left(\frac{v}{v-u}\right)\ ,\ u\left(\frac{v}{v-u}\right)^2\ ,\ u\left(\frac{v}{v-u}\right)^3\ ,\ \ldots\ldots\ u\left(\frac{v}{v-u}\right)^{n-1}$$

esbezüglichen Quantitäten darstellen, welche in Folge der zunehmenden Ver-
ng des Inhaltes v immer grösser werden müssen, wenn der Spiritusgehalt der-
ein gleicher sein soll. Für den Fall also, dass im besagten Fasse 100 Liter
digen Spiritus enthalten wären, und nach jeweiliger Entnahme von 4 Litern
ben diese Quantität durch Wasser wieder ergänzt werden würde, müsste sich

die [illegible] Quantitäten folgend-
massen [illegible]:

[illegible]

um [illegible] Menge Spiritus zu erzielen, müs-
dieselben [illegible]:

[illegible] u. s. f.

[illegible] gebrachte Process vollzieht
nun [illegible] beziehungsweise beim Volkserw-
wenn [illegible] durch das Ausland absorbirt wird.
hiedurch [illegible] Volksvermögen wird bei gleichbleiben-
Budget[illegible] Masse [illegible] belastet, als es kleiner geworden ist,
kann [illegible] Coëfficientenreihe [illegible] diejenige der steigenden r-
tiven Belastung [illegible] wenn [illegible] das Volksvermögen und u den jäh-
absorbirten [illegible]. Man erhält somit in

$$3) \quad [illegible], \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^2, \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^3, \quad \ldots \quad \left(\frac{r}{r-u}\right)^{n-1}$$

die Reihe der steigenden relativen Belastungscoëfficienten für denjenigen Fall,
die jährlich absorbirten Beträge sich fortwährend gleich bleiben sollten. Für
Annahme ihrer Veränderlichkeit müssten die oben angeführten allgemeinen For-
zur Geltung gelangen.

Wir wollen uns jedoch damit begnügen, dieselben als gleich gross anzuneh-
da es sich doch hier blos um das erklärende und nicht um das statistische Mo-
dieser Frage handeln kann, und wollen auf dieser Grundlage die weiteren Con-
sionen hieraus ziehen. Es frägt sich nämlich, ob jenes Reservoir, aus welchem d-
Beträge absorbirt werden, durch das Volksvermögen oder durch den Volkserw-
richtiger ausgedrückt wird; insbesondere als sowohl die directen wie auch indire-
Steuern nicht vom Volksvermögen, sondern vom Volkserwerb gefordert werden, w-
man Zinsengenuss ebenfalls als Volkserwerb betrachtet.

Obzwar also indirect das Volksvermögen in Mitleidenschaft gezogen we-
dürfte, so ist es in erster Linie doch der Volkserwerb, welcher immer stärker d-
Inanspruchnahme seiner fördernden Mittel geschwächt wird; und wenn man bede-
dass die staatlichen Budgeterfordernisse in Folge ausserordentlicher Bedürfnisse
der hiedurch gesteigerten Zinsenlast immer grösser werden, also nebst der relati-
auch eine absolute Steigerung des Belastungscoëfficienten eintritt, so kann man s-
ein klares Bild von der Zunahme der Kräfteanspannung des Volkes machen.

In einem Staate, in welchem der Export den Import um ein Entsprechen-
übersteigt, können Befürchtungen dieser Art nicht in Betracht kommen, da
diesem Wege wieder das entzogene Capital einen Ersatz findet. Dort aber, wo
solcher Kräftezufluss in unzureichendem Masse oder gar nicht vorhanden ist, müss-
die oben angedeuteten Consequenzen vollends zur Geltung gelangen.

itrag zur Einschränkung der Storni in der Lebensversicherung.

III.

Die bisherigen Auseinandersetzungen in dieser Frage liessen erkennen, dass hier rere Momente vorhanden sind, welche die Erspriesslichkeit der vorliegenden bination ausser Frage stellen, insbesondere wenn deren Anwendung in entchender Weise zur Durchführung gelangt. Wenn auch die Vortheile, welche hier zu Acquirirenden die Versicherung verlockender erscheinen lassen, keine effectiven so kann doch deren absoluter moralischer Werth nicht bestritten werden, indem in erster Linie das Verfallen der eingezahlten Prämien unter Einhaltung einer ellten Bedingung, welche offenbar den solchermassen vorhandenen Verhältnissen jeder Beziehung Rechnung trägt, verhindert oder zum mindesten derart verzögert , dass der Versicherte Zeit gewinnt, den Stand seiner Versicherung zu consoen. Wer kennt nicht den wirthschaftlichen Werth des Creditvereines, welcher ferner nach der absolvirten dreijährigen Bestandsdauer einer solchen Versicherung Geltung gelangt, indem der Versicherte in die Lage gesetzt wird, eventuelle leidende Prämien durch Inanspruchnahme des gemeinsamen Specialreservefonds decken und nachträglich diese Vorschüsse ohne Prämienerhöhung wieder zu tilgen? h das Princip der successive abnehmenden Prämien bis zur Grenze des Nettoienbetrages ist nicht ohne Werth für die Plausibilität dieser Combination; und ich die Chancen, im Falle des Ueberlebens der wahrscheinlichen Erlebensdauer Versicherten, an der Beerbung der durch das frühere Ableben anderer Mitglieder zur Verwendung gelangten Fonds zu participiren und nach Massgabe seiner lebensdauer die versicherte Summe von Jahr zu Jahr gesteigert zu wissen, ebenfalls nicht wenig dazu beitragen, die Zweckmässigkeit derselben zu erhöhen. Vortheile, welche der Versicherungsbank hiedurch erwachsen, bedürfen wohl, hen von denjenigen, welche der Titel dieser Abhandlung verräth, keiner terung, da dieselben jedem im Versicherungsfache halbwegs Eingeweihten ohne rs einleuchten müssen.

Es mögen nun die technischen Auseinandersetzungen in der vorigen Abhandlung Fortsetzung erfahren.

Nachdem also als äusserste Grenze der durch die steigenden Gewinnantheile rgebrachten Prämienherabsetzung der jeweilig entsprechende Nettoprämienbetrag, setzt wurde, erübrigt nur noch, diejenige Dauer zu ermitteln, welche vom Zeitte des ersten Flüssigwerdens der Gewinnantheile bis zur Erreichung dieser nirten Minimalgrenze verstreicht. Die Form

$$\frac{Z + V}{m\ N} = \nu$$

derjenige Quotient, welcher aus dem Verhältnisse der zur Nettoprämie erforderen Zuschläge und dem ersten Gewinnantheil entspringt und diejenige Dauer aust, während welcher die entfallenden Gewinnantheile überhaupt zur Ermässigung Prämie beitragen können, ohne die Ueberschreitung der besagten niedrigsten Grenze ursachen.

Nach $\nu + 8$ Jahren der Bestandsdauer der Versicherung wird also die zu zahlende Prämie gleichmässig fortlaufen; über die näheren diesbezüglich geben nun folgende Auseinandersetzungen Aufschluss.

Offenbar verbleibt nach Ablauf der genannten Dauer, das ist nach v Einstellung der Gewinnantheil-Bezüge, noch ein restlicher Fonds aus den deten capitalisirten Zuschlägen Z zur ferneren Verfügung der Versicher Bezeichnet man diesen Fonds mit dem Buchstaben F, so wird derselb folgende Relation zum Ausdruck gelangen:

$$2) \quad F = S(1+p)^{\nu} + \frac{Z(1+p)}{p}\left[(1+p)^{\nu} - (1+p^{\nu-\mu}\right] - m\,N\left[\frac{1+p}{p} \cdot \frac{[(1+p)^{\nu} - 1]}{p}\right.$$

Von dem Zeitpunkte angefangen, wo also keine Gewinnantheile mehr zahlung gelangen, weil die Prämie bereits das supponirte Minimum erreicht dieser Fonds nach seiner Massgabe zur Bestreitung der fernerhin nicht zur lung gelangenden Verwaltungskosten-Zuschläge derart verwendet, dass selben für die Dauer der von diesem Zeitpunkte sich ergebenden ferneren wahrscheinlichkeit eine jährliche Rente stipulirt wird, welche, im Falle die Höhe des bezüglichen Verwaltungskosten-Zuschlages nicht erreichen sollt einen entsprechenden Jahreszuschlag zur ferneren Minimalprämie ergänzt muss. Sollte diese Rente jedoch den Verwaltungskosten-Zuschlag überste wird der vorhandene Ueberschuss vorerst für den Fall einer abnormalen Leb zum selben Zwecke in Reserve behalten, und im Falle einer nicht erfolgt wendung zur Ergänzung etwaiger derartiger ungedeckter Bedarfsfälle fü solchermassen Versicherte in Anspruch genommen und endlich mangels diese gemeinsamen Beerbungsfond einverleibt.

Es mag nun x das Alter des Versicherten zur Zeit seines Beitrittes be so ergibt sich, wenn derselbe das Alter $x + \nu + 8$ erreicht hat, als Mise von diesem Zeitpunkte zu stipulirende Jahresrente bis zum wahrscheinlichen des Versicherten $R_{x+\nu+8}$ und es ist in Folge dessen

$$3) \qquad B = V \, . \, R_{x+\nu+8}$$

der zur Deckung der ferneren Verwaltungskosten nöthige Betrag. Somit wi Formel

$$4) \qquad U = \frac{F}{R_{x+\nu+8}} - V$$

derjenige Betrag zum Ausdruck gelangen, welcher eventuell zur Ergän bezüglichen Verwaltungskosten-Zuschlages jährlich zur fernerhin zu Minimalprämie zugeschlagen werden müsste; und zwar in dem Falle, al Formel 4) für U ein negativer Werth resultiren sollte, durch welchen offe fehlende Betrag repräsentirt wäre.

Umgekehrt wird demnach bei einem positiven Werthe von U durch der von der Rente verbleibende jährliche Ueberschuss nach erfolgter Deck Verwaltungskosten-Zuschlages dargestellt sein.

Es mögen nun die bei dieser Combination möglichen Fälle einer Unte unterzogen werden, und sei vor allen Dingen derjenige Fall berücksichtigt,

mienzahlung vollständig und regelmässig erfolgt, so dass die Specialreserve gar ht in Anspruch genommen zu werden braucht.

Wenn man daher die in der Abhandlung I beispielsweise supponirte Höhe des rlichen, zum Zwecke der steigenden Gewinnantheile nöthigen Prämienzuschlages die nachfolgende Specialisirung dieses Themas beibehält, so ist bei 3·5percentiger zinsung $k = 0{\cdot}2135$, d. h. der Zuschlag Z mit 21·35 Percent der Nettoprämie gesetzt. Bekanntlich bleibt nun ferner in demjenigen Falle, als während einer strichenen achtjährigen Bestandesdauer die Prämienzahlung nicht nothleidend den würde, der Special-Reservefond ein intacter, und wird somit dessen Werth ein r vor der Zeit des Flüssigwerdens des ersten Gewinnantheiles durch

$$S = 2N$$

gedrückt sein. Unter diesen Umständen ist also nach der Form 1) der vorigen andlung der Werth des Coëfficienten $s = 2$ und dies mit obigem Werthe von k die bekannte dortselbst angeführte Form 7) substituirt, liefert bei 3·5percentiger insung des Zuschlages und der Annahme, dass für die weitere Prämienzahlungs- er μ die beziehungsweise fernere wahrscheinliche Lebensdauer in Anschlag gebracht , folgendes Ergebniss:

Z. B. das Alter eines Versicherten zur Zeit seines Bei- ttes sei 30 Jahre; die fernere wahrscheinliche Lebensdauer h achtjährigem Bestande der Versicherung beträgt somit 28·22 Jahre. Wieviel beträgt bei einem jährlichen, nebst Verwaltungskosten bemessenen Zuschlage von $Z = 21{\cdot}35$ Per- t der Nettoprämie N und $P = 100\,p = 3{\cdot}5$ percentiger Ver- sung desselben, der im neunten Jahre flüssig werdende, jedem weiteren Jahre gleichmässig steigende Gewinn- theil?

Da bekanntlich $Z = k\,N$ ist, so wird durch Substitution der gegebenen Werthe

$$m = 0{\cdot}026984$$

tiren, d. h. der steigende Gewinnantheil beträgt etwa 2·7 Percent der Netto- mie. Da nun diese bei einfacher Todesfallversicherung für diesen Fall auf eine icherungssumme von 1000 den Werth *)

$$N = 16{\cdot}97$$

gt, so ist der im neunten Jahre flüssig werdende Gewinnantheil

$$m\,N = 0{\cdot}4579$$

der hiezu nebst demjenigen der Verwaltungskosten nöthige jährliche Zuschlag

$$Z = 3{\cdot}62.$$

Die allgemeine Form für den von Jahr zu Jahr steigenden Gewinnantheil t also

$$m\,N\,\alpha = 0{\cdot}4579\;.\;\alpha = \gamma,$$

n α die Werthe von 1, 2, 3, 4 . . . . durchläuft.

Der Verwaltungskostenzuschlag wird für gewöhnlich mit 30 Percent der Netto- ie bemessen und wird somit für diesen Specialfall der Werth der Bruttoprämie durch

*) Tabelle der 17 englischen Gesellschaften bei vierpercentiger Verzinsungs-Grundlage.

$$P = N + Z + V = 25{\cdot}68$$

ausgedrückt sein. Der Versicherte wird nun von Jahr zu Jahr mittelst der Gew antheile seine Prämie ermässigen und zwar zahlt derselbe zu Beginn eines jeden ersten acht Versicherungsjahre die volle Prämie

$$P_{1\ldots8} = 25{\cdot}68$$

und von da ab im 9. Jahre $P_9 = 25{\cdot}68 - 1.(0{\cdot}46) = 25{\cdot}22$

« 10. « $P_{10} = 25{\cdot}68 - 2.(0{\cdot}46) = 24{\cdot}76$

« 11. « $P_{11} = 25{\cdot}68 - 3.(0{\cdot}46) = 24{\cdot}30$

« 12. « $P_{10} = 25{\cdot}68 - 4.(0{\cdot}46) = 23{\cdot}84$

« 13. « $P_{11} = 25{\cdot}68 - 5.(0{\cdot}46) = 23{\cdot}38$

. . . .

« 27. « $P_{27} = 25{\cdot}68 - 19.(0{\cdot}46) = 16{\cdot}94 =$

Der letzte Werth der zu zahlenden Prämie stimmt annähernd mit demjen der Nettoprämie überein, so dass von da ab die Prämie wieder in gleicher Höhe zum Ableben des Versicherten verbleiben wird. Hiernach ist auch die Dauer Gewinnbetheiligung durch den Werth $\nu = 19$ dargestellt.

Der Rest des durch die Zuschläge Z angesammelten und durch die bisher Gewinnantheile nicht erschöpften Fonds wird nach der Form. 2)

$$F = 5{\cdot}0018 . N = 84{\cdot}88$$

betragen, somit dies durch die entsprechende Mise $R_{57} = 11{\cdot}35932$ dividirt, hiervon der jährliche Verwaltungskostenzuschlag $V = 5{\cdot}09$ abgezogen, liefert

$$U = 7{\cdot}47 - 5{\cdot}09 = 2{\cdot}38$$

als jährlicher Ueberschuss von der Rente.

Es reicht nämlich in diesem Falle schon der Betrag von 57·82 vollständig um die Verwaltungskosten während der ferneren wahrscheinlichen Lebensda welche hier nach zurückgelegter Bestandesdauer von 27 Jahren etwa noch 15 J beträgt, zu decken. Der Fonds F in seiner ganzen Höhe ist hinreichend, um die V waltungskosten bis zu einem Alter des Versicherten von 85 Jahren zu bestrei

Was die Vererbung der Ueberschüsse anbelangt, so geschieht dieselbe in Weise, dass derjenige Versicherte, welcher vor der zum Zeitpunkte der eingegang Versicherung ermittelten wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer stirbt, keinen Anspr auf eine solche hat, wogegen Derjenige, dessen Ableben nach diesem Zeitpunkte folgt, nach Massgabe der vorhandenen Mittel zum gleichen Theile mit den and noch Lebenden an denselben participirt, demnach mit dem zunehmenden Alter Versicherten wohl dessen eigener Ueberschuss immer mehr aufgezehrt wird, die liche Antheilquote jedoch immer mehr wächst, so dass dieselbe als eine Prämie Langlebigkeit angesehen werden kann.

Derjenige Versicherte, welcher den Specialreservefonds zum Zwecke einer mehrerer Prämienzahlungen in Anspruch genommen hat, tilgt diesen Vorschuss den für ihn entfallenden Gewinnantheilen und tritt nach erfolgter Tilgung in Vollgenuss seiner Rechte, wogegen Derjenige, welcher seine Versicherung, vor nach zurückgelegter achtjähriger Bestandesdauer, in eine solche mit Freijahren wandeln liess, keine weiteren Ansprüche auf Beerbung der Ueberschüsse erheben ka

Dr. Ludwig Grossmann's

eflexionen über den Einfluss des sinkenden Zinsfusses auf den Boden- und Hypothekar-Credit.

Das Capital als fördernder Motor der Arbeit hat sich in der letzten Zeitperiode n der industriellen Investition zum grössten Theile zurückgezogen und fristet sein sein in den diversen Feuerfesten als Faustpfand für die Tributpflicht der Staaten d des unbeweglichen Besitzes. Die Gründungs- und Fructificirungs-Sirenen haben e lockende Macht längst eingebüsst und bilden in unserer Zeit fette Dividenden r den Gegenstand des Misstrauens. Die Erfahrung macht eben klug und das mobile pital ist vorsichtiger geworden. Es ist daher kein Wunder, dass Effecten mit fixer zinsung einer starken Nachfrage begegnen und der Capitalist sich lieber mit er geringeren, aber sicheren Rente begnügt. Das Zuströmen des Capitals nach bwegs sicherer Verzinsung ist in Folge dessen ein solch' immenses geworden, dass bst minder gute Securitäten mit garantirtem Zinsfusse der industriellen Verwerung vorgezogen werden. Prioritäts-Obligationen, Pfandbriefe, Staatsrenten und ere in diese Kategorie rangirenden Werthe bilden heute das gesuchte Material die Capitalsanlage.

Der garantirte Zinsfuss ist die Losung, mit welcher der Capitalist in unserer Zeit Effectenmarkt betritt, während die Höhe der Verzinsung erst in zweiter Linie in ge kommt. Es liegt daher in der Natur der Sache, dass in Folge dieser starken chfrage, welche neben Anderem auch durch die wachsende Anhäufung von Capien hervorgebracht wird, der Zinsfuss solcher Werthe sich immer mehr zu ässigen sucht. Zu dem gesellt sich noch die durch hohe Agrarzölle sich immer günstiger gestaltende Lage des Grundbesitzes, welche zu einer spontanen Ermässing des Zinsfusses für den Boden- und Hypothekar-Credit drängt, wobei die ten Verhältnisse des Prioritätenbesitzes ebenfalls nicht zu unterschätzen sind, so s insbesondere bei Pfandbriefen und Prioritäts-Obligationen, deren Securität anntlich derjenigen jeder anderen Capitalsanlage vorzuziehen ist, sich ein doppelt findliches Bestreben nach dieser Richtung hin fühlbar macht. Alle diese Momente l geeignet, eine Verschiebung der Verhältnisse auf dem europäischen Geldmarkte vorzurufen, indem dass Bedürfniss der Zinsfussermässigung bei guten Securitäten besten Beweis dafür bietet, dass daselbst ein Missverhältniss zwischen Sicherheit Anlage und deren Verzinsung mit Rücksicht auf den derzeitig geläufigen Durchnittszinsfuss besteht. Nur successive ist es möglich, eine diesbezügliche Schätzung verschiedenen Anlagewerthe mit Rücksicht auf ihre Rentabilität durchzuführen; so lange dies nicht geschehen ist, wird der Geldmarkt an jener Wankelmüthigkranken, welche sich schon seit geraumer Zeit, selbst bei den massgebendsten ken des Continentes in der Regulirung des Zinsfusses kundgibt.

Die grosse Frage der Securität der Anlage, mit Rücksicht auf die Stabilität Höhe der Verzinsung ist daher in unserem Zeitalter eine actuelle geworden und

muss man es begreiflieh finden, wenn der Capitalist, insolange deren Lösung
durchgeführt ist, in der sichersten Anlage auch die beste sieht In Folge dessen
es auch hauptsächlich die verschiedenen Boden- und Hypothekar-Pfandbriefe,
auch die Prioritäts- und Grundentlastungs-Obligationen, welche durch diese Be-
gung auf dem Geldmarkte in Anspruch genommen werden, indem sich allgemein
Schuldner das Bestreben kundgibt, durch Convertirung derselben einen den Verh-
nissen entsprechenden Zinsfuss als Grundlage für diese sicherste und am meis
gesuchte Capitalsanlage zu schaffen.

Dieses Bestreben ist aber in den seltensten Fällen ein selbstständiges, spontan
sondern resultirt zunächst aus dem Zwange, welchen die Verhältnisse dem Darlehe
Contrahenten auferlegen; hingegen sucht der Gläubiger, so gut es eben möglich
die Absichten des Schuldners zu vereiteln. Nun ist aber das Bankinstitut der
mittelnde Factor zwischen Beiden und übernimmt auf diese Weise die Rolle
Stossballens, welcher nach Massgabe seiner Elasticität dem Zwecke seiner Au
zu entsprechen geeignet ist. Diejenigen Bankinstitute, welche ihrer präponderire
Stellung gemäss in der Lage sind, einer solchen Strömung, wie sie sich in der Z
fuss-Ermässigung kundgibt, von vornherein zu huldigen, sind in Folge dessen
Stande, dem Darlehenswerber einen billigeren Credit zu gewähren; und die nä
Consequenz hievon ist eine grössere Concurrenzfähigkeit gegenüber anderen Cre
instituten, welche auf Grund höher verzinslicher Pfandbriefe ihr Creditgeschäft
betreiben genöthigt sind. Die weitere Folge hievon ist, dass selbst Schuldner
Darlehensposten, welche bereits durch geraume Zeit die Tilgungsquoten entrich
also ihr Darlehen bereits zum Theile restringirt haben, zum Zwecke einer gering
Verzinsung desselben, durch Vermittlung einer mit kleinerem Zinsfusse arbeite
Anstalt, den alten Vertrag lösen, um mit dieser einen neuen, minder drücke
einzugehen. Hier kommt aber noch ein anderer, bedeutend wichtigerer Fact
Betracht, welcher im Grunde genommen das eigentlich Empfindliche bei der
diese Weise hervorgebrachten Stornirung von Darlehensgeschäften bildet. Di
diese Weise stornirten Darlehensposten bilden zumeist die besten Securitäten,
gewöhnlich bereits ein grösserer Theil derselben getilgt ist, und es kann in F
dessen bei öfterer Wiederholung solcher Fälle die allgemeine Beschaffenheit
ganzen Darlehensbestandes eines solchen Institutes in Mitleidenschaft gez
werden.

Betrachtet man nun die interne geschäftliche Position eines mit klein
Zinsfusse arbeitenden Institutes, so gelangt man bald zur Ueberzeugung, dass
absolute Nutzen desselben durch die geringere Verzinsung seiner Capitalien nicht
entferntesten leidet, im Falle die Provision als absolute Differenz zwischen dem D
lehens- und Pfandbriefzinsfusse auch ferner beibehalten wird, und die bei kleine
Zinsfusse rascher erfolgende Tilgung durch eine länger zu stipulirende Tilgungs
ausgeglichen wird. Den Nutzen aus dem höher veranschlagten Zinsfusse genie
nämlich direct und effectiv blos der Pfandbriefbesitzer und erst indirect das Insti
und zwar in dem Sinne als vielleicht seine höher verzinslichen Pfandbriefe gesucht
sind und hiedurch eventuell im Course eine Steigerung erzielen können. Dass

auch bei einem mit minderverzinslichen Pfandbriefen belasteten Institute
sein, da seine Prosperität infolge eines um dieselbe Quote billigeren Dar-
fusses im selben Verhältnisse günstiger sein wird.
noch mehr; nimmt man nämlich den bestehenden Darlehenszinsfuss auch
llage für die Rentabilität der jährlich flüssig werdenden Gewinne an, so ist
Zeit der Darlehenscontrahirung ermittelte Barwerth sämmtlicher Jahres-
desto grösser, je kleiner der zur Grundlage desselben angenommene Zins-

ist folgendermassen zu verstehen: Die Rentabilität der im Besitze
lt sich befindlichen Capitalien kann doch nur nach dem activen, das
selbst gebräuchlichen Darlehenszinsfusse gemessen werden. Nun sind
kleinerem Zinsfusse die jährlichen Provisionsgewinne grösser, als sie sich
ltniss zu denjenigen bei höherem Darlehenszinsfusse vorkommenden, stellen
s ist also infolge dessen bei gleich grosser Tilgungsfrist der Provisions-
i kleinerem Zinsfusse relativ grösser, als derjenige bei einem höheren.
wurde dies bereits in einer der früheren Abhandlungen über dieses Thema
rwähnt.
Nachfolgenden sei zum besseren Verständniss des Gesagten eine Tabelle
auung gebracht, in welcher die jährlichen Annuitäten bei verschieden-
ilgungsfrist und einem Zinsfusse von 4, 4½, 5 und 6 Percent darge-
nd.

Tabelle

der Annuitäten für ein Capital von 100 Gulden.

Annuität bei einer Verzinsung von			
4%	4½%	5%	6%
12·32909	12·63788	12·95046	13·58680
8·99411	9·31138	9·63423	10·29628
7·35817	7·68761	8·02426	8·71846
6·40120	6·74390	7·09525	7·82267
5·78301	6·13915	6·50514	7·26489
5·35773	5·72704	6·10717	6·89739
5·05235	5·43431	5·82782	6·64615
4·82625	5·22020	5·62617	6·47005
4·65502	5·06021	5·47767	6·34443
4·52312	4·93875	5·36669	6·25370
4·42018	4·84543	5·28282	6·18757
4·33902	4·77305	5·21891	6·13907
4·27451	4·71651	5·16991	6·10331
4·22290	4·67210	5·13216	6·07687
4·18141	4·63707	5·10296	6·05725
4·14791	4·60933	5·08032	6·04268
4·12077	4·58732	5·06271	6·03184
4·09874	4·56980	5·04900	6·02376
4·08080	4·55584	5·03831	6·01774

Aus Obigem ist zu ersehen, dass zum Beispiel ein Darlehen von fl. 1
bei einer 10jährigen Tilgungsfrist und einem 6percentigen Darlehenszinsfusse
jährliche Annuitätenquote von fl. 1358·68, hingegen bei einem solchen von 4 P
blos fl. 1232·91 beanspruchen wird. Die für diese beiden Fälle in den einzelnen J
sich ergebenden Provisionsgewinne werden sich auf den Zeitpunkt der Darl
contrahirung auf Grundlage ihres beziehungsweisen Darlehenszinsfusses disc
folgendermassen gestalten.

Tilgungsjahr	bei 4%igem Darlehenszinsfusse		bei 6%igem Darlehenszinsfusse	
	Jeweiliger Provisionsgewinn in den einzelnen Tilgungsjahren	Provisionsgewinn auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung discontirt	Jeweiliger Provisionsgewinn in den einzelnen Tilgungsjahren	Provisionsgewinn auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung discontirt
1	100·00	96·15	100·00	94·34
2	91·67	84·75	92·41	82·26
3	83·00	73·79	84·36	70·83
4	74·00	63·26	75·83	60·09
5	64 63	53·12	66·84	50·00
6	54·89	43·38	56·37	39·75
7	44·75	34·00	46·16	30·71
8	34·21	25·00	35·34	22·18
9	23·25	16·33	23·87	14·13
10	11·85	8·00	11·71	6·58
		497·78		470·85

Infolge dessen ist also der Barwerth des gesammten Provisionsgewinn
Zeit der Darlehenscontrahirung bei vierpercentiger Verzinsung fl.497·78 und bei
percentiger blos fl. 470·85, wodurch das besagte Verhältniss eclatant dargele

Was nun die eventuelle Verlängerung der Tilgungsfrist bei der Ermäs
des Darlehenszinsfusses zum Zwecke eines unveränderten Tilgungsmodus anb
so ist aus der ersteren Tabelle die etwaige aproximative Zeitdifferenz unsch
entnehmen, wenn man von den jeweilig zu vergleichenden Annuitätenquoten di
sprechenden Zinsen in Abrechnung bringt und den Rest als Tilgungsquote beh
Ist bei einer Zinsfussermässigung die neue Tilgungsfrist eine derartige, das di
liche Abnahme des Darlehenscapitals in derselben Weise wie bisher bewerk
wird, so ist das Provisionserträgniss mit Rücksicht auf den herabgesetzten Z
zwar ein unverändertes, dessenungeachtet aber ein relativ günstigeres. Die t
tische Seite dieser Frage beansprucht jedoch eine präcise Bearbeitung, um ein g
brauchbares Resultat zu liefern.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Boden- und Hypotheken-Credit
tute durch eine den Verhältnissen entsprechende Ermässigung des Darlehen
fusses in ihren Interessen nicht nur nicht geschädigt werden, sondern bei
beziehungsweisen Herabsetzung des Pfandbriefzinsfusses, einerseits den allgem
Geldverhältnissen Rechnung tragen und andererseits den Bestand und die Se
ihrer Darlehensposten durch die sich hieraus ergebende theilweise Entlastun
chuldners verbessern, wodurch der Werth der Pfandbriefe gesteigert wird.

Die Prämie für Langlebigkeit.

o sehr auch die Grundprincipien der Lebensversicherung den Anforderungen
rechtigkeit in vollem Masse genügen und in denselben die Leistungen der Ver-
en gegenüber der Lebensversicherungsbank mit deren Gegenleistung genau
t sind, kann dennoch nicht geleugnet werden, dass die mit einer besonderen
bigkeit des Versicherten verbundene, oft ganz abnorme Prämienleistung die
sche Rechtsüberzeugung desselben in's Wanken zu bringen droht, trotzdem er
umhin kann, die an ihn gestellten Anforderungen als einen wirklich recht-
en Anspruch von Seite der Versicherungsbank anzuerkennen, insbesondere,
er die mit der Versicherung übernommenen Verpflichtungen einer solchen
, welche mit seinem eventuell eintretenden vorzeitigen Tode hätten zur Gel-
kommen können. Immerhin ist dies jedoch Grund genug, die theilweise
oshaltung der langlebigen Versicherten auf irgend eine Weise auf Kosten
orzeitig Verstorbenen zu bewerkstelligen.
Bei der in den früheren Abhandlungen dargestellten Combination zum Zwecke
inschränkung der Storni in der Lebensversicherung wurde durch die in Folge
orzeitigen Ablebens einzelner Versicherten unterbrochene Vertheilung der
nantheile die Bildung eines Fonds ermöglicht, aus welchem für die übrigen
lebenden Versicherten, welche ihre wahrscheinliche Lebensdauer überschreiten,
Prämie für Langlebigkeit geschaffen wird, welche bei jedem einzelnen Ueber-
jahre participativ den berechtigten Versicherten zum versicherten Betrage gut-
rieben werden kann, so dass mit dem ersten Jahre der Ueberschreitung der
eit des Versicherungsabschlusses ermittelten wahrscheinlichen Lebensdauer die
herte Summe zu wachsen beginnt und daher mit jedem weiteren Jahre sich
össert. Dass die Einbeziehung einer solchen Begünstigung in eine Versicherungs-
ination von grosser Tragweite für die Lebensversicherung und deren Acqui-
ist, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung und ist hiefür der Umstand
hnend, dass der zu Versichernde in vielen Fällen den Bemühungen des Acqui-
s nur deshalb Widerstand entgegensetzt, weil er seine eventuelle Langlebigkeit
lie hieraus sich ergebenden Consequenzen in Combination zieht. Die erste Auf-
der Versicherungs-Institution ist aber bekanntlich die, die breiten Schichten
Volkes für sich zu interessiren, weshalb gewisse für den Versicherten den
n des Nachtheiles erweckenden Momente nach Möglichkeit eliminirt werden
en. Das Naheliegende dieser Nothwendigkeit wird aber desto klarer, wenn man
gt, dass eine solche Purificirung der sich aus dem geringen Verständnisse des
ersichernden ergebenden Widerstandsvorwände leicht bewerkstelligt werden kann,
die Grundsäulen der Lebensversicherung irgendwie zu erschüttern, geschweige
die geringsten wie immer gearteten Opfer von Seite der Versicherungsbank zu
viren. Durch die Ansammlung der Specialreserve gewinnt der zur Schaffung der

$$3) \qquad R_3 = [(F - R_1)(1+p)^2 + (B_1 - R_2)(1+p) + B_2] \frac{(1+p)^{3n} . p}{(1+p)^{3n} - 1}$$

Hieraus ergibt sich nun schliesslich die allgemeine Form für die Rente

$$4) \; R_n = [(F - R_1)(1+p)^{n-1} + (B_1 - R_2)(1+p)^{n-2} + \ldots + (B_{n-2} - R_{n-3})(1+p) + B_{n-1}] \frac{(1+p)^{n} \ldots}{(1+p)^{n} - \ldots}$$

worin bekanntlich $P = 100 . p$ den für die Verzinsung dieses Fonds stipulirten Zi fuss bezeichnet.

Soll nun diese Rente von Jahr zu Jahr grösser werden, so muss offenbar bezügliche zum Fonds zugeschlagene Betrag B jeweilig grösser sein, als die ein J vorher zur Vertheilung gebrachte Rente, was nach den Dispositionen obiger For und den allgemeinen Sterblichkeitsgesetzen gemäss thatsächlich der Fall ist.

Die Prämie für Langlebigkeit kann aber unter denselben Umständen wie der einfachen Todesfall-Versicherung auch auf die gemischte übertragen werden: zwar geschieht dies in folgender Weise. Bei gemischter Versicherung ist bekannt der Fälligkeitstermin der versicherten Summe auf einen gewissen Zeitpunkt im lebensfalle festgesetzt, jedoch gelangt dieselbe bei eventuellem früher eingetret Todesfalle des Versicherten sofort zur Auszahlung.

Soll nun das oben besprochene Princip der Beerbung zur Geltung komm dann muss offenbar das System der steigenden Gewinnantheile ebenso wie bei einfachen Todesfallversicherung auch hier zur Einführung gelangen, und zwar bl dieses in den ersten acht Jahren dasselbe, indem eine gleichmässige Prämie Zuschlag gezahlt werden müsste, jedoch würde der Gewinnantheil von da ab bis Beendigung der Versicherungsfrist in steigendem Sinne zur Auszahlung gelan Der Gewinnantheil wäre ebenso wie zuvor ein auf einer fixen Basis beruhender, wü aber im Gegensatze zum früheren Systeme im Erlebensfalle die Specialreserve sam späteren Prämienzuschlägen vollständig aufzehren. Im Falle des früher eintreten Todes des Versicherten würde jedoch ein Theil der Specialreserve demnach un nützt bleiben und könnte somit zur Vererbung für diejenigen Versicherten v wendet werden, welche die Auszahlung ihrer versicherten Summe erleben.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die Einführung einer solchen Prämie Langlebigkeit auf das Lebensversicherungsgeschäft von sehr günstigen Folgen begle sein müsste, weil hiedurch der Anomalie einer eventuellen Ueberzahlung der V sicherungssumme mittels der noch im späten Alter zu zahlenden Prämien, vorgeb wäre.

Dr. Ludwig Grossmann's

etrachtungen über die Correlation zwischen Zinsfuss und Tilgungsfrist bei Boden- und Hypothekar-Darlehen.

I.

In der letzten Abhandlung über das Thema des Boden- und Hypothekar-ites wurde die Frage aufgeworfen, ob ein diesen Geschäftszweig betreibendes institut durch analoge Ermässigung seines Darlehens-Zinsfusses einerseits und lemselben entsprechenden Pfandbrief-Verzinsung andererseits, seine Interessen in d einer Beziehung preisgibt. Relativ musste dieselbe, wenn auf die jeweiligen tificirungs-Bedingungen des Provisions-Gewinnes Rücksicht genommen wurde, weiters im negativen Sinne beantwortet werden. Anders verhält sich jedoch Frage vom Standpunkte des absoluten jährlichen Erträgnisses, welches ohne sicht auf das Verzinsungsmoment aus der sich gleichbleibenden Differenz hen dem Darlehens- und Pfandbrief-Zinsfusse für das Institut sich ergibt. Das rbs-Institut bringt bekanntlich die jährlich entfallenden Provisions-Gewinne an Actionäre zur Vertheilung; diese kümmern sich jedoch nicht im Mindesten um ructificirungs-Bedingungen, unter welchen die Anstalt ihr Geschäft betreibt, rn beurtheilen dasselbe nur nach der absoluten Höhe der Dividende. Freilich sich nicht leugnen, dass auch hier die allgemeinen Rentabilitäts-Bedingungen relativen Einfluss geltend machen, indem eine Dividende, welche bei einem nein gangbaren Durchschnitts-Zinsfusse günstigerer Provenienz vielleicht unzu-end genannt werden müsste, im Falle einer ausgiebigen Ermässigung desselben An'agewerthen im generellen Sinne, vielmehr schon ganz annehmbar erscheinen te. Es darf jedoch nicht vergessen werden, dass wir uns heute in einem finan-n Uebergangsstadium befinden, in welchem sich die relative Capitalsverwerthung rmässigen sucht. Die Auswahl in besserer Verzinsung ist demgemäss noch eine rosse, um dem Capitalisten diese Thatsache in ihrer wahren Beschaffenheit vor n zu führen. Das Schwanken in der relativen Capitals-Verwerthung muss st einer gewissen Stabilität weichen, bevor sich das anlagebedürftige Capital r Thatsache bewusst werden wird, um sich derselben, wenn auch mit Wider-n, zu fügen. Aus diesem Grunde müsste es als eine Uebereilung angesehen en, wenn man schon heute dasjenige anticipiren wollte, was viellleicht noch zehnte bedürfen wird, um zur Geltung zu gelangen. Die Verringerung der als-Verwerthung vollzieht sich, das lässt sich nicht leugnen; jedoch nur ssive kann man die einzelnen Stadien dieser Erscheinung beobachten. Es ist r unter diesen Umständen unzulässig, den heutigen Gesichtspunkt des Actionärs t beurtheilen zu wollen, als ob er die Dividenden-Frage vom Standpunkte der tificirungs-Bedingungen auffassen würde, wenn ihn auch von Zeit zu Zeit die igerte Sorge nach guter und sicherer Capitalsanlage an den Ernst der genannten ziellen Metamorphose mahnt. Und wird es in Folge dessen klar, dass bei jähr-Nutzniessung der Provisions-Gewinne, das relative Moment in den Hintergrund

tritt und angesichts der genannten Umstände, blos das absolute zur Geltung gelang indem der Barwerth des Gewinnes zur Zeit der Darlehens-Contrahirung rücksichtlich seiner Fructificirung ausser Betracht kommt.

Von diesem Standpunkte mag nun auch das Verhältniss zwischen dem Darlehenszinsfusse und der Tilgungsfrist einer Erörterung unterzogen werden. Wie bekannt geht auf Grundlage der rechnungsmässigen Jahresannuitäten die Tilgung eines Darlehens bei kleinerem Zinsfusse viel rascher vor sich, als dies bei höherem Zinsfusses Fall ist. Infolge dessen muss auch, da der Provisionsgewinn im selben Verhältnisse wie das Darlehenscapital von Jahr zu Jahr abnimmt, dieser bei kleinerem Zinsfusse zunehmend spärlicher fliessen. Es fragt sich daher, auf welche Art ist möglich auch bei billigerem Darlehenzinsfusse den jährlichen Provisionsgewinn derart zu gestalten, dass derselbe auf dem gleichen Niveau verbleibt, wie bei höherer Verzinsung; oder mit anderen Worten, dass der Provisionsgewinn durch die vorgenommene Herabsetzung des Darlehenszinsfusses nicht in Mitleidenschaft gezogen wird. Wie bekannt, ist dies bei unverändertem Darlehensbetrage nur derart durchführbar, dass man die Tilgungsfrist für denselben um soviel verlängert, als durch den herabgesetzten Zinsfuss die Tilgung rascher vor sich geht, d. h. einer längeren Tilgungsfrist entspricht offenbar, unter der Voraussetzung eines unveränderten Zinsfusses, eine kleinere Annuität, somit muss, wenn allen Bedingungen entsprochen wird, auch die Tilgung langsamer erfolgen, woraus auch eine mässiger erfolgende Abnahme der jährlichen Provisionsgewinne resultirt. Soll also die Veränderung des Darlehenszinsfusses auf den Provisionsgewinn ohne Einfluss bleiben, so muss schliesslich die von der Annuität entfallende jeweilige Tilgungsquote in Betracht gezogen werden, welche direct und einzig und allein neben der Differenz zwischen dem Darlehens- und Pfandbriefzinsfusse, die Höhe des absoluten jährlichen Provisionsgewinnes regelt. Freilich darf nicht übersehen werden, dass hierin ein Factor liegt, welcher wieder mit der jeweiligen Tilgungsfrist im engen Zusammenhange steht, dessenungeachtet bleibt jedoch obige Behauptung aufrecht, weil dieser Factor seine Abhängigkeit in der Beschaffenheit der entsprechenden Tilgungsquote kundgibt.

Wir wollen also auf Grund des Gesagten versuchen, bei verschiedenartigem Darlehenszinsfusse und gleichbleibender Differenz zwischen diesem und dem Pfandbriefzinsfusse, den Provisionsgewinn seiner Veränderlichkeit zu entkleiden, indem wir auf Kosten der Tilgungsquote die Tilgungsfrist entsprechend reguliren. Zu diesem Behufe mag die in der Abhandlung „Mathematische Reflexionen über den Boden-Hypothekarcredit" I. behandelte Frage über den Baarwerth des Provisions-Gewinnes zur Zeit der Darlehenscontrahirung nochmals in Erinnerung gebracht werden. Unter der Voraussetzung, dass ein Bodencredit-Institut die für ein Darlehen zurückgezahlten Annuitäten vollständig, also ohne Abzug des Provisionsgewinnes zur Tilgung und Verzinsung der entsprechenden Pfandbriefe verwenden würde, müsste eine gewisse Anzahl der letzten Annuitäten als Gewinn-Ueberschuss aus dem Darlehensgeschäfte erübrigt werden, und zwar aus dem Grunde, weil auf Grund des Pfandbriefzinsfusses der Darlehensbetrag früher getilgt werden könnte, als dies auf Grund des Darlehens*zinsfusses* möglich ist. Würde man also die entsprechenden überschüssigen Annuitäten

n Zeitpunkte, in welchem dieselben flüssig werden, auf denjenigen der Darlehenscon-
hirung nach dem Darlehenszinsfusse discontiren, so wäre hiedurch der beziehungsweise
arwerth des Provisionsgewinnes ermittelt. Nehmen wir nun an, dass zwei gleich
sse Darlehen auf Grund eines verschiedenartigen Zinsfusses unter Beibehaltung
gleichen Provisionspercentsatzes contrahirt werden würden; unter welchen Um-
nden wäre es möglich, bei beiden einen gleich grossen Provisionsgewinn zu
ielen? Da sich die Höhe des Provisionsgewinnes in dessen Baarwerthe kundgibt,
müsste offenbar ermittelt werden, unter welchen Auspicien dieser Letztere sich in
len Fällen gleichbleibt, u. z. unter der Voraussetzung, als der Discontirungszinsfuss
beiderseitigen überschüssigen Annuitäten derselbe ist, also vom jeweiligen Dar-
nszinsfusse vollständig unabhängig bleibt. In der besagten Abbandlung ist nun
Form

$$n - \lambda = \frac{lg \frac{100\,R}{P-1} - lg\left(\frac{100\,R}{P-1} - A\right)}{lg\left(1 + \frac{P-1}{100}\right)}$$

falls von grosser Bedeutung, weil uns dieselbe die nöthige Handhabe in dieser
iehung bietet. Hierin bedeutet n die Tilgungsfrist, λ denjenigen Zeitabschnitt
lben innerhalb dessen die zu zahlenden Annuitäten als überschüssig zu betrachten
: ferner bedeutet P den Darlehenszinsfuss, also $P - 1$ den Pfandbriefzinsfuss
einpercentigem Provisionsgewinne, A das Darlehenscapital und schliesslich R die
ität.

Wird nun ein anderes gleich grosses Darlehen A mit geringerem Darlehens-
usse Q in Betracht gezogen, so entspricht demselben die analoge Gleichung

$$m - \lambda_1 = \frac{lg \frac{100\,R_1}{Q-1} - lg\left(\frac{100\,R_1}{Q-1} - A\right)}{lg\left(1 + \frac{Q-1}{100}\right)}$$

elcher jedoch auch die Tilgungsfrist m, der Zeitabschnitt λ_1 und die Annuität R_1
den früheren sich unterscheiden werden.

Die Differenz $n-\lambda$, beziehungsweise $m-\lambda_1$ bezeichnet, wie ersichtlich, diejenige
, während welcher die Annuitäten vollständig zur Tilgung jenes auf Grund des
dbriefzinsfusses verzinsten Darlehensbetrages A herangezogen werden müssten.
d nun diese Frist in beiden Fällen gleich gross angenommen, das heisst der
ngung

$$m - \lambda_1 = n - \lambda = k$$

prochen, so ist der wichtigste Theil der Lösung der gegebenen Aufgabe voll-
n. Es ergibt sich nämlich durch Verbindung der Formen 1) und 2) der Werth
fraglichen Annuitäten für den zu ermittelnden Fall, und erhält man, da der
fuss Q gegeben ist und die Grössen P, R_1 und A bekannt sind,

4)
$$R_1 = \frac{(v-1) \cdot A \cdot \left(\frac{R}{u-1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}}}{\left(\frac{R}{u-1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}} - \left(\frac{R}{u-1} - A\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}}}$$

worin der Kürze halber $1 + \frac{P-1}{100} = u$ und $1 + \frac{Q-1}{100} = v$ ang wird. Ist nun R_1 ermittelt, so wird, da der beiderseitig vollends gleich anzu Discontzinsfuss **D** in seiner Höhe nicht ohne Einfluss auf die Rechnung blei telst der Form

5)
$$B = \frac{R \cdot [w^{\lambda} - 1]}{(w-1)\, w^{n-1}}$$

die Berechnung des Gewinnbaarwerthes B zur Zeit der Darlehenscontrahirun licht, wobei $w = 1 + \frac{\mathbf{D}}{100}$ der kürzeren Schreibart halber zur Anwendung (Siehe Seite 32. Lief. II.) Nun muss aber dieser Baarwerth bei beiden zu chenden Darlehensmodalitäten derselbe sein, wenn den gestellten Anforderu sprochen werden soll; demnach gilt offenbar auch die Relation

6)
$$\frac{R\,(w^{\lambda} - 1)}{(w-1)\, w^{n-1}} = \frac{R_1\,(w^{\lambda_1} - 1)}{(w-1)\, w^{m-1}}$$

und da hierin sämmtliche Factoren, mit Ausnahme von m und λ_1 bekannt Grösse m aber sich durch λ_1 ausdrücken lässt, indem aus der Form 3) die

$$m = n - \lambda + \lambda_1 = k + \lambda_1$$

entspricht, so ist

7)
$$R \cdot \frac{w^{\lambda} - 1}{w^{\lambda}} = R_1 \cdot \frac{w^{\lambda_1} - 1}{w^{\lambda_1}}$$

und schliesslich

8)
$$\lambda_1 = \frac{lg\, \frac{R_1\, w^{\lambda}}{(R_1 - R)\, w^{\lambda} + R}}{lg\, w}$$

als gesuchtes Resultat für denjenigen Zeitabschnitt, welcher im fraglich nöthig ist, um denselben Provisionsgewinn zu ermöglichen, welcher dem u lichen zu Grunde liegt. Der für beide Fälle giltige Discontzinsfuss **D**, welc Bedarf mit dem laufenden allgemeinen Durchschnittszinsfusse übereins gemacht werden kann, also im Grunde genommen willkürlich ist, wird engeren Sinne den Maassstab bilden, vermöge dessen die fragliche Tilgung Ausdehnung gewinnen wird, indem w in der Form 8) nach durchgeführter R noch die einzig veränderliche ist, deren Bestimmung, nachdem allen Anford genügt wurde, noch für alle Fälle offen bleibt.

…ie technische Basis für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung.

I.

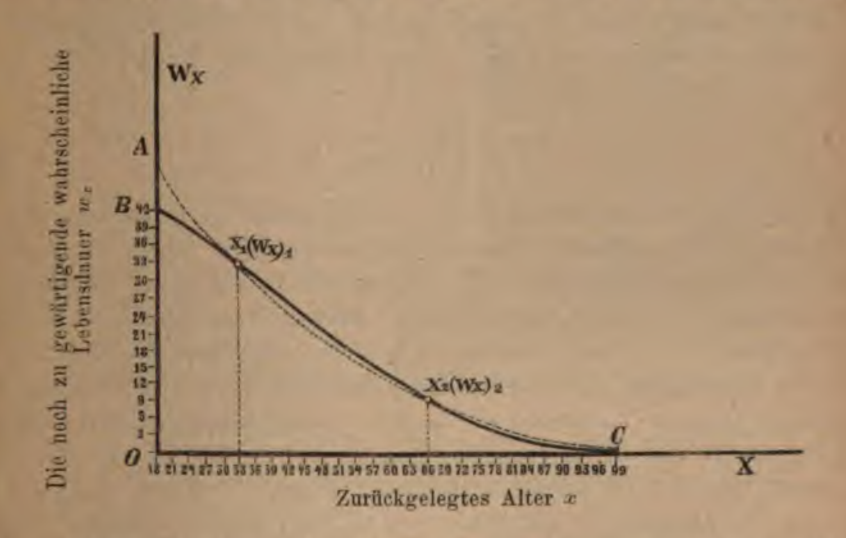
Das Actuelle dieser Frage, welche in den letzten Jahren durch den Staats-
alismus gezeitigt wurde, drängt die Wissenschaft, sich mit derselben näher zu
häftigen. Die Statistik hat wohl in mancher Beziehung die Grundlage, welche
technischen Handhabung diesfalls nöthig ist, schaffen geholfen, jedoch kann die
erige Unzulänglichkeit einer solchen schon desshalb nicht geleugnet werden, weil
erforderlichen statistischen Daten an und für sich zum grössten Theile noch der
lkommenheit entbehren. Es wäre deshalb voreilig, die bisher gesammelten Er-
ungen auf diesem Gebiete als hinreichend zu betrachten, um mittelst derselben
Gleichgewicht zwischen Leistung und Gegenleistung in dieser Beziehung her-
len zu können; u. zw. hauptsächlich deshalb, weil die verschiedenartigen Be-
äftigungen des Menschen rücksichtlich ihres Einflusses auf dessen Gesundheit und
blichkeit einerseits und eine kürzere oder längere Erwerbsfähigkeit andererseits
grossem Belang sind. Man kann hier mehrere Momente unterscheiden, welche
Schaffung einer halbwegs verlässlichen Grundlage die Hilfe der Statistik nicht
behren können, und bedarf es diesfalls einer relativ längeren und besonders sub-
Beobachtung, um den gestellten Anforderungen zu genügen. So ist es in erster
die mehr oder minder aufreibende Thätigkeit in den verschiedenen Berufs-
n, wie nicht minder die eventuelle Unfalls- und Lebensgefahr bei denselben, da
der Art der Thätigkeit die Dauer der Arbeitsfähigkeit abhängt. Hier besitzt die
istik ein reiches Gebiet, auf welchem sie Gelegenheit hat, diejenigen Behelfe zu
meln, welche zur rationellen Handhabung dieses Versicherungszweiges dienen.
anderer Beziehung ist wieder bei den einzelnen Berufsarten ein Unterschied in
reff der Langlebigkeit des Individuums zu machen, indem ein Beruf, welcher eine
ätigkeit in gesperrten Localitäten oder vielleicht die Einathmung verschiedener
ste und der Gesundheit unzuträglicher Gase voraussetzt, den Todeskeim viel
her weckt, als dies z. B. bei Beschäftigungen der Fall ist, welche in der freien
t oder in geräumigen mit guter Ventilation versehenen Localitäten verrichtet
den. Aber auch im letzteren Falle kann die Art der Beschäftigung auf den mensch-
en Körper schon an und für sich von Nachtheil sein und entweder auf die Dauer
er Arbeitsfähigkeit, oder auf seine durchschnittliche Lebensdauer ihren Einfluss
n. Es gibt Beschäftigungen, durch welche einzelne Glieder des Körpers, wie Hände
Füsse mit der Zeit für die Arbeit unbrauchbar werden, wogegen der übrige
per selbst, eine robuste Gesundheit aufweist und in Folge dessen bei vollständiger
lidität, die Langlebigkeit des betreffenden Individuums voraussetzt. Anderseits
es wieder Berufsarten, bei welchen durch übergrosse Anstrengung der Glieder
übrige Körper in Mitleidenschaft gezogen wird, indem Brust- oder Lungen-
kheit das Leben des Individuums verkürzen. In dieser und ähnlicher Weise geben
die Unterschiede kund, welche bei den diversen Berufsarten bald eine früher
später eintretende Invalidität, bald eine längere oder kürzere Dauer derselben
ssetzen, da *einerseits bei vollständiger* Arbeitsfähigkeit bis in's späte Alter, der

Tod der Invalidität zuvorkommt, andererseits bei vorzeitiger Invalidität ein früheres oder späteres Ableben des Individuums nach Massgabe des Berufes einzutreten vermag. Man kann Berufsarten unterscheiden, bei denen wohl Fälle der Invalidität in grösserem oder geringerem Masse vorkommen, jedoch das pensionsfähige Alter in den seltensten erreicht wird; und umgekehrt wieder solche, bei denen die durchschnittliche Altersgrenze eine verhältnissmässig hohe ist, hingegen Fälle von Invalidität spärlich sind.

Hieraus ersieht man, dass die Aufgabe der Statistik diesfalls keine leichte ist und muss es daher begreiflich finden, wenn die bisher ermittelten Resultate auf diesem Gebiete noch weit davon entfernt sind, verlässliche Grundlagen für die technische Bearbeitung dieser Frage zu bieten. Immerhin darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Invalidität des Menschen zum grossen Theile auch mit dem allgemeinen Absterbegesetze in einem gewissen Zusammenhange steht; und es ist nicht ausgeschlossen, dass die diesfälligen Erscheinungen in der Beschaffenheit desselben eine geeignete Handhabe zur Schaffung einer Basis bieten könnten, auf Grund deren die allgemeine Beurtheilung der verschiedenen Berufsarten und Beschäftigungen vom versicherungstechnischen Standpunkte selbst schon mit Zuhilfenahme der bis nun noch spärlich vorhandenen statistischen Daten durchführbar wäre. Es ist bekannt, dass sich im Absterbegesetze ein Factor geltend macht, der am besten mit dem Worte „Lebenszähigkeit" ausgedrückt erscheint. Derselbe gibt sich nämlich in der steigenden durchschnittlichen Lebensdauer kund, welche sich mit jedem nächst erlebten Jahre einer bestimmten Alterskategorie äussert; d. h. mit anderen Worten ein je höheres Alter ein Individuum erreicht hat, desto grössere Chancen besitzt es die höchste Altersgrenze der menschlichen Lebensdauer zu erklimmen. In der mit dem Alter zunehmenden Lebenszähigkeit des Menschen liegt aber ein wesentlicher Anhaltspunkt für die Beurtheilung der Validität desselben in den verschiedenen Altersstadien, indem das Naturgesetz, welches sich in einer mit dem Alter zunehmenden Sterblichkeit, also im entgegengesetzten Sinne kundgibt, das Mass der menschlichen Lebenskraft begrenzt. Dieser Anhaltspunkt sei nun für die weiteren Auseinandersetzungen massgebend, indem derselbe einer näheren Untersuchung unterzogen werden soll. Zu diesem Behufe mag das in einer der früheren Abhandlungen (Seite 42 und 50, II. Lief.) dargestellte Absterbegesetz einer genaueren Beobachtung in diesem Sinne unterworfen werden, indem das Moment der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer einerseits und dasjenige der wahrscheinlichen Gesammt-Lebensdauer andererseits in den einzelnen Altersstadien einer vergleichenden Skala unterordnet wird. Es liegt wohl in der Natur der Sache, dass die fernere wahrscheinliche Lebensdauer mit jedem weiter zurückgelegten Lebensjahre sich im absoluten Sinne im Abnehmen befindet, wogegen die jeweilig entsprechende, wahrscheinlich zu erreichende Gesammt-Lebensdauer eine verhältnissmässige Steigerung erfährt.

Dies entspringt dem Umstande, dass der absoluten Abnahme der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer bei steigendem Alter, die Differenz der unterdessen jeweilig zurückgelegten Jahre entgegensteht, welche aber im positiven Sinne schon an und für sich eine grössere ist, als die durch die Abnahme der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer hervorgebrachte negative, woraus hervorgeht, dass die Beschaffenheit

numerischen Unterschiedes durchwegs positiver Art sein muss. Im rascheren
fe des jeweiligen Zuwachses der zurückgelegten Lebensdauer gegenüber dem-
in der Abnahme der entsprechenden wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer,
lso im relativen Sinne der Wachsthum der wahrscheinlichen Gesammtlebens-
Nun lässt sich aber in diesem Verlaufe eine gewisse Veränderlichkeit consta-
nd diese ist es, welcher in der Frage der Invaliditäts- und Altersversicherung
olle zugedacht ist. Um eine solche Veriabilität nun besser beurtheilen zu
, sei in Folgendem das Absterbegesetz graphisch zur Darstellung gebracht.



BC die Curve der ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten bei zurückgelegten
von 18—99 Jahren bezeichnet und bei deren Gleichung die Constanten auf
lage der Sterblichkeitstafeln der 17 englischen Gesellschaften berechnet sind,
s dieselbe mit Rücksicht hierauf folgendermassen lautet:

$$= 91{\cdot}7022 \left[1{\cdot}0321413 + \frac{x}{2(x+99)}\left(1 + \frac{x}{2(x+99)}\right)\left(\frac{(33-x)\,(66-x)\,(99-x)}{(33+x)\,(66+x)\,(99+x)}\right)\right]^{-x}$$

$$- 0{\cdot}1744906 \left[1{\cdot}0321443 + \frac{x}{2(x+99)}\left(1 + \frac{x}{2(x+99)}\right)\left(\frac{(33-x)\,(66-x)\,(99-x)}{(33+x)\,(66+x)\,(99+x)}\right)\right]^{x}$$

us der Form der Curve ist zu ersehen, dass dieselbe gegen die x-Achse zuge-
vorerst concav wird, um sodann nach Passirung ihres Wendepunktes convex
laufen. Daraus ergibt sich, dass dieselbe ausser der ihr innewohnenden Eigen-
die abnehmende Tendenz der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer zum Aus-
zu bringen, noch einem anderen Gesetze unterordnet ist, welches sich in der
hümlichkeit des Verlaufes kundgibt und im zweiten Differenzialquotienten
Gleichung zur Geltung gelangt.

Es entspricht somit der Ausdruck

$$2) \qquad \frac{d^2 w_x}{dx^2} = \varphi(x)$$

den Anforderungen des genannten Gesetzes, indem für den Fall, als $\varphi(x)$ positiv die Curve gegen die x-Achse concav, und bei negativer Beschaffenheit dessel convex zugewendet ist, wogegen im Wendepunkte die Function $\varphi(x)$ Null wird.

In dem letzteren Punkte scheint daher das genannte Gesetz seine culminire Wirkung auszuüben, weshalb es nöthig ist denselben näher zu bestimmen.

Zu diesem Behufe mag aus der Gleichung 1) der allgemeine Werth zweiten Differenzialquotienten $\varphi(x)$ ermittelt und sodann gleich Null gesetzt wer Hieraus ergibt sich sodann der Werth von x, welcher dem Wendepunkte der Cu entspricht und folgendermassen lautet

$$x_0 = 42{\cdot}6$$

Was nun die in diesem Punkte sich begegnenden beiderseitigen Formen Verlaufes der Curve anbelangt, so entspringen dieselben einem beziehungswe steigenden oder fallenden Differenzen-Unterschiede, welcher sich in den einzelnen zur gelegten Lebensjahren zwischen der jeweiligen ferneren wahrscheinlichen Lebensd kundgibt. Dieselbe ist z. B. nach zurückgelegtem 30. Lebensjahre mit 33·92291 Jah nach dem 31. Lebensjahre mit 33·21115 und nach dem 32. Lebensjahre mit 32·4 zum Ausdruck gebracht Zwischen der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer zurückgelegtem 30. und derjenigen nach dem 31. Lebensjahre ist nun wie ersich eine Differenz von 0·71176 Jahren vorhanden, wogegen zwischen derjenigen dem 31. und 32. Lebensjahre eine solche von 0·71265 Jahren besteht. Der Un schied zwischen diesen beiden Differenzen beträgt also 0·00089; und zwar in di Falle in einem mit dem zurückgelegten Alter abnehmenden Sinne. Bis zu ei gewissen Alter sind nun die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolge Perioden der entsprechenden ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer im Wac begriffen, um dann wieder die umgekehrte Procedur der Abnahme durchzumac wobei die entsprechenden Differenzen-Unterschiede negativer Beschaffenheit wer Dieses Alter nun, in welchem diese Aenderung des Verlaufes vorsichgeht, ist jenige von $x_0 = 42{\cdot}6$ Jahren, welches man gewissermaassen als das der äusse körperlichen Entwicklung und Rüstigkeit ansehen kann, weil hier das Verhält der Lebenskraft und Lebenszähigkeit zu einander sich am günstigsten äussert. E sogut wie es in der Jugend dem Menschen bei genügender Lebenskraft an Leb zähigkeit mangelt, so gebricht es demselben im Alter bei hinreichender Leb zähigkeit an Lebenskraft, und eben dieser letztere Zustand bezeichnet den eig lichen Sinn der Invalidität.

Dr. Ludwig Grossmann's

Betrachtungen über die Correlation zwischen Zinsfuss und Tilgungsfrist bei Boden- und Hypothekar-Darlehen.

II.

Nachdem in der vorigen Abhandlung die allgemeinen Formen festgestellt wurden, auf deren Grundlage es möglich ist, für den Fall einer eventuellen aliquoten Herabsetzung sowohl des Darlehens-Zinsfusses als auch der Pfandbrief-Verzinsung, diejenige Veränderung der Tilgungsfrist zu ermitteln, auf Grund deren der durch diese Procedur veränderte jährliche Provisionsgewinn wieder auf das ursprüngliche Niveau gebracht werden kann, so mag nunmehr in den nächsten Auseinandersetzungen die Handhabung derselben einer Erörterung unterzogen worden.

Wird eine Herabsetzung der Pfandbrief- und Darlehens-Verzinsung derart durchgeführt, dass die Differenz zwischen beiden Percentsätzen unverändert bleibt, so ist bekanntlich damit nicht auch der jährliche Provisionsgewinn mit dem ursprünglichen auf derselben Höhe erhalten worden, weil durch die Veränderung des Zinsfusses an und für sich ein anderer Verlauf der Tilgung des Darlehens hervorgebracht wird, wodurch offenbar auch die jährlichen Zinsenbeträge und somit auch die von deren Höhe abhängigen Provisionsgewinne eine beschleunigte Veränderung erleiden.

Um dies zu verhindern, ist es nothwendig, die Annuität derart festzusetzen, dass die besagte Beschleunigung annulirt wird; und ist dies mit Hilfe der zu diesem Behufe ermittleten Formel 4)

$$R_1 = \frac{(v-1)\,.\,A\,.\left(\frac{R}{u-1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}}}{\left(\frac{R}{u-1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}} - \left(\frac{R}{u-1} - A\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,u}}}$$

durchführbar.

Betrachtet man ferner die Relation

$$m - \lambda_1 = n - \lambda$$

worin n die ursprüngliche und m die veränderte Tilgungsfrist darstellt, so wird offenbar, wenn

$$m > n \text{ auch } \lambda_1 > \lambda$$

sein müssen, um den gestellten Anforderungen zu entsprechen. Die Formel 8)

$$\lambda_1 = \frac{lg\,\frac{R_1\,w^{\lambda}}{(R_1 - R)\,w^{\lambda} + R}}{lg\,w}$$

liefert diesfalls das gesuchte Verhältniss, wobei die in derselben vorkommende Grösse w den Factor eines willkürlichen Zinsfusses darstellt.

In der Form 4) ist also, wie ersichtlich, diejenige Annuität R_1 ausgedrückt, welche bei einem kleineren Zinsfusse, als die Annuität R das gleiche Capital in einem gleichen Zeitraume zu tilgen im Stande ist. Da nun R bei einem bestimmten

Zinsfusse einer bestimmten Tilgungsfrist entsprechen muss, wenn das
Capital gegeben ist, so wird offenbar unter denselben Bedingungen und
änderten Zinsfusse dieselbe Tilgungsfrist für R_1 gelten. Wenn daher die
geworfen worden war, unter welchen Umständen bei verschiedenem Zi
gleichen Zeiträumen ein bestimmtes Capital getilgt wird, und in welche
nisse die entsprechenden Annuitäten sich zu einander befinden, so war die
jene Form vollständig beantwortet worden. Die Form 4) an und für s
also, wenn man die in derselben vorkommenden Grössen in Betracht zieht
hung der Annuitäten in demjenigen Falle, wo bei verschiedenen Verzins
täten auf Grund der aliquot differirenden Pfandbrief-Zinsfüsse in gleiche
gleich grosses Capital getilgt werden soll. Dieselbe kann daher nur im a
aber nie im speciellen Sinne dem vorliegenden Zwecke dienen, indem d
eines Darlehens auf Grund des Pfandbrief-Zinsfusses wohl bedeutend frü
muss, als auf Grund des Darlehens-Zinsfusses; bei gleichmässiger H
sowohl des einen wie auch des andern kann jedoch der Provisionsgewinn
jenigen der ursprünglichen Verzinsung entsprechen, wenn die Tilgung au
des herabgesetzten Pfandbrief-Zinsfusses in gleicher Frist erfolgt, wie die
des ursprünglichen.

Nachdem nun das Darlehenscapital mit einem höheren als dem
Zinsfusse zur Tilgung gelangt, so wird offenbar die volle Tilgungsfrist e
länger sein als die oben genannte. Dieser Unterschied der Tilgungsperio
derjenige, innerhalb dessen die zu zahlenden Annuitäten als Provi
betrachtet werden können. In den Formen 5) bis 8) ist nun der Zwe
diese Unterschiede der Tilgungsperioden bei zwei verschiedenen Fällen
gestalten, dass die in denselben einfliessenden Provisionsgewinne mit e
bigen, aber gleichen Zinsfusse auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahir
tirt, einander gleich sind. Da nun die Annuitäten in den beiden Fällen
liche sind, so werden offenbar auch die Unterschiede der Tilgungsperiode
sein müssen, und gibt in Betreff des Verhältnisses derselben zu einander
den nöthigen Aufschluss.

Die Form 4) wird nun in den ferneren Auseinandersetzungen i
gemäss zur Anwendung gelangen, indem diese ihrer Eigenschaft gemäs
verschiedene Darlehensverzinsungen und einheitliche Tilgungsfrist der
Annuität für die Tilgung eines bestimmten Capitales eine den bezie
Anforderungen entsprechende coordinirt.

In Folge dessen wird durch dieselbe auch die Frage beantwo
können, in welchem Verhältnisse sich diejenigen Annuitäten befinden, vo
eine auf Grund des Darlehens-Zinsfusses, die andere auf Grund des
Zinsfusses in gleicher Tilgungsfrist ein bestimmtes Darlehen tilgt.

Setzen wir in dieselbe zu diesem Behufe anstatt u den Werth $u_1 =$

und anstatt v den Werth von $u = 1 + \frac{P - 1}{100}$, so erhalten wir

tät auf Grundlage des Darlehenszinsfusses und in R' anstatt R_1 diejenige auf der Pfandbriefverzinsung, welche innerhalb einer gleichen Dauer ein gleich s Darlehen A tilgen. In der Differenz $R' - R$ kann man sodann offenbar den hen Provisionsgewinn erblicken, und ergibt sich somit

$$R' - R = \frac{(u-1) \,.\, A \,.\left(\frac{R}{u_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}}}{\left(\frac{R}{u_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}} - \left(\frac{R}{u_1 - 1} - A\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}}} - R$$

esultat. Für einen herabgesezten Zinsfuss ferner anstatt u den Werth $1 + \frac{Q}{100}$ gesetzt, wobei $v = 1 + \frac{Q-1}{100}$ unverändert bleibt, ergibt sich onforme Relation für R'_1, wenn anstatt R der Werth R_1 substituirt wird. Man erhält somit als entsprechende Form

$$R'_1 - R_1 = \frac{(v-1) \,.\, A \,.\left(\frac{R_1}{v_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}}}{\left(\frac{R_1}{v_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}} - \left(\frac{R_1}{v_1 - 1} - A\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}}} - R_1$$

ndet man nun diese beiden Relationen a) und b), indem man dieselben einander setzt, so wird der Bedingung

$$R' - R = R'_1 - R_1$$

ochen, welche nichts weniger ausdrückt, als die Gleichheit der Provisionse in den einzelnen Tilgungsjahren bei zwei verschiedenen Darlehens-Zinsfüssen, die Differenz zwischen diesen und den Pfandbrief-Verzinsungen unverändert Die Form c) lautet nämlich in Worten ausgedrückt folgendermassen: Die nz, welche zwischen der Annuität auf Grundlage des ursprünglichen ens-Zinsfusses und derjenigen auf Grund des ursprünglichen Pfandbrief-Zinsbesteht, wenn die Tilgungsdauer und das zu tilgende Capital in beiden Fällen ist, muss mit derjenigen übereinstimmen, welche bei herabgesetztem Zinsfusse eichem Unterschiede zwischen der Darlehens- und Pfandbrief-Verzinsung unter leichen Modalitäten sich ergibt. Setzt man der Vereinfachung halber in der a)

$$\frac{\left(\frac{R}{u_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}}}{\left(\frac{R}{u_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}} - \left(\frac{R}{u_1 - 1} - A\right)^{\frac{lg\,u}{lg\,u_1}}} = U$$

der Form b)

$$\frac{\left(\frac{R_1}{v_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}}}{\left(\frac{R_1}{v_1 - 1}\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}} - \left(\frac{R_1}{v_1 - 1} - A\right)^{\frac{lg\,v}{lg\,v_1}}} = V$$

bt sich die Gleichung

$$(v-1) \,.\, A \,.\, V - R_1 = (u-1) \,.\, A \,.\, U - R$$

raus die vereinfachte Relation

g)
$$\frac{1}{V} = \frac{(v-1) \cdot A}{(u-1) A \cdot U - R + R_1}$$

als Resultat.

Aus der Form e) lässt sich nun R_1 durch die Grösse V ausdrücken: u.

h)
$$R_1 = \frac{(v_1 - 1) \cdot A}{1 - \left(1 - \frac{1}{V}\right)^{\frac{lg\, v_1}{lg\, v}}}$$

und man erhält somit nach vollzogener Substitution in die Form g) den A

i)
$$\frac{1}{V} = \frac{(v-1) \cdot A \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{V}\right)^{\frac{lg\, v_1}{lg\, v}}\right]}{\left((u-1) \cdot A \cdot U - R\right)\left[1 - \left(1 - \frac{1}{V}\right)^{\frac{lg\, v_1}{lg\, v}}\right] + (v_1 - 1) \cdot .}$$

welcher seiner transcendenten Form gemäss die Ersatzgleichung

k)
$$z = \left(1 - \frac{1}{V}\right)^{\frac{lg\, v_1}{lg\, v}} = \underset{m < 1}{\mathrm{E}} \left[1 - \frac{(v-1) \cdot A \cdot (1-m)}{[(u-1) \cdot A \cdot U - R](1-m) + (v_1 - 1)}\right.$$

iefert, mittelst welcher es möglich ist aus der Gleichung h)

$$R_1 = \frac{(v_1 - 1) A}{1 - z}$$

den Werth derjenigen Annuität zu ermitteln, welche bei herabgesetztem Zinsfuss selben jährlichen Provisionsgewinne entspricht, wie die Annuität R.

Mit Hilfe der Relation

$$m = \frac{lg\, R_1 - lg\, [R_1 - A \cdot (v-1)]}{lg\, v_1}$$

gelangt man zum Werthe der entsprechenden Tilgungsfrist m, welche, nachd Zinsfuss bekannt ist, die Lösung der Aufgabe involvirt.

Es ist uns gelungen, bei zwei verschiedenen Zinsfussgrundlagen die T eines gleich grossen Darlehens derart durchzuführen, dass die jährlichen Prov gewinne vollständig gleich sind. Dass nun einer der flüssig werdenden Prov gewinne während einer längeren Tilgungsfrist, als der andere fortbesteht, beda keines Beweises, da infolge der Ungleichheit der Annuitäten auch die Tilgung unterschiedliche sind. Es werden demgemäss die jährlichen Provisionsgewinn gleich sein, deren Gesammtwerth jedoch im Verhältnisse der Tilgungsfristen di

Infolge dessen erübrigt noch, Annuität und Tilgungsfrist für den herabge Darlehenszinsfuss derart zu bestimmen, dass der Gesammtwerth der diesbezü Provisionsgewinne mit dem der ursprünglichen übereinstimmt, wozu die Form nöthige Handhabe bietet.

ne technische Basis für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung.

II

Die bisherigen diesbezüglichen Auseinandersetzungen führten zu dem Schlusse, s beim Menschen in der Jugend bei ausreichender Lebenskraft ein verhältnmässig geringerer Grad von Lebenszähigkeit herrscht, hingegen im Alter einer bedeutend entwickelten Lebenszähigkeit, ein unzureichendes Maass von enskraft vorhanden ist, welch' letzterer Zustand die Invalidität desselben hervor-. Die Ursache der zunehmenden Lebenszähigkeit ist hauptsächlich darin zu hen, dass der Mensch gegen die Folgen von Unbill und Strapazen durch die Genheit immer widerstandsfähiger wird; und zwar insolange, als die Lebenskraft, n stetige Abnahme im Naturgesetze selbst liegt, hinreicht, diese Widerstandsgkeit zur Geltung kommen zu lassen. Es ist somit ein gewisses Verhältniss chen Lebenskraft und Lebenszähigkeit nöthig, schon um der blossen Lebensngung zu genügen. Die eventuelle überschüssige Lebenskraft, welche ohne Ueberengung des Menschen bis zu dessen Müdigkeit frei wird, bezeichnet die Validität schaffende Leistungsfähigkeit desselben.

Während der Pubertät des Menschen trägt die angeborene Lebenszähigkeit zum hsthum der Lebenskraft bei, was bis zu einem gewissen Lebensalter anhält. eich mit diesem aber geht ein ähnlicher Process wieder im umgekehrten Sinne ich, indem die freie Lebenskraft bei ihrem Verbrauche zum Theile wieder in nszähigkeit umgesetzt wird, und infolge dessen, im selben Maasse als diese mmt, auch die Abnahme der Lebenskraft erfolgt. So lange also die aus der angen Lebenszähigheit entwickelte Lebenskraft die im umgekehrten Processe verhte übersteigt, lässt sich ein Wachsthum derselben constatiren, u. zw. umso- als bei der Entwicklungsperiode die freie Lebenskraft zur Entwicklung beitragen und hievon blos ein verhältnissmässig geringer Theil in Lebenszähigkeit setzt wird. Man kann daher in dem Verhältniss zwischen Lebenskraft und nszähigkeit den relativen Grad der physischen Lebensenergie erblicken und es omit die entsprechende Relation.

$$E = \frac{K}{Z}$$

E die Lebensenergie, K die Lebenskraft und Z die Lebenszähigkeit bezeichnet, r Differenz, welche sich zwischen den ferneren Lebenswahrscheinlichkeiten einer x iner $x + 1$ jährigen Person ergibt, ist die relative Höhe der vorhandenen Lebensausgedrückt; wogegen in der Differenz zwischen der wahrscheinlichen Gesammtdauer einer $x + 1$ und einer $x$jährigen Person sich die relative Lebenszähigkundgibt. Demgemäss ergibt sich die Form

$$\frac{w_x - w_{x+1}}{W_{x+1} - W_x} = \frac{K}{Z}$$

w die wahrscheinliche fernere und W die wahrscheinliche gesammte Lebensdarstellt. Es ist z. B. bei einem 18jährigen Menschen die fernere wahrscheinLebensdauer $w_{18} = 42{\cdot}37112$, bei einem 19jährigen müsste dieselbe daher $w_{18} - 1 = 41{\cdot}37112$ betragen, weil dieser bereits ein weiteres Jahr seines

Lebens zurückgelegt hat, d. h. die für das entsprechende Lebensjahr nöthige Le kraft verbraucht hat. Nun ist aber die fernere wahrscheinliche Lebensdauer 19jährigen Menschen $w_{19} = 41\cdot67567$, also um 0·30455 Jahre mehr; demnach derselbe im Laufe seines 19. Lebensjahres mit Hilfe seiner Lebenszähigkeit soviel an Lebenskraft erspart, als er zum Leben während einer Dauer von 0·3 Jahren nöthig gehabt hätte. Im Laufe des zurückgelegten Jahres war daher Verältniss der verbrauchten Lebenskraft zur Lebenszähigkeit $K : Z = 0\cdot69545 : 0\cdot3$

Von der innerhalb eines gewissen Zeitraumes verbrauchten Lebenskraft ist blos ein gewisser Theil durch die Lebensbedingungen gebunden worden; der hievon ist freie verfügbare, welche ebenso wie die gebundene im Nährprocesse relativen Ersatz findet. Um aber allen Lebensfunctionen in vollem Maasse entspr zu können, muss durch die Lebensbedingung mindestens soviel Lebenskraft gebu sein, als Lebenszähigkeit dem Menschen innewohnt und kann man daher in e solchen Lebensstadium, in welchem das Verhältniss zwischen Lebenskraft und Le zähigkeit $K : Z = 1$ ist, die Grenze zwischen Validität und Invalidität erbli Erreicht der Grad der Lebenskraft denjenigen der Lebenszähigkeit nicht meh wird der Lebensbedingung nicht mehr vollständig entsprochen, wodurch die Le functionen in ihrer Leistungsfähigkeit derart beeinflusst werden, dass ein succe Abnehmen derselben sich äusserst. Der Mensch lebt, aber die Kraft seiner Le functionen nimmt in demselben Verhältnisse ab, als die Lebenszähigkeit die Le kraft übersteigt; d. h. er lebt in Folge seiner Lebenszähigkeit so lange, als no vorhandene Lebenskraft hinreicht, dieselbe zur Geltung kommen zu lassen. Ist bei einem Menschen die Lebensenergie E grösser als 1, so besitzt derselbe noch Lebenskraft genug, um im Verhältnisse zu derselben in der Lage zu sein, eine A zu verrichten, ohne seiner Leistungsfähigkeit Gewalt anzuthun. Für $E = 1$ be derselbe ebensoviel Lebenskraft, als zur Förderung seiner Lebensfunctionen nöthi und endlich bei E kleiner als 1, reicht die Lebenskraft kaum mehr aus, um Lebensbedingungen zu entsprechen. Die Lebensenergie $E_1 = 1$ ist also diejenig welcher das Vorhandensein einer freien Lebenskraft, welche zur Verrichtung physischen Arbeit nöthig ist, nicht mehr constatirt werden kann. In dem Ausd

$$3) \qquad E - E_1 = \frac{K}{Z} - 1 = \Sigma$$

äussert sich daher der relative Grad der frei verfügbaren Lebensenergie Σ, w mit der Lebenszähigkeit multiplicirt, den relativen Grad der activen körperl Widerstandsfähigkeit (Resistenz) R, welche innerhalb eines entsprechenden Le jahres in Anspruch genommen werden kann, darstellt. Es ist somit die Relation

$$4) \qquad K - Z = \Sigma \,.\, Z = R$$

massgebend. Da sich nun die Summe der Lebenskraft und Lebenszähigkeit K + welche sich während gleich grossen Lebensintervallen äussert, vollständig gleich und durch das Verhältniss des Wiederstandsfähigkeits-Factors R zu dieser Su die relative freie Lebenskraft ausgedrückt ist, so ergeben sich aus dem Verhält $K : Z = a : b$ die Proportionen $K - Z : Z = a - b : b$ und $K + Z : Z = a +$ durch deren Verbindung die Relation

$$\frac{K - Z}{K + Z} = \frac{a - b}{a + b} = k$$

ingt, welche schliesslich in Folge des Umstandes, dass die Summe der beiden tnisszahlen a und b für ganze Jahresintervalle durch die Gleichung $a + b = 1$ rückt ist, den relativen Werth der freien Lebenskraft $k = a - b$ liefert.

m Nachfolgendem sei eine diesbezügliche Tabelle zur Darstellung gebracht.

Tabelle

der Arbeitsfähigkeit des Menschen in den einzelnen Lebensstadien

(auf Grundlage der Sterblichkeitstafel der 17 englischen Gesellschaften).

Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Mittlere Lebenskraft-Verhältnisszahl a	Mittleres wahrscheinlich zu erreichendes Lebensalter W_x	Mittlere Lebenszähigkeits-Verhältnisszahl b	Mittlere Lebensenergie E (Einheit $E_1 = 1$)	Mittlere Verhältnisszahl der frei verfügbaren Lebenskraft k
42·37112	0·69545	60·37112	0·30455	2·28353	+0·39090
41·67567	0·69749	60·67567	0·30251	2·30567	+0·39498
40·97818	0·69904	60·97818	0·30096	2·32267	+0·39808
40·27914	0·70066	61·27914	0·29934	2·34068	+0·40132
39·57848	0·70236	61·57848	0·29764	2·35976	+0·40472
38·87612	0·70368	61·87612	0·29632	2·37473	+0·40736
38·17244	0·70512	62·17244	0·29488	2·39114	+0·41024
37·46732	0·70660	62·46732	0·29340	2·40832	+0·41320
36·76072	0·70778	62·76072	0·29222	2·42208	+0·41556
36·05294	0·70904	63·05294	0·29096	2·43690	+0·41808
35·34390	0·70996	63·34390	0·29004	2·44780	+0·41992
34·63394	0·71103	63·63394	0·28897	2·46056	+0·42206
33·92291	0·71176	63·92291	0·28824	2·46933	+0·42352
33·21115	0·71265	64·21115	0·28735	2·48007	+0·42530
32·49850	0·71324	64·49850	0·28676	2·48724	+0·42648
31·78526	0·71395	64·78526	0·28605	2·49589	+0·42790
31·07131	0·71480	65·07131	0·28520	2·50631	+0·42960
30·35651	0·71319	65·35651	0·28681	2·48663	+0·42638
29·64332	0·71216	65·64332	0·28784	2·47415	+0·42432
28·93116	0·71383	65·93116	0·28617	2·49443	+0·42766
28·21733	0·71565	66·21733	0·28435	2·51680	+0·43130
27·50168	0·71751	66·50168	0·28249	2·53995	+0·43506
26·78417	0·71956	66·78417	0·28044	2·56582	+0·43912
26·06461	0·72044	67·06461	0·27956	2·57705	+0·44088
25·34417	0·72088	67·34417	0·27912	2·58269	+0·44176
24·62329	0·71979	67·62329	0·28021	2·56875	+0·43958
23·90350	0·71718	67·90350	0·28282	2·53582	+0·43436
23·18642	0·71335	68·18642	0·28665	2·48857	+0·42670
22·47307	0·70772	68·47307	0·29228	2·42138	+0·41544
21·76535	0·70179	68·76535	0·29821	2·35324	+0·40358
21·06356	0·69530	69·06356	0·30470	2·28192	+0·39060
20·36826	0·68854	69·36826	0·31146	2·21069	+0·37708
19·67972	0·68126	69·67972	0·31874	2·13735	+0·36252
18·99846	0·67320	69·99846	0·32680	2·06000	+0·34640
18·32526	0·66534	70·32526	0·33446	1·98930	+0·33088
17·65992	0·65626	70·65992	0·34374	1·90917	+0·31252

Lebensalter	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Mittlere Lebenskraft-Verhältnisszahl a	Mittleres, wahrscheinlich zu erreichendes Lebensalter W_x	Mittlere Lebenszähigkeits-Verhältnisszahl b	Mittlere Lebensenergie E (Einheit $E_1=1$)	Mitt… Verhä… zahl d… verfüg… Leben…
54	17·00366	0·64744	71·00366	0·35256	1·83640	+0·
55	16·35622	0·63878	71·35622	0·36122	1·76840	+0·
56	15·71744	0·62791	71·71744	0·37209	1·68739	+0·
57	15·08953	0·61817	72·08953	0·38183	1·61897	+0·
58	14·47136	0·60851	72·47136	0·39149	1·55434	+0
59	13·86285	0·59633	72·86285	0·40367	1·47727	+0·
60	13·26652	0·58495	73·26652	0·41505	1·40935	+0·
61	12·68157	0·57249	73·68157	0·42751	1·33913	+0·
62	12·10908	0·55925	74·10908	0·44075	1·26886	+0·
63	11·54983	0·54577	74·54983	0·45423	1·20153	+0
64	11·00406	0·53162	75·00406	0·46838	1·13502	+0·
65	10·47244	0·51708	75·47244	0·48292	1·07074	+0·
66	9·95536	0·50229	75·95536	0·49771	1·00920	+0·
67	9·45307	0·48640	76·45307	0·51360	0·94704	—0·
68	8·96667	0·47244	76·96667	0·52756	0·89552	—0·
69	8·49423	0·45698	77·49423	0·54302	0·84155	—0·
70	8·03725	0·44187	78·03725	0·55813	0·79169	—0·
71	7·59538	0·42692	78·59538	0·57308	0·74496	—0·
72	7·16846	0·41078	79·16846	0·58922	0·69716	—0·
73	6·75768	0·39526	79·75768	0·60474	0·65351	—0·
74	6·36242	0·38275	80·36242	0·61725	0·62009	—0·
75	5·97967	0·36793	80·97967	0·63207	0·58210	—0·
76	5·61174	0·35437	81·61174	0·64563	0·54887	—0·
77	5·25737	0·34035	82·25737	0·65965	0·51595	—0·
78	4·91692	0·32668	82·91692	0·67332	0·48517	—0·
79	4·59024	0·31372	83·59024	0·68628	0·45713	—0·
80	4·27652	0·30147	84·27652	0·69853	0·43158	—0·
81	3·97505	0·29029	84·97505	0·70971	0·40903	—0·
82	3·68476	0·28178	85·68476	0·71822	0·39233	—0·
83	3·40298	0·27358	86·40208	0·72642	0·37661	—0·
84	3·12940	0·26748	87·12940	0.73252	0·36515	—0·
85	2·86192	0·26159	87·86192	0·73841	0·35426	—0·
86	2·60033	0·25595	88·60033	0·74405	0·34400	—0·
87	2·34438	0.25057	89·34438	0·74943	0·33435	—0·
88	2·09381	0·24381	90·09381	0·75619	0·32242	—0·
89	1·85000	0·23590	90·85000	0·76410	0·30873	—0·
90	1·61410	0·22733	91·61410	0·77267	0·29421	—0·
91	1·38677	0·21667	92·38677	0.78333	0·27660	—0·
92	1·17010	0·20490	93·17010	0·79510	0·25770	—0·
93	0·96520	0·18259	93·96520	0·81741	0·22337	—0·
94	0·78261	0·16461	94·78261	0·83539	0·19704	—0·
95	0·61800	0·13151	95·61800	0·86849	0·15142	—0·
96	0·48649	0·10187	96·48649	0·89813	0·11342	—0·
97	0·38462	0·10462	97·38462	0·89538	0·11684	—0·
98	0·25000	0·10000	98·25000	0·90000	0·11111	—0·

Dr. Ludwig Grossmann's

chnische Basis für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung.

III

Nachdem in der vorigen Abhandlung die Grundlage für die Beurtheilung der
ttleren körperlichen Leistungsfähigkeit des Menschen während der einzelnen Lebens-
dien ermittelt wurde, so wird es nicht schwer sein, nunmehr die weiteren Con-
sionen aus den gewonnenen jeweiligen Resultaten zu schöpfen, welche diese
stungsfähigkeit von den verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten und dieselbe
rissermassen einer mathematisch-physiologischen Theorie unterordnen. Bevor jedoch
dieser Beziehung ein weiterer Schritt zur endgiltigen Lösung der vorliegenden
gabe unternommen wird, mögen die an der tabellarischen Zusammenstellung
achten Beobachtungen eine entsprechende Würdigung erfahren. Es ergibt sich
lich aus den ermittelten Verhältnisszahlen der Lebensenergie einerseits und den-
gen der frei verfügbaren Lebenskraft andererseits der interessante Schluss, dass
Grad der Lebensfähigkeit des Menschen in drei verschiedenen Lebensintervallen
nders zum Ausdruck kommt. Wenn man nämlich von der sich bei der Geburt
ernden verschiedenartigen Lebensfähigkeit des Menschen und seiner Sterblichkeit
rend der ersten Entwicklungsjahre bis zum Jünglingsalter absieht, so findet man,
sich bis zu einem gewissen Alter ein relativer Wachsthum der mittleren Lebens-
gie kundgibt, welcher jedoch zwischen dem 34. und 38. Lebensjahre eine Unter-
hung erleidet, um von da ab wieder einen fast regelmässigen Verlauf bis zum
r von 42 6 Jahren zu nehmen, in welchem die Lebensenergie bekanntlich ihren
minationspunkt erreicht. Diese Unterbrechung scheint der übermässig verschwendeten
ndkraft eines gewissen Percentsatzes von Individuen zu entspringen, durch deren
essives Ableben derjenige Einfluss schwindet, welchen die verwirkte Lebensfähigkeit
elben auf die durchschnittliche Beschaffenheit des Menschenmateriales ausübt.
ähnlicher Process vollzieht sich ferner zwischjen dem 60. und 70. Lebensjahre,
abermals eine Lichtung durch das Ableben derenigen Individuen erfolgt, welche
equent das Niveau ihrer frei verfügbaren Lebenskraft überschritten haben und
diese Weise ihre Lebensdauer verkürzten, indem sie wohl genügende Lebenszähig-
erlangten, diese jedoch infolge des übermässigen Verbrauches ihrer Lebenskraft
t mehr in der Lage sind, zur Geltung hommen zu lassen. Der Factor, in welchem
Erscheinung zum Ausdruck gelangt, äussert sich ausschliesslich in einer auf-
nd raschen Abnahme der Lebensenergie während des genannten Lebensintervalles,
uf abermals ein regelmässiger Verlauf derselben platzgreift. Hingegen wird durch
elben die Sterblichkeit nur im geringen Maasse tangirt. Die dritte und letzte
ode ist diejenige vom 80. Lebensjahre bis zur äussersten Altersgrenze, in welcher
Mensch von der angesammelten Lebenszähigkeit und der ersparten Lebenskraft
t. Hier kann man gewissermassen den abnehmend labilen Zustand beobachten,
elchem das Leben des Menschen in diesem Alter sich befindet. Diejenigen Per-
n, welche dieses Alter überleben, müssen mit ganz besonderer Gesundheit und
iger Constitution ausgestattet sein. Es nimmt demnach mit jedem weiteren

Lebensjahre derjenige Einfluss ab, welchen der rapide Verfall der Kräfte bei einzeln Individuen auf die durchschnittliche Beschaffenheit der betreffenden Altersclasse au übt. Die mittlere Invalidität, welche im 81. Lebensjahre ihren Höhepunkt erreic hat, nimmt einen retrograden Verlauf, indem sie sich der Validitätsgrenze wied nähert, natürlicherweise ohne dieselbe zu erreichen.

Es ist nun bekannt, dass die Lebensenergie E durch das Verhältniss der Leben kraft zur Lebenszähigkeit zum Ausdruck gelangt, und zwar ist

$$1) \qquad E = \frac{K}{Z}$$

Da sich nun die Lebenszähigkeit Z auf Kosten der Lebenskraft K vergrösse und die Letztere wieder durch den Nährprocess Ersatz finden muss, so wird in de jenigen Falle, wo das disponible Maass der frei verfügbaren Lebenskraft durch all grossen Verbrauch überschritten wird, wohl nur eine theilweise Ergänzung derselb stattfinden können, weil durch jene Ueberschreitung, dem Körper die für seine Leben functionen nöthige Kraft entzogen wird. Es wird somit in der Form 1) einerseits Lebenskraft K kleiner, andererseits die Lebenszähigkeit Z grösser, wodurch Quotient der Beiden, die Lebensenergie, in doppelter Beziehung eine Abnahme leiden muss.

Bekanntlich wurde ferner mit $E_1 = 1$ diejenige Energie bezeichnet, wel nothwendig ist, um den nackten Lebensfunctionen voll und ganz zu entspre Solange also $K > Z$ ist, wird der Mensch eine frei verfügbare Lebenskraft besit Wird jedoch $K < Z$ dann tritt offenbar je nach der Höhe der Differenz zwisch Z und K ein geringerer oder grösserer Grad von Invalidität ein. Die äusserste Gre derselben ist der Tod und muss daher auch ein gewisses Verhältniss zwisch K und Z stattfinden, welches diesem höchsten Grade von Invalidität entspri Dieser Bedingung wird nun durch die Relation

$$K = 0$$

Genüge geleistet, derzufolge auch die Form 1) in diejenige von

$$E = 0$$

übergeht. In jener tabellarischen Zusammenstellung ist nun bei den Verhältnisszahl der mittleren Lebensenergie E das Verhältniss zwischen K und Z bei sämmtlich Lebenden der betreffenden Altersclasse in Betracht gezogen, also auch bei denjenig deren Lebenskraft sich bereits der Minimalgrenze nähert, dieselbe jedoch noch ni erreicht hat. Solange also die Lebensenergie

$$E > 0$$

ist, wird das Individuum noch leben, also auf die mittlere Beschaffenheit sein Alterclasse einen actuellen Einfluss üben. Je mehr solcher Individuen einer Alte classe angehören, desto mehr wird dieser Einfluss zur Geltung kommen. Natürli gilt dies blos mit Bezug auf diejenigen Personen, welche an Marasmus sterben; be solchen, deren Tod in der besten Lebenskraft infolge einer Störung der Leben functionen eintritt, erfolgt ein rasches Schwinden derselben bis zur Erschöpfung.

Die Aufzehrung der Lebenskraft geht also nicht bei allen Menschen in gleich Weise vor sich, und sind auch nicht alle Menschen mit einer gleich grossen Quant

derselben ausgestattet. Daraus geht hervor, dass man aus den angeführten Verhältnisszahlen nie auf die körperliche Leistungsfähigkeit eines einzelnen Individuums schliessen kann, sondern in derselben blos das durchschnittlishe Maass der Rüstigkeit der entsprechenden Altersclasse erblicken kann.

Nach der in der vorigen Abhandlung dargestellten Tabelle wird also die frei verfügbare Lebenskraft bis zum durchschnittlichen Alter von 42·6 Jahren im Steigen und von diesem Zeitpunkte wieder im Abnehmen begriffen sein. Zwischen dem Alter von 66 und 67 Jahren verschwindet dieselbe vollständig, um sodann negativ zuzunehmen, worin ein wachsender Mangel der für die nackten Lebensbedingungen nöthigen Lebenskraft sich äussert. Es tritt somit im Durchschnittsalter von etwa 67 Jahren die Invalidität des Menschen ein.

Im Producte der Lebensenergie E und der Verhältnisszahl k der frei verfügbaren Lebenskraft, gelangt nun der relative Grad der Validität des Menschen zum Ausdruck.

Es ist somit

$$V = k \,.\, E = \frac{K}{Z} \cdot \frac{K - Z}{K + Z}.$$

der Werth des Validitätscoëficienten V, welcher in den einzelnen Lebensstadien die relative Höhe der durchschnittlichen oder mittleren Validität bezeichnet.

Dieselbe lässt sich aber auch durch die körperliche Widerstandsfähigkeit oder (Resistenz) R zum Ausdruck bringen. Wenn man nämlich der für Jahresintervalle entsprechenden Relation $a + b = 1$ gemäss, auch $K + Z = C$ setzt, was offenbar ganz berechtigt ist, insoferne C als unbestimmte Constante betrachtet wird, so ergibt sich der interessante Schluss, dass im Allgemeinen für gleiche Lebensintervalle das Product der Lebenszähigkeit Z und der Summe der entsprechenden Gesammtenergie mit derjenigen, die zur blossen Erhaltung der vollen Lebensfunctionen nöthig ist, während der ganzen Lebensdauer constant bleibt. Es ist nämlich

$$K + Z = Z\left(\frac{K}{Z} + 1\right) = C$$

und da bekanntlich $E = K : Z$ und $E_1 = 1$ ist, so wird offenbar auch

$$Z\,(E + E_1) = C$$

Nun entspricht aber die Resistenz R dem Werthe

$$R = Z\,(E - E_1) = Z \,.\, \Sigma$$

und ergibt sich somit durch Division der Formen 3) und 4) die Relation

$$\frac{E - E_1}{E + E_1} = \frac{R}{C}$$

welche in Folge ihrer Identität mit dem Ausdrucke der Verhältnisszahl der frei verfügbaren Lebenskraft

$$\frac{E - E_1}{E + E_1} = \frac{K - Z}{K + Z} = k$$

zu dem Resultate gelangen lässt, dass die frei verfügbare Lebenskraft der entsprechenden körperlichen Widerstandsfähigkeit proportional ist.

Es gilt somit auch die Form 6) $V = \frac{R}{C} \cdot E$ und man kann demge gende Relationen aufstellen:

1. Der Validitätscoëfficient V ist das Produ Lebensenergie E und der Verhältnisszahl k de verfügbaren Lebenskraft.

2. Der Validitätscoëfficient V ist das Produ Lebensenergie E und der körperlichen Widerst fähigkeit (Resistenz) R, dividirt durch die für gl Lebensintervalle constante Summe der Lebens keit Z und Lebenskraft K.

3. Die mittleren Validitäten in den einzelnen L stadien verhalten sich zu einander wie die Pro der entsprechenden Lebensenergien und frei v baren Lebenskräfte oder auch wie die Product entsprechenden Lebensenergien und körperl Widerstandsfähigkeiten.

Im Nachfolgenden sei eine diesbezügliche Tabelle zur Darstellung gebr

Tabelle

der Validität des Menschen in den einzelnen Lebensstadien

(auf Grundlage der Sterblichkeitstafel der 17 englischen Gesellschaften).

Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E \cdot k$	Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E \cdot k$	Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E \cdot k$	Lebensalter x	Mi Vali Coë $V_x =$
18	+0·89263	39	+1·10503	59	+0·28461	79	—0
19	+0·91069	40	+1·12670	60	+0·23957	80	—0
20	+0·92461	41	+1·13617	61	+0·19415	81	—0
21	+0·93936	42	+1·14093	62	+0·15037	82	—0
22	+0·95504	43	+1·12917	63	+0·11000	83	—0·
23	+0·96737	44	+1·10146	64	+0·07178	84	—0·
24	+0·98094	45	+1·06187	65	+0·03658	85	—0·
25	+0·99512	46	+1·00594	66	+0·00462	86	—0·
26	+1·00652	47	+0·94972	67	—0·02576	87	—0·
27	+1·01882	48	+0·89132	68	—0·04936	88	—0·
28	+1·02788	49	+0·83361	69	—0·07241	89	—0·
29	+1·03850	50	+0·77483	70	—0·09204	90	—0·
30	+1·04581	51	+0·70358	71	—0·10888	91	—0·
31	+1·05477	52	+0·65822	72	—0·12440	92	—0·
32	+1·06076	53	+0·59665	73	—0·13690	93	—0·
33	+1·06799	54	+0·54152	74	—0·14541	94	—0·
34	+1·07671	55	+0·49084	75	—0·15376	95	—0·
35	+1·06024	56	+0·43167	76	—0·15986	96	—0·
36	+1·04983	57	+0·38263	77	—0·16474	97	—0·
37	+1·06677	58	+0·33732	78	—0·16818	98	—0·
38	*+1·08550*						

trachtungen über die Correlation zwischen Zinsfuss und Tilungsfrist bei Boden- und Hypothekar-Darlehen.

III.

Aus den bisherigen diesbezüglichen Erörterungen ging hervor, dass mit der ten Herabsetzung sowohl des Darlehenszinsfusses als auch der Pfandbrief-Ver- ng für den Fall als die jährlichen Provisionsgewinne unverändert bleiben sollen, lgungsfrist eine kleinere werden muss, da bei gleichbleibendem Provisionspercent ifferenz zwischen der bei Zugrundelegung des Darlehenszinsfusses einerseits und rundlage des Pfandbriefzinsfusses andererseits sich ergebenden Annuität, mit ilgungsfrist im gleichen Verhältnisse zunimmt. Da man nun in dieser Differenz, e sich während der ganzen Tilgungsdauer gleich bleibt, den jährlich entfallenden isionsgewinn erblicken kann, welcher somit bei höherer Verzinsungsgrundlage ein erer ist, so wird bei einer Zinsfussherabsetzung ein Zuwachs desselben sich en, folglich die Tilgungsfrist eine Kürzung erheischen, wenn den gestellten derungen genügt und der jährliche Provisionsgewinn wieder auf die ursprüng- Höhe gebracht werden soll. Man kann daher folgenden Satz aufstellen:

Soll eine Herabsetzung des Zinsfusses beim Boden- und othekar-Credit ohne Veränderung der Differenz zwischen bezüglichen Darlehens- und Pfandbrief-Verzinsung mit der ngung durchgeführt werden, dass die jährlich flüssig denden Provisionsgewinne die ursprünglichen nicht steigen, so muss auch eine entsprechende Kürzung der gungsfrist erfolgen, welche den durch Herabsetzung Zinsfusses hervorgebrachten Zuwachs der jährlichen visionsgewinne verhindert, wodurch selbstverständ- der Gesammtbetrag der Provision geschmälert wird, da olge der kürzeren Tilgungsfrist auch eine geringere Anzahl jährlichen Provisionsquoten sich ergibt.

Es frägt sich nun ferner, unter welchen Umständen wird eine Herabsetzung Zinsfusses bei unveränderter Differenz zwischen der Darlehens- und Pfandbrief- nsung stattfinden können, wenn ohne Rücksicht auf die Höhe der jährlichen isionsgewinne der Gesammtertrag derselben mit dem ursprünglichen überein- men soll. Zur Beantwortung dieser Frage mögen folgende Auseinandersetzungen n:

Wird der ursprüngliche Darlehenszinsfuss mit P %, hingegen der herabgesetzte Q % ausgedrückt, die beziehungsweisen Pfandbriefverzinsungen dementsprechend $P - 1$ % und $Q - 1$ % erfolgen; d. h. in beiden Fällen 1 % als Provisions- nn gerechnet wird, so wird zur Tilgung eines mit P % verzinsten Darlehens von lden innerhalb einer bestimmten Tilgungsfrist von n Jahren die Annuität

$$R = \frac{A \cdot u_1^n (u_1 - 1)}{u_1^n - 1} \quad , \quad u_1 = 1 + \frac{P}{100}$$

g sein. Zur Tilgung des gleichen Darlehens innerhalb derselben Tilgungsfrist

jedoch auf Grundlage der Pfandbriefverzinsung von $P - 1$ %, wird sich die A

$$2) \qquad R_1 = \frac{A\ u^n\ .\ (u-1)}{u^n - 1} \quad , \quad u = 1 + \frac{P-1}{100}$$

ergeben. Da nun die Tilgung des Capitales von Seite des Institutes auf Gr des Pfandbriefzinsfusses erfolgt, so wird in der Differenz zwischen den An R und R_1 der jährlich flüssig werdende während der ganzen Tilgungsfrist sich bleibende Provisionsgewinn g liegen; somit ist

$$3) \qquad g = R - R_1 = A\left(\frac{u_1^n\ (u_1 - 1)}{u_1^n - 1} - \frac{u^n\ (u-1)}{u^n - 1}\right)$$

der Werth des jährlichen Provisionsgewinnes; und infolge dessen der Ert Gesammtprovision auf Grundlage des Pfandbriefzinsfusses fructificirt, zur Z vollzogenen Tilgung

$$4) \qquad K_n = g\ .\ \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

Für den herabgesetzten Zinsfuss Q ergeben sich nun die analogen jedoch wird, falls der Ertrag der Gesammtprovision mit Rücksicht auf seine günstige Fructificirung unverändert bleiben soll, die Tilgungsfrist eine Verä erleiden müssen und mag dieselbe als unbestimmt mit x bezeichnet werden.

Es ist demgemäss

$$5) \qquad \left\{\begin{aligned} R' &= \frac{A\ v_1^x\ (v_1 - 1)}{v_1^x - 1} \quad , \quad v_1 = 1 + \frac{Q}{100} \\ R'_1 &= \frac{A\ v^x\ (v-1)}{v^x - 1} \quad , \quad v = 1 + \frac{Q-1}{100} \\ g' &= A\left(\frac{v_1^x\ (v_1 - 1)}{v_1^x - 1} - \frac{v^x\ (v-1)}{v^x - 1}\right) \\ K'_x &= g'\ .\ \frac{v^x - 1}{v - 1} \end{aligned}\right.$$

Soll nun der Ertrag der Gesammtprovision im letzteren Falle währen gleich grossen Zeitraumes dieselbe Höhe erreichen wie im ersteren, dann muss die Bedingung

$$6) \qquad K_n = K'_n$$

erfüllt werden, d. h. die Werthe der beiden Gesammtprovisionen für den Ze des $n$ten Tilgungsjahres ermittelt, müssen einander gleich sein, und da h Relation

$$7) \qquad K'_n = K'_x\ w^{n-x} \quad , \quad w = 1 + \frac{D}{100}$$

gilt, d. h. der bei herabgesetztem Darlehenszinsfusse sich ergebende Werth sammtprovision nach vollzogener Tilgung, also nach dem $x$ten Tilgungsjahre, tirt auf den Zeitpunkt des vollendeten $n$ten Tilgungsjahres, gleich sein mu Ertrage der Gesammtprovision nach vollzogener Tilgung beim ursprüngliche lehenszinsfusse, so ergibt sich der interessante Schluss:

$$8) \qquad K_n\ w^{-n} = K'_x\ w^{-x}$$

welcher, mit Worten ausgedrückt, Folgendes bedeutet: Die Werthe der Ge

visionen zur Zeit der jeweilig vollzogenen Tilgung auf den beziehungsweisen Zeit-unkt der Darlehenscontrahirung mit dem Zinsfusse von D % discontirt, müssen nander gleich sein.

In Folge dessen ergibt sich, wenn man für K_n und K'_x die entsprechenden Werthe bstituirt, die homogene Form:

$$g\frac{u^n-1}{u-1}\cdot w^{-n} = g'\cdot\frac{v^x-1}{v-1}\cdot w^{-x}$$

welcher sowohl g' als auch x unbekannt sind. Da sich jedoch g' durch eine der eichungen 5) ausdrücken lässt, in welcher ebenfalls x als zweite Unbekannte scheint, so lässt sich hieraus g' eliminiren und erhält man

$$g\cdot\frac{u^n-1}{u-1}\,w^{-n} = A\,.\,w^{-x}\,.\,\frac{v^x-1}{v-1}\left(\frac{v_1^x\,(v_1-1)}{v_1^x-1}-\frac{v^x\,.\,(v-1)}{v^x-1}\right)$$

spective den transcendenten Ausdruck

$$w^{x-n}\,.\,\frac{g}{A}\cdot\frac{u^n-1}{u-1}-v_1^x\cdot\frac{v^x-1}{v_1^x-1}\cdot\frac{v_1-1}{v-1}+v^x=0$$

s Resultat, dessen Lösung mit Hilfe der Ersatzgleichung

$$x=\underset{m>n}{\mathrm{E}}\left[\frac{lg\left(\frac{v_1^m-1}{v^m-1}\cdot\frac{v-1}{v_1-1}\cdot\left[v^m+\frac{g}{A}\cdot\frac{u^n-1}{u-1}\cdot w^{m-n}\right]\right)}{lg\,v_1}\right]$$

rchführbar ist, in welcher m den Näherungswerth von x bezeichnet. Nachdem nun it Hilfe dieser Form die für den herabgesetzten Darlehenszinsfuss entsprechend änderte Tilgungsfrist allgemein ermittelt ist, so lässt sich mit Hilfe der Ersten r Gleichungen 5) die bezügliche rechnungsmässige Annuität R' bestimmen, welche r Tilgung des Darlehens A bei einer Verzinsung von Q % innerhalb dieser rist nöthig ist. In Betreff der veränderten Modalitäten, unter welchen bei einer erabsetzung des Zinsfusses von P auf Q % die Tilgung erfolgt, lassen sich daher lgende Betrachtungen anstellen:

a) *Sollen die Baarwerthe der gesammten Provisions-ewinne, auf den Zeitpunkt der jeweiligen Darlehenscontra-irung ermittelt, bei zwei verschiedenen Verzinsungsgrund-agen die gleichen sein, so müssen, falls die Differenz zwischen em beziehungsweisen Darlehens- und Pfandbriefzinsfusse n beiden Fällen dieselbe bleiben soll, die Tilgungsfristen m umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden Verzin-ungen sich befinden.*

Da also bei herabgesetztem Zinsfusse die Tilgungsfrist eine längere wird, so müssen infolge dessen auch die jährlichen Provisionsgewinne die dem ursprünglichen Zinsfusse entsprechenden übersteigen, u. zw. auf Grund der bekannten Relation.

b) *Die Höhe der jährlichen Provisionsgewinne zweier verschiedener Verzinsungsgrundlagen, bei denen die Differenz zwischen Darlehens- und Pfandbriefzinsfuss die gleiche ist, befindet sich mit den Tilgungsfristen im geraden, mit n Verzinsungen im umgekehrten Verhältnisse.*

Ist nämlich die Gelegenheit für die Verzinsung der Gewinne eine mind
günstige, so müssen offenbar diese grösser sein, um einen Entgang des Ertrages
verhindern, respective denselben mit dem der höheren Verzinsung entsprechend
auf gleichem Niveau zu erhalten.

Zu besserem Verständniss mag folgendes Beispiel dienen.

Ein Capital von fl. 100.000, welches bei einer Verzinsu
von 5·5% durch Ausgabe von $4\frac{1}{2}$ percentigen Pfandbrief
beschafft, also einen jährlichen Provisionsgewinn v
1% liefert, und während einer Dauer von 36 Jahren getil
wird, soll ohne Veränderung des Gesammtertrages b
gleichbleibendem Provisionspercent durch 4 percenti
Pfandbriefe beschafft, also bei einer Darlehensverzi
sung von 5% zur Tilgung gelangen; in welcher Frist u
unter welchen Modalitäten wird dies stattfinden?

Demgemäss ist $P = 5·5\%$, $Q = 5\%$ und somit auch $u_1 = 1·055$, $u = 1·0$
$v_1 = 1·05$ und $v = 1·04$.

ferner $A = 100{,}000$, $R = 6136·60$ und $R_1 = 5692·42$ also $g = 74$
schliesslich $n = 36$.

Die Werthe x, R', R'_1 und g' sind zu ermitteln.

Mit Hilfe der Form 9) ergibt sich für den Fall als der Werth $w = v$
genommen, d. h. $D = 4\%$ gesetzt wird, vor Allem der Werth für

$$x = \underset{m > 36}{E}\left[\frac{lg\left(\frac{(1·05)^m - 1}{(1·04)^m - 1} \cdot \frac{0·04}{0·05} \cdot (1·04)^m \cdot \left[1 + \frac{744·18}{100{,}000} \cdot \frac{(1·045)^{36} - 1}{0·045 \cdot (1·04)^{36}}\right]\right)}{lg\ 1·05}\right]$$

welcher ermittelt, die dem herabgesetzten Darlehenszinsfusse entsprechende
gungsfrist

$$x = 40\tfrac{1}{4}$$

Jahre liefert. Hieraus ergeben sich ferner mit Hilfe der Formen 5) die Werthe

$$R' = 5816·15\ ,\ R'_1 = 5039·42 \text{ und } g' = 776·73$$

als Resultat. Wenn man nun die bei herabgesetztem Darlehenszinsfusse sich jähr
ergebenden Provisionsgewinne g' einerseits und die dem ursprünglichen Verzinsun
modus entsprechenden, g andererseits, nachdem man diese bis zur jeweilig vollende
Tilgung zum respectiven Pfandbriefzinsfusse capitalisirt hat, mit gleichem Perc
satze, welcher hier mit $D = 4\%$ angenommen wurde, auf den beziehungswe
Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung discontirt, so müssen die beiden sich ergeben
Gewinnbaarwerthe vollständig übereinstimmen.

Um daher im vorliegenden Falle den Provisionsertrag bei herabgesetztem Z
fusse mit dem ursprünglichen auf gleicher Höhe zu erhalten, muss die Tilgungs
um $4\frac{1}{4}$ Jahre verlängert werden.

DIE MATHEMATIK

im

ienste der Nationalökonomie

mit Hinweis auf die

allgemeine Integration der linearen Differential-Gleichungen höherer Ordnung

er neuen wissenschaftlichen Errungenschaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik:
t neuen Fundamenten für die Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik im Allgemeinen

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

D[R.] LUDWIG GROSSMANN

haber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

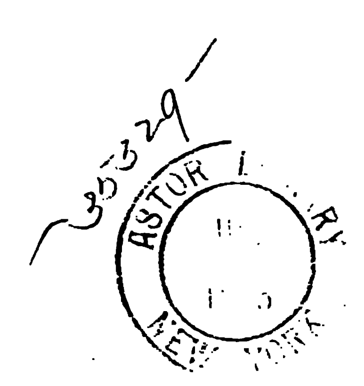
Vierte Lieferung.

WIEN 1889.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sophienbrückenstrasse Nr. 5.

Druck von Josef Bayer & Comp., I, Wollzeile 25.



VORREDE.

Mit dem befriedigenden Bewusstsein, der Ursprünglichkeit in vollem Maasse
chnung getragen zu haben, beschliesse ich in dieser Lieferung den ersten und
ar rein theoretischen Theil meines Werkes, und kann es daher umsoweniger
eck dieser Schrift sein, bekannte, längst beantwortete Fragen in den Bereich
r Untersuchungen zu ziehen, als ich mich im Gegentheile befleisse, ausschliesslich
ue Gesichtspunkte auf allen jenen Gebieten, welche die technischen Grundlagen
r wirthschaftlichen Institutionen betreffen oder mit denselben im Zusammenhange
hen, dem Fachgelehrten vor Augen zu führen, und dieselben in entsprechender
ise vorerst einer wissenschaftlichen Erörterung zu unterziehen.

Erst auf Grundlage dieser, einer öffentlichen wissenschaftlichen Kritik unter-
fenen, und jeder Anfechtung wiederstehenden theoretischen Begründung, unter-
me ich es, der praktischen Behandlung aller hier aufgeworfenen Fragen näher
treten.

Es ist mir eine besondere Genugthuung, dass ich noch vor Abschluss dieser
rift in die Lage kam, in kurzen Umrissen ein Theorem zu veröffentlichen, welches
Errungenschaft meiner wissenschaftlichen Forschung es mir möglich macht, die
hematischen Grundformen des Absterbegesetzes näher zu präcisiren. Diese An-
dung auf concrete Fälle lässt mit Hilfe der hiedurch erreichten, anerkannt
tigen Resultate einen Schluss auf die Beschaffenheit jenes allgemein giltigen
orems ziehen. (Siehe Anhang.)

Bestrebt, in jeder Richtung hin den neuen Anforderungen auf den verschiedenen
swirthschaftlichen Gebieten Rechnung zu tragen, war ich bemüht, sowohl im
k- und Assecuranzwesen als auch in der Finanz- und Staatswissenschaft durch
liche Reflexionen anregend zu wirken, und neben dem wissenschaftlichen Zwecke
h den praktischen zu verfolgen, und glaube ich dieser mir gestellten Aufgabe
h besten Kräften entsprochen zu haben.

Wien, im Mai 1889.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler:

Auf Seite 4, Formel 6) soll es anstatt

$$= \triangle x \cdot \frac{L_{x} + \triangle x}{L_x} + \left(1 + \frac{L_{x+2\triangle x}}{L_x + \triangle x} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_x + \triangle x} \dots\right)$$ richtig lauten:

$$= \triangle x \cdot \frac{L_{x} + \triangle x}{L_x} \cdot \left(1 + \frac{L_{x+2\triangle x}}{L_x + \triangle x} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_x + \triangle x} \dots\right)$$

Auf Seite 16, Zeile 11 von unten soll es richtg lauten: „welche die eigentliche Verzinst Grund von $P^0/_0$ mit anticipativen Zinsen darstellt und sich von der anticipativen Verz deren Form in 1) zum Ausdrucke gelangt, durch den Umstand unterscheidet, dass selben im Gegensatze zu jener scheinbar selbst auch die Zinseszinsen anticipirt werd zwar im fälschlichen Sinne auf n Jahre im Vorhinein. Bei einer P-percentigen der Verzinsung werden nach dieser irrthümlichen Auffassung dem Schuldner vom Darle Vorhinein abgezogen: . . ."

Nachtrag zur Lieferung I.

Auf Seite 46 soll es heissen nach dem Satze: „Hieraus ergibt sich sofort"

anstatt $e^v = \text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x$, richtig: $e^v = \text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x$

Nachtrag zur Lieferung II.

Auf Seite 49, Form 2) soll lauten

anstatt $\frac{b}{a} = q^{198}$, richtig: $\frac{b}{a} = -q^{198}$

Auf Seite 36 Zeile 20 soll es lauten anstatt: „m i t d e m S i n k e n d e s Z i n s f u s s e s richtig: „m i t d e m S i n k e n d e s Z i n s f u s s e s r e l a t i v s t e i g t".

Nachtrag zur Lieferung III.

Auf Seite 38 in der Tabelle soll es anstatt: „Jeweilig fälliger Zinsenbetrag bei 4% Verzi *richtig lauten:* „bei 5% Verzinsung".

Dr. Ludwig Grossmann's

ntersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes.

I.

Wenn man die Beziehungen zwischen der Curve der Lebenden und derjenigen Absterbegesetzes in Betracht zieht, so ergibt sich die interessante Thatsache, s vom Jünglingsalter angefangen, die mittlere Sterblichkeit mit dem zurückegten Lebensalter zunimmt, für die Ueberlebenden jedoch, sich eine relative igerung der zu erreichenden Lebensdauer ergibt, d. h. je älter der Mensch geworden desto grösser ist das wahrscheinlich zu erzielende Lebensalter. Frägt man nun h der Ursache dieser Erscheinung, so liegt die Antwort in dem Umstande, dass Lebenszähigkeit des Menschen einer stetigen Zunahme auf Kosten der verbrauchten enskraft unterworfen ist. Die Letztere geht daher nicht verloren, sondern ist mit en Verbrauch eine gewisse Abhärtung verbunden, welche in dem verhältnissigen Wachsthume der Lebenszähigkeit zum Ausdrucke gelangt. In Folge dessen ibt die Summe der Lebenskraft und Lebenszähigkeit während der ganzen Lebenser eines Individuums eine constante, wobei in dem jeweiligen Verhältnisse der den zu einander, die Lebensenergie des Individuums in den verschiedenen Alterssen sich kundgeben muss; und zwar insoferne, als aus demselben der Grad der schüssigen bis zum Eintritte der Invalidität noch verfügbaren Arbeitskraft zu hen ist, welche insolange constatirt werden kann, als das Maass der Lebenskraft enige der Lebenszähigkeit übersteigt. Hört dies auf der Fall zu sein, so ist die alidität des Menschen eingetreten, wobei aus dem besagten jeweiligen Verhältnisse nn, nur mehr zu ersehen ist, in welchem Maasse den Lebensfunctionen noch in einzelnen Lebensstadien entsprochen wird. Der Mensch ist dann blos im Stande, Leben zu fristen, ohne in der Lage zu sein, seine Kraft bei Vermeidung einer achtheiligung seiner Gesundheit einer Arbeit zuzuwenden oder mit anderen ten, er zehrt an der ersparten Lebenskraft, und zwar insolange, als dieselbe eicht seine Lebenszähigkeit zur Geltung kommen zu lassen. Nun ist es aber die enszähigkeit selbst, welche im Verhältnisse ihres Vorhandenseins die Erschöpfung Lebenskraft verzögert, so dass ein mit einem grösseren Grade von Lebenszähig- ausgestattetes Individium relativ weniger an Lebenskraft benöthigt, als dasjenige, ches einen geringeren Grad derselben besitzt. Daraus resultirt ein bis zu einem issen Zeitpunkte mit dem Alter relativ zunehmendes, also im Verhältnisse der zurückgten Lebensdauer immer grösser werdendes Ersparniss an Lebenskraft, dessen Maxi- bei verschiedenen Individuen in ungleichem Lebensalter erreicht wird, um von da ab ach Massgabe der vorhandenen Lebenszähigkeit rascher oder langsamer zur Aufzehrung elangen. Auf Rechnung dieser Thatsache ist auch die Erscheinung der mit dem ückgelegten Alter steigenden wahrscheinlich zu erreichenden Lebensdauer zu setzen. Je grösser also die Lebenszähigkeit, desto weniger Lebenskraft genügt, um die sfunctionen *des Menschen im Gange* zu erhalten und desto mehr ist derselbe

im Stande, relativ an Lebenskraft zu sparen. Anders verhält es sich jedoch b
arbeitenden Individuum, dessen gesammte Lebenskraft in Action tritt und wel
seine überschüssige Kraft zur Arbeit verwendet, um dieselbe wieder durch den Nä
process zu ersetzen. Hier wird auch die Spannkraft der Lebensfunctionen e
gesteigerte und bedarf der arbeitende Mensch zum Leben allein soviel an Lebensk
als ihm an Lebenszähigkeit zur Verfügung steht, weil die Letztere dann nicht
zur Befriedigung der Lebensfunctionen allein, sondern auch zur Unterstützung
activen Arbeitskraft dienen muss und in Folge dessen durch die Lebensfunctionen so
an Lebenskraft mehr gebunden wird, als denselben durch die Arbeit an Unterstütz
durch die Lebenszähigkeit entzogen wurde. Durch die Arbeit wird nun aber b
Menschen die Lebenszähigheit gefördert, und wird in Folge dessen der arbeite
Mensch einen grösseren Grad derselben erreichen, als der Nichtarbeitende, wel
im Gegensatze zum Ersteren wieder mehr an Lebenskraft zu ersparen in der L
ist, in Folge seiner geringeren Lebenszähigkeit jedoch äusseren Einflüssen m
unterworfen sein, also eine geringere Widerstandsfähigkeit (Resistenz) aufw
wird. Im Zustande der Validität wird daher der Nichtarbeitende mehr an Leb
kraft zu ersparen in der Lage sein, also länger in demselben verweilen, hing
bei eingetreter Invalidität einen rapideren Verfall seiner Kräfte erleiden, als
Arbeitende, welcher wohl in einem früheren Zeitpunkte invalid wird, jedoch in F
seiner entwickelten Lebenszähigkeit in der Lage ist, während seiner Invalidität
weniger Lebenskraft zu haushalten, vorausgesetzt, dass er nicht gezwungen ist,
in diesem Zustande noch zu arbeiten, in Folge dessen den Verbrauch seiner Kräft
steigern und hiedurch deren empfindlichen Verfall herbeizuführen. Während
der nichtarbeitende Mensch bei Eintritt seiner Invalidität relativ mehr an Leb
kraft verbraucht, wodurch deren Erschöpfung früher eintreten muss, ist die Sp
kraft der Lebensfunctionen eines arbeitgewohnten Menschen eine bedeutend grö
und kann derselbe mit Hilfe seiner intensiveren Widerstandsfähigkeit bei
sprechender Lebensweise eine viel längere Lebensdauer im invaliden Zust
erreichen, als ein gleichgearteter an Arbeit nicht gewöhnter Mensch. Bei einem
Arbeit ungewohnten Individuum muss also die Anspannung der Kräfte im inva
Zustande viel verherender wirken als bei einem Arbeitsgewohnten; in beiden F
jedoch wird ein im invaliden Zustande sich befindlicher Mensch durch Ue
anstrengung sein Leben bedeutend verkürzen, indem er über die zur fern
Erhaltung der Lebensfunctionen nöthige Kraft gewaltsam verfügt.

Die frei verfügbare Lebenskraft ist also auch in dem Sinne aufzufassen,
dieselbe denjenigen Ueberschuss bildet, welcher dem Menschen nach Befriedig
seiner Lebensfunctionen im Verhältnisse seiner Gesammtkräfte an Lebensenergie
Verfügung steht. Nachdem aber der arbeitende Mensch zur Befriedigung seiner Leb
functionen ebenso viel an Lebenskraft bedarf als er an Lebenszähigkeit überha
besitzt, so wird die zum nackten Leben nöthige Lebensenergie sich aus dem V
hältnisse zweier gleich grosser Werthe ergeben, somit durch die Einheit zum A
drucke kommen. Um ebensoviel, als der Verhältnisswerth der Lebenskraft zur Lebe
zähigkeit, also die Verhältnisszahl der gesammten Lebensenergie, die Einheit, das

Werth der gebundenen Lebensenergie überschreitet, wird im Verhältniss zur
me der beiden Energien an Lebenskraft frei verfügbar sein, also der Arbeit zuge-
let werden können. Wir können daher den Grad der mittleren Arbeitsfähigkeit des
schen in den einzelnen Lebensstadien messen, mithin ist auch die mittlere Vali-
t, resp. Invalidität wissenschaftlich controlirbar.

In den früheren Abhandlungen über dieses Thema wurde dargethan, dass im
essiven Verlaufe des Absterbegesetzes der jeweilige verhältnissmässige Grad der
leren Lebenskraft und Lebenszähigkeit des Menschen zum Ausdrucke gelangt,
zwar insoferne, als sich in dem Verhältnisse jenes Zuwachses des wahrscheinlich
rreichenden Lebensalters, welcher sich während eines bestimmten Lebensabschnittes
bt, zu diesem Abschnitte selbst, diejenige mittlere Lebenszähigkeit äussert, mit
n Hilfe der Mensch während des zurückgelegten Lebensabschnittes soviel an
enskraft erspart hat, als zur Befriedigung seiner Lebensfunctionen während des
nnten Lebensdauerzuwachses nöthig ist. Da nun die Summe der Lebenszähigkeit
Lebenskraft während der ganzen Lebensdauer eine constante ist, so ist die
ittlung der Lebenskraftverhältnisse in den einzelnen Altersstadien mit Hilfe der
obige Weise gefundenen Lebenszähigkeits-Verhältnisszahlen eine äusserst einfache,
zwar gelangen die Lebenskraftverhältnisszahlen in der absoluten Differenz der
ilig aufeinanderfolgenden wahrscheinlichen Perioden der ferneren Lebensdauer
Ausdrucke, wohingegen die Verhältnisszahlen der Lebenszähigkeit durch die-
en absoluten Differenzen repräsentirt werden, welche zwischen den aufeinander-
nden jeweiligen Perioden, der wahrscheinlich zu erreichenden Lebensalter sich
en: in beiden Fällen jedoch im Verhältnisse zu den entsprechenden in der
enfolge ausgedrückten beziehungsweisen Lebensabschnitten. Im Folgendem mag
Verlauf der Lebenskraft- und Lebenszähigkeits-Verhältnisszahlen einer mathe-
schen Untersuchung dahin unterzogen werden, wie sich derselbe in seiner Con-
tät, also in aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Intervalen ergibt.

Zu diesem Behufe sei vorerst die allgemeine Form für die fernere wahrschein-
Lebensdauer mit Bezug auf die Lebenden in den einzelnen Lebensstadien
ert und greifen wir diesbezüglich zur ursprünglichen Form dieser Function, um
lbe sodann der weiteren Entwickelung zu unterziehen.

Die wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x wird allgemein durch folgenden
ruck zur Darstellung gebracht

$$w_x = \sum_{n=99-x}^{n=1} \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

diese ist die Summe der Lebenden L in den einzelnen dem Alter x nach-
nden Jahren, dividirt durch die Anzahl derselben im Alter x, was gleich-
utend ist mit

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{L_{x+2}}{L_x} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \ldots\ldots = \frac{L_{x+1}}{L_x}\left(1 + \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} \ldots\ldots\right)$$

og zu diesem ist auch

$$w_{x+1} = \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+4}}{L_{x+1}} \ldots\ldots$$

1*

somit nach vollzogener Zusammenziehung der Formen 2) und 3) der Ausdru

4) $$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot (1 + w_{x+1})$$

Giltigkeit erlangt. Diese Formen entsprechen offenbar, ebenso wie ihre Bezeich Jahresintervallen, weshalb zum Zwecke der Continuität derselben, d. h. z führung unendlich kurzer Intervalle anstatt L_{x+1}, $L_{x+2} \cdots$ die Bezeicl $L_{x+\triangle x}$, $L_{x+2\triangle x} \cdots$ eingeführt werden müssen.

Die Form 1) übergeht sodann mit Rücksicht auf das Intervall $\triangle x$ Ausdruck

5) $$w_x = \sum_{n=n}^{n=1} \frac{L_{x+n\triangle x}}{L_x} \cdot \triangle x$$

somit gleichbedeutend mit 6)

$$w_x = \triangle x \left(\frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} + \frac{L_{x+2\triangle x}}{L_x} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_x} \cdots \right) = \triangle x \cdot \frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} + \left(1 + \frac{L_{x+2\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+}}\right.$$

und man erhält demgemäss auch

7) $$w_{x+\triangle x} = \triangle x \left(\frac{L_{x+2\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+4\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} \cdots \right)$$

woraus schliesslich analog zu Obigem der Ausdruck

8) $$w_x = \frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} (\triangle x + w_{x+\triangle x})$$

resultirt, welcher nach durchgeführter Rechnung der Form

9) $$w_x \cdot L_x - L_{x+\triangle x} \cdot w_{x+\triangle x} = L_{x+\triangle x} \cdot \triangle x$$

entspricht. Lässt man nun hierin $\triangle x$ gegen 0 verschwinden, so ergibt sich

$$w_x \cdot L_x - (L_x + dL_x)(w_x + dw_x) = L_x \cdot dx + dL_x \cdot dx$$

und da $dL_x \cdot dx$ ob seiner Kleinheit verschwindet, liefert dies nach durchg Rechnung den Ausdruck

10) $$w_x \cdot \frac{dL_x}{dx} + L_x \cdot \frac{dw_x}{dx} + L_x = 0$$

respective

11) $$\frac{dlL_x}{dx} + \frac{dlw_x}{dx} = -\frac{1}{w_x}$$

woraus sich die Relation zwischen den Lebenden L_x und der beziehungsweise scheinlichen ferneren Lebensdauer w_x in der Form

12) $$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

ergibt, bei welcher das Alter x als vermittelnde Veränderliche fungirt

Der Durchschnittszinsfuss im Escompte.

Der Escompte, welcher im allgemeinen Geschäftsverkehre zum unentbehrlichen
rfnisse geworden ist und heute eines der wirthschaftlich bedeutendsten Glieder
andelsgetriebe bildet, hat sich im Laufe der Zeit zu einem der wichtigsten
e des Bankwesens entwickelt, indem mit Hilfe desselben der Handelsmann in
ge gesetzt wird, auf dem Wege des Wechselcredites durch eigene Giroverbind-
t seine Wechselforderungen zu escomptiren und auf diese Weise nicht nur seinen
sen Geldbedarf zu decken, sondern auch seine an einen bestimmten Zeitpunkt
enen Verbindlichkeiten auf kurzem Wege zu ordnen. Die Creditvereine,
in ihrer Organisation auf dem gegenseitigen Wechselcredite beruhen und
ifolge den Wechsel-Escompte für ihre Mitglieder zu besorgen berufen sind,
nen sich eines bedeutenden Zuspruches von Seite der Handelswelt, obzwar sich
leugnen lässt, dass dieselben den Höhepunkt ihrer Bedeutung im Laufe der
n Decennien überschritten haben, weil, abgesehen davon, dass der Geschäftsgang
llgemeinen unter den wirthschaftlichen Verhältnissen zu leiden hatte und hiedurch
Geldbedarf im Verkehre eine grosse Einbusse empfand, die Einbürgerung des
nlichen Bankcredites, wie derselbe in England, Frankreich und anderen Staaten
nders cultivirt wird, immer weitere Kreise zu ziehen beginnt.

Freilich kann nicht ein Jeder, der einem Creditvereine als Mitglied angehört,
auf persönlichen Bankcredit Anspruch erheben, weil zu diesem ein besonderer
von anerkannter Creditfähigkeit nothwendig ist und unsere Banken in dieser
hung es an Rigorosität nicht fehlen lassen, was angesichts dieser bei uns noch
ntwicklungsstadium sich befindenden Creditform nicht Wunder nehmen darf,
zwar umsoweniger, als ja doch der persönliche Bankcredit einen für den Credit-
er verhältnissmässig günstigeren Zinsfuss involvirt. Können also blos besonders
ngsfähige Firmen sich einer solchen Begünstigung erfreuen, so wird auch dem-
prechend eine besser accreditirte Firma ihre Accepte mit billigerem Escompte
ben können, was zur Folge hat, dass bei der börsemässigen Regulirung des
mptezinsfusses Accepte erster, zweiter und dritter Kategorie verzeichnet werden,
he nach der Creditfähigkeit des Ausstellers einerseits und des Giranten anderer-
zur Classificirung gelangen. Der Ursprung eines Acceptes ist daher massgebend
den Zinsfuss, unter welchem dasselbe escomptirt wird, und kann man umgekehrt
Escomptezinsfuss als relativen Massstab für die Bonität eines Acceptes ansehen,
ich nur innerhalb derjenigen Grenzen, welche die solide Geschäftsgebarung des-
en bezeichnen.

Inwieweit sonst noch die Höhe der zu escomptirenden Beträge bei der Bemessung
Escomptezinsfusses massgebend ist, und in welchem Sinne dies im geschäft-
n Verkehre zur Anwendung gelangt, kann erst in zweiter Linie in Betracht
gen werden.

Wir gelangen daher zu dem Schlusse, dass die Escomptebanken ebenso wie die
itvereine die zur Uebernahme gelangenden Wechsel nach verschiedenartigem

Massstabe beurtheilen und in Folge dessen auch auf Grund ungleicher Zinsfüsse escomptiren werden. Dies involvirt nun, dass bei der Bilanzirung der Geschäfts-ergebnisse derjenige Zinsfuss ermittelt werden muss, mit welchem das Betriebscapital durchschnittlich zur Verzinsung gelangte, was angesichts des Umstandes, als nicht nur der jeweilige Betrag, sondern auch der entsprechende Zinsfuss und die Zeitdauer der Verzinsung unterschiedliche sind, von besonderem geschäftlichen Interesse ist und in Betreff der Berechnung die richtige Auffassung erfordert um ein genaues Resultat zu erzielen. Die den Escompte cultivirenden Bankinstitute wenden in dieser Beziehung besondere in ihrem Prinzipe verschiedenartige Schlüssel an, von denen derjenige des in Oesterreich bekanntermassen ältesten derartigen Institutes des Credit-vereines der Niederösterreichischen Escomptebank als der praktischeste und zweck-mässigste erscheint, indem derselbe auf folgender technisch verlässlicher Basis beruht.

Es werden nämlich zu diesem Zwecke die Zinsen aller jeweilig vorhandenen Wechselposten, mit Bezug auf diedenselben entsprechenden Beträge und Verzinsungs-fristen, jedoch ohne Rücksicht auf die verschiedenartigen ihnen eigenthümlichen Escomptezinsfüsse durchwegs auch auf Grund eines beliebigen gleichen Zinsfusses ermittelt.

Da nun die aus den entsprechenden Escomptezinsfüssen resultirenden Zinsen-beträge ohnehin bekannt sind, so wird man in dem Verhältnisse dieser beiden sich ergebenden Zinsensummen auch dasjenige Verhältniss erblicken, in welchem der angenommene gleiche Zinsfuss sich zum Durchschnittszinsfuss befindet; und zwar aus dem Grunde, weil die Summe der zu verzinsenden Capitalien, sowie die entsprechenden Verzinsungsfristen für beide Fälle je vollständig übereinstimmt.

In Folge dessen ist es möglich, den im Laufe einer bestimmten Frist vor-kommenden Escomptezinsfüssen entsprechenden Durchschnittszinsfuss mit Hilfe einer einfachen „Regel de tri" zu ermitteln. Folgende Auseinandersetzungen mögen die mathematische Grundlage dieses Principes näher in Erwägung ziehen.

Die Zinsen eines auf die Zeit t mit dem Zinsfusse p angelegten Capitales sind in der Form

$$1) \qquad Z = \frac{K \, . \, p \, . \, t}{100}$$

zum Ausdrucke gebracht. In Folge dessen werden die Zinsen der einzelnen escomp-tirten Posten durch die Form

$$2) \qquad \begin{cases} Z_1 = \dfrac{K_1 \, p_1 \, t_1}{100} \\ Z_2 = \dfrac{K_2 \, . \, p_2 \, . \, t_2}{100} \\ Z_3 = \dfrac{K_3 \, . \, p_3 \, . \, t_3}{100} \\ \vdots \\ Z_n = \dfrac{K_n \, . \, p_n \, . \, t_n}{100} \end{cases}$$

sdrucke gebracht, wobei in K_1, K_2, $K_3 \ldots$, p_1, p_2, $p_3 \ldots$ und t_1, t_2, $t_3 \ldots$ schiedenartigkeit der Capitalien, Zinsfüsse und Verzinsungsfristen durch die henden Indices 1, 2, 3, ... dargestellt ist.

ihrt man nun in obigen Formen einen durchwegs gleichen beliebigen Zinsein, wobei die Capitalien K und die Verzinsungsfristen t unverändert gelassen so werden die entsprechenden Zinsenbeträge Z eine Veränderung erfahren, gen dieselben daher mit Z' bezeichnet werden Bei einem beliebigen durchleichen Zinsfusse q werden sich nun die Zinsenposten in folgender Weise tiren:

$$\begin{cases} Z'_1 = \dfrac{K_1 \, q \, . \, t_1}{100} \\ Z'_2 = \dfrac{K_2 \, . \, q \, . \, t_2}{100} \\ Z'_3 = \dfrac{K_3 \, . \, q \, . \, t_3}{100} \\ \vdots \\ Z'_n = \dfrac{K_n \, . \, q \, . \, t_n}{100} \end{cases}$$

deren Veränderung ausschliesslich nur dem Einflusse des Zinsfusses zuzun Nach jeweiliger Summirung der Zinsenposten 2) und 3) ergibt sich somit Verhältnisse der beiden Summen zu einander die Relation

$$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n}{Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 + \cdots + Z'_n} = \frac{K_1 \, . \, p_1 \, . \, t_1 + K_2 \, . \, p_2 \, . \, t_2 + K_3 \, . \, p_3 \, . \, t_3 + \cdots + K_n \, . \, p_n \, . \, t_n}{q \, (K_1 \, . \, t_1 + K_2 \, . \, t_2 + K_3 \, . \, t_3 + \cdots + K_n \, . \, t_n)}$$

nach gedachter Gleichstellung der verschiedenen Escompte - Zinsfüsse p_3, $\cdots$ p_n mit einem Durchschnitts-Zinsfusse p_x zu folgender Form führt

$$\frac{\Sigma Z}{\Sigma Z'} = \frac{p_x}{q}$$

st: die Zinsfusse, auf deren jeweiliger Grundlage esammten Posten zur Verzinsung gelangen, vern sich zu einander wie die entsprechenden Summen eziehungsweisen Zinsenposten.

r Werth des Durchschnitts-Zinsfusses ist daher folgerichtig

$$p_x = q \cdot \frac{\Sigma Z}{\Sigma Z'}$$

r besseren Erläuterung dieses Ergebnisses sei ein praktisches Beispiel angeführt en demgemäss folgende Posten einer diesbezüglichen Behandlung unterzogen

Nr.	Betrag	Verzinsungsfrist in Tagen	Jeweiliger Escompte-Zinsfuss p %	Effective Zinsen Z	Auf Grund des angenommenen Zinsfusses von $q = 6$% berechnete Zinsen Z'
1	5000	63	$4\frac{1}{2}$	39.38	52·50
2	7000	90	$3\frac{3}{4}$	65 64	105·—
3	3000	114	4	38·—	57 —
4	8000	46	$4\frac{1}{4}$	43·45	61·33
5	550	280	5	21·40	25·67
6	2400	79	$3\frac{1}{2}$	18·43	31·60
7	4000	120	$3\frac{3}{8}$	45·—	80·—
8	5400	150	$5\frac{1}{4}$	118·14	135·—
9	2300	96	$4\frac{1}{8}$	25·30	36·80
10	12000	36	$4\frac{7}{8}$	58·50	72·—
				473·24	656 90

hierin werden somit die beziehungsweisen Summen folgenden Werthen ents

$$\Sigma Z = 473{\cdot}24 \text{ und } \Sigma Z' = 656{\cdot}90$$

und da der beliebige Zinsfuss mit $q = 6$ angenommen wurde, so ergibt sich gesuchten Durchschnitts-Zinsfuss der Werth

$$q_x = 6 \,.\, \frac{473{\cdot}24}{656{\cdot}90} = 4{\cdot}322\%$$

Gelangen nun sämmtliche oben angeführte Posten anstatt nach ihrer sprechenden Escompte-Zinsfusse p auf Grund des Durchschnitts-Zinsfusses q_x zu zinsung, so muss die Summe der sich daselbst ergebenden Zinsenposten mit der der effectiven Zinsen übereinstimmen, was in folgendem Ergebnisse zur Ansc gelangt

Nr.	Betrag	Verzinsungsfrist in Tagen	Zinsen auf Grund des Durchschnitts-fusses $p_x = 4{\cdot}322$%
1	5000	63	37·98
2	7000	90	75·63
3	3000	114	41·05
4	8000	46	44·17
5	550	280	18·49
6	2400	79	22·75
7	4000	120	57 63
8	5400	150	97·24
9	2300	96	26·50
10	12000	36	51·86
			473·30

wobei die sich ergebende unbedeutende Differenz zwischen den beiden Werth Unzulänglichkeit der in Rechnung gebrachten Decimalen entspringt.

Die hier angeführte Methode kann daher als besonders vortheilhaft und für den praktischen Gebrauch empfohlen werden.

Dr. Ludwig Grossmann's

Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes.

II.

Die Form 12) der vorigen Abhandlung bringt die gegenseitige Beziehung der rve der Lebenden und derjenigen der ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten continuirlichen Sinne zum Ausdrucke; u. zw. übernimmt hier die den beiden geinschaftliche Abscisse, d. i. das Lebensalter x die vermittelnde Rolle zwischen denben.

Da nun die Eigenschaft, die Relation zwischen zweien oder mehreren Linien zur thematischen Darstellung zu bringen, blos den Linearen-Differenzialgleichungen herer Ordnung innewohnt, so ist es naheliegend, dass der Ursprung der genannten rm in einer solchen Gleichung zu suchen ist.

e Form 12)

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

ert durch Anwendung der Form

$$F_x = \int L_x \, dx = -e^{-\int \frac{dx}{w_x}} + C$$

von der Curve der Lebenden, den beiden Ordinatenaxen und der beziehungsweisen nate eingeschlossene Fläche, durch welche die Summe aller in unendlich kleinen intervallen bis zum Lebensalter x lebenden Personen dargestellt wird.

In Folge des Umstandes nun, dass der Form 12) gemäss

$$L_x \, . \, w_x = e^{-\int \frac{dx}{w_x}}$$

wird die fragliche Fläche in dem Ausdrucke

$$F_x = \int L_x \, . \, dx = F - L_x \, . \, w_x$$

Darstellung gebracht, worin F als identisch mit der Constante C, die gesammte gegen F_x die beziehungsweise dem Lebensalter entsprechende Fläche repräsentirt.

Somit ist die von der Curve der Lebenden bis zu einem beliebigen Lebensalter x geschlossene Fläche F_x gleich der bis zur äussersten Altersgrenze sich ergebenden stanten Gesammtfläche F weniger dem Producte der im Alter x lebenden Personen und der denselben entsprechenden wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer w_x.

Dementsprechend muss auch der in der Differenz zwischen F und F_x sich ergebende ächenrest, dividirt durch die im beziehungsweisen Alter noch Lebenden L_x die nere wahrscheinliche Lebensdauer w_x als Resultat ergeben; und es ist somit

$$w_x = \frac{F - F_x}{L_x} = \frac{1}{L_x} \left(F - \int L_x \, dx\right)$$

tsprechende diesbezügliche Form, welche der Gleichung 12) Genüge leistet.

Wir wollen nun versuchen die Differenzialgleichung von der Form

$$16)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$$

worin A und B beliebige Functionen der von y abhängigen Variablen x dars als den Ursprung der Formen 12) und 15) auf dem Wege der mathemat Beweisführung zu begründen und mag zu diesem Behufe folgendes Verfahren leitet werden.

Setzt man der Kürze halber der gebräuchlichen Schreibweise entsprechen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

so übergeht die Form 16) in den Ausdruck

$$17)\qquad y'' + Ay' + By = 0$$

welcher durch y' dividirt zu der Relation

$$\frac{y''}{y'} + A = -\frac{B.y}{y'} = R$$

führt, worin R eine noch nicht näher bestimmte Hilfsvariable bezeichnet. In des Umstandes nun, dass die letztere Relation auch folgendermassen gesch werden kann:

$$\frac{dl\,y'}{dx} + A = -\frac{B}{\frac{dl\,y}{dx}} = R$$

und die Formel

$$\frac{dl\,y'}{dx} = \frac{dl\,y}{dx} + \frac{dl\frac{dl\,y}{dx}}{dx}$$

identischer Beschaffenheit ist, also allgemeine Giltigkeit besitzt, ergibt sich Verbindung der beiden letzten Gleichungen, einerseits der Ausdruck

$$18)\qquad y = \int e^{\int (R-A)\,dx}\,dx + C = e^{-\int \frac{B}{R}dx}$$

und andererseits die Differenzialgleichung

$$19)\qquad R' + R^2 - \left(A + \frac{dl(-B)}{dx}\right)R + B = 0$$

welche in sich sämmtliche Eigenschaften der Gleichung 16) umfassen.

Substituirt man nun in die Form 18) die Werthe

$$20)\qquad y = -F_x + C \;,\quad e^{\int (R-A)\,dx} = -L_x \;\text{ und }\; \frac{B}{R} = \frac{1}{w_x}$$

…gibt sich die in 13) angeführte Relation

$$F_x = \int L_x\,dx = -e^{-\int\frac{dx}{w_x}} + C$$

s Resultat.

In Folge dieses Umstandes ist also den Gleichungen 20) gemäss der Werth der ilfsvariablen

1) $$R = \frac{dl(-L_x)}{dx} + A, \text{ resp. } R = B\,w_x$$

Substituirt man also schliesslich diese Werthe in die Form 19), so erhält man lgende Differenzialgleichungen; u. zw. das einemal

2) $$L''_x + \left(A - \frac{dl(-B)}{dx}\right)L'_x + \left(A' - A\frac{dl(-B)}{dx} + B\right)L_x = 0$$

elche gleichbedeutend ist mit derjenigen von der Form

3) $$L'_x + A\,L_x + B\left(\int L_x\,dx + C\right) = 0$$

s anderemal

4) $$w'_x + B\,w^2_x - A\,w_x + 1 = 0$$

s das den Anforderungen entsprechende Resultat.

Mit Berücksichtigung der unveränderten Variabilität des Werthes w_x ergeben ch somit aus der Gleichung 24) für A und B zwei verschiedene Werthe; u. zw. s einemal

$$A_1 = \frac{1}{w_x} \text{ und } B_1 = -\frac{w'_x}{w_x^2} \text{ d. h. } A'_1 = B_1$$

s anderemal

$$A_2 = \frac{w'_x}{w_x} \text{ und } B_2 = -\frac{1}{w_x^2} \text{ d. h. } B_2 = -e^{-2\int A_2\,dx}$$

Hieraus entspringen nun auch die entsprechenden Werthe für R_1 und R_2 indem

$$R_1 = -\frac{w'_x}{w_x} = \frac{B_1}{A_1} \text{ und } R_2 = -\frac{1}{w_x} = B_2\,e^{\int A_2\,dx}$$

, worin die quadratische Form der Differenzialgleichung 19) zum Ausdrucke gelangt.

Nach vollzogener Substitution der jeweiligen Werthe in die Gleichung 23) geben sich somit die beiden identischen Differenzialgleichungen

5) $$\text{I)} \ \ldots \ L'_x + \frac{1}{w_x}L_x - \frac{w'_x}{w_x^2}\left(\int L_x\,dx + C\right) = 0$$

$$\text{II)} \ \ldots \ L'_x + \frac{w'_x}{w_x}L_x - \frac{1}{w_x^2}\left(\int L_x\,dx + C\right) = 0$$

rch deren Subtraction von einander sich das denselben entsprechende Integrale.

$$w_x = -\frac{1}{L_x}\left(C + \int L_x\,dx\right) \text{ resp. } L_x = \frac{e^{-\int\frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

ergibt, welches, wie ersichtlich, demjenigen in der Form 12) vollständig entsprich auch jede einzelne der Differenzial-Gleichungen I und II liefert ohne Inanspruc der anderen, dasselbe Integrale für sich als Resultat, indem die Gleichung I Integration in den Ausdruck

$$L'_x + \frac{d\left[\frac{1}{w_x}\left(\int L_x\,dx + C\right)\right]}{dx} = 0$$

und die Gleichung II) in denjenigen von der Form

$$\frac{1}{w_x}\left(\int L_x\,dx + C\right) = \frac{d\,(L_x\,.\,w_x)}{dx} = \frac{d\,e^{-\int\frac{dx}{w_x}}}{dx}$$

übergeht, deren Integration sich auf kurzem Wege durchführen lässt und gleichen Resultate wie oben führt.

Substituirt man nun in die Form 23) den Werth

$$\int L_x\,dx + C = U\,e^{-\int\frac{A}{2}dx} \tag{26}$$

indem man hieraus L_x und L'_x ermittelt, so ergibt sich die den Differenzialglei höherer Ordnung eigenthümliche Formvariation

$$U'' = \left(\frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4} - B\right) U \tag{27}$$

in welcher U abermals eine Hilfsvariable bedeutet Durch entsprechende Anw dieses Ergebnisses auf die beiden speciellen Gleichungen I und II erhalten w

für I $$U_1'' = \frac{1}{2\,w_x^2}\left(\frac{1}{2} + w'_x\right) U_1$$

und für II $$U_2'' = \frac{1}{2\,w_x^2}\left(w_x''\,.\,w_x - \frac{w_x'^2}{2} + 2\right) U_2$$

und der Form 26) und 13) gemäss

$$U_1 = -\,e^{-\int\frac{A_1}{2}dx} \quad \text{und} \quad U_2 = -\,e^{\int\frac{A_2}{2}dx}\,.\,e^{-\int e^{-\int A_2\,dx}\,dx}$$

respective

$$U_1 = -\,e^{-\int\frac{dx}{2\,w_x}} \quad \text{und} \quad U_2 = -\,e^{-\int\frac{dx}{w_x}}\,\sqrt{w_x}$$

als die der Form 27) entsprechenden Wurzeln mit Rücksicht auf die quad Beschaffenheit der ursprünglichen Gleichung, in welcher allgemein der Be $B = A'$ entsprochen ist.

nticipative und decursive Verzinsung und deren praktische Anwendung.

n im Bankwesen vielfach angewendeter Fructificirungsmodus ist derjenige der
tiven Verzinsnng, welcher sich von demjenigen der gewöhnlichen Verzinsung
unterscheidet, dass die jeweiligen einem Capitale nach Ablauf eines Jahres
ıgsweise Semesters entsprecheuden Zinsen schon im Vorhinein eingehoben
also deren Fälligkeit um die Dauer des betreffendenden Verzinsungs-Inter-
ınticipirt wird. Hauptsächlich der Wechselescompte, die Belehnung von Anlage-
und das Boden- und Hypothekar-Creditgeschäft beruhen auf dieser Grundlage
nit Hilfe des sich auf diese Weise ergebenden Mehrertrages ein grosser Theil der
ıutenden Betriebskosten gedeckt wird. Die Art und Weise nun, in welcher bei den
n Zweigen dieser Modus im bankmässigen Sinne gehandhabt wird, entspricht
denjenigen verschiedenen Verkehrsusancen, deren beziehungsweise Beschaffenheit
ıtlich der Anforderungen, welche an diese gestellt werden, sich aus der Geschäftsform
So werden beim Wechselescompte die Zinsen für die sich noch ergebende jeweilige
t des Acceptes, welche selten die Dauer eines Semesters übersteigt, von dem
mptirenden Betrage im Vorhinein in Abzug gebracht. Ebenso wird bei der
ung von Anlagewerthen vorgegangen, indem die entfallenden Zinsen, deren
it von Fall zu Fall erneuert werden muss, anticipando zu entrichten sind;
hliesslich das Boden- und Hypothekar-Creditgeschäft, bei welchem die Dar-
erzinsung anticipativ und semestral erfolgt, also der Baarbetrag des Darlehens
Semestralzinsen gekürzt dem Contrahenten zugezählt wird.

er mathematische Begriff der anticipativen Verzinsung gelangt nun in fol-
Weise zum Ausdrucke. Da die am Schlusse eines jeden Jahres sich ergebenden
schon zu Beginn desselben in Betracht kommen, so werden dieselben zu
des zweiten Jahres um ein Jahr aufgezinst in Rechnung gebracht werden
; d. h. nach dem ersten Jahre wird $K_1 = K + Kp(1 + p)$, nach dem
Jahre ergibt sich in Folge dessen $K_2 = K_1 + K_1 p(1 + p)$ u. s. w.

er Darleiher würde nämlich zu Beginn des ersten Jahres die Zinsen und zum
e desselben das Darlehens-Capital erhalten; falls nun von Beginn an die
dem Capitale zugeschlagen werden, so ergibt dies zum Jahresschlusse das
und die auf ein Jahr aufgezinsten einjährigen Zinsen. Betrachtet man ferner
umme als ein neues abermals auf ein Jahr anticipativ zu verzinsendes
, und setzt dies in derselben Weise fort, so erhält man folgendes Ergebniss:

er Werth eines anticipativ verzinslichen Capitales K ist sammt Zinseszinsen

dem 1. Jahre $K_1 = K + Kp\,(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]$

" 2 " $K_2 = K_1 + K_1 p\,(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]^2$

" 3. " $K_3 = K_2 + K_2 p.(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]^3$

" 4. " $K_4 = K_3 + K_3 p\,(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]^4$

. . . . .

" $n-1$ " $K_{n-1} = K_{n-2} + K_{n-2} p\,(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]^{n-1}$

" n " $K_n = K_{n-1} + K_{n-1} p\,(1 + p) = K\,[1 + p\,(1 + p)]^n$

Die allgemeine einzig richtige Form für diesen Verzinsungsmodus ist dahe

$$K_n = K\,[1 + p\,(1 + p)]^n \tag{1}$$

worin $P = 100\,p$ den beziehungsweisen Zinsfuss in Percenten bezeichnet, z. Welchen Werth erreichen 5000 Gulden bei 5percentiger a cipativer Verzinsung in 10 Jahren?

Da $K = 5000$, $p = 0{\cdot}05$ und $n = 10$ ist, so wird nach Form 1) sich Werth von

$$K_n = 5000\,[1{\cdot}0525]^{10} = \text{fl. } 8340{\cdot}48$$

ergeben; und stellen sich dessen Endcapitalien in den einzelnen aufeinanderfolge Jahren folgendermassen dar:

fl. 5000·000	ergeben in einem Jahre	5000·000 × 1·0525	= 5262·500
« 5262·500	« « « «	5262·500 × 1·0525	= 5538·781
« 5538·781	« « « «	5538·781 × 1·0525	= 5829·566
« 5829·566	« « « «	5829·566 × 1·0525	= 6135·618
« 6135·618	« « « «	6135·618 × 1·0525	= 6457·738
« 6457·738	« « « «	6457·738 × 1·0525	= 6796·769
« 6796·769	« « « «	6796·769 × 1·0525	= 7153·599
« 7153·599	« « « «	7153·599 × 1·0525	= 7529·163
« 7529·163	« « « «	7529·163 × 1·0525	= 7924·444
« 7924·444	« « « «	7924·444 × 1·0525	= 8340·477

Wollte man bei gewöhnlichen Zinsen und Zinseszinsen nach Ablauf der glei Verzinsungsfrist und ebenso grossem Anfangscapitale dasselbe Resultat erhalten, müsste der Zinsfuss $p\,(1 + p) = q$ sein, also in obigem Beispiele $5^1/_4$% betra

Bei gleichem Zinsertrage verhalten sich somit die Zinsfüsse für anticipa und gewöhnliche Verzinsung zu einander wie folgt:

In diesem Falle muss nämlich

$$K_n = K\,[1 + p(1 + p)]^n = K\,(1 + q)^n$$

sein; hieraus ergibt sich folgerichtig

$$q = p\,(1 + p)$$

und somit ist das Verhältniss

$$p : 1 = q - p : p$$

massgebend, und geht aus demselben hervor, dass zur Erzielung gleicher Ergebn des Zinsenertrages, bei anticipativer Verzinsung der Zinsfuss ein kleinerer sein n als bei gewöhnlicher.

Ein anderer im Bankwesen üblicher Verzinsungsmodus ist die decursive Verzins oder die Aufzinsung bei gekürztem Darlehenscourse, welche im Allgemeinen Emissionen von Staatsanlehen, Prioritäts-Obligationen und Pfandbriefen zur Anwend kommt. Der Darlehens-Contrahent erhält nämlich in diesem Falle für je 100 einen stipulirten kleineren Betrag im Baaren, muss jedoch die Verpflichtung üb nehmen, den vollen Betrag zu verzinsen und eventuell auch zu amortisiren. De zufolge ist der eigentliche Darlehenszinsfuss bloss ein nomineller, indem dersel

nt wie üblich von 100, sondern von 100 — m gezahlt werden muss. Da nun für öhnliche Zinsen- und Zinseszinsen-Berechnung die Form

$$K_n = K\left(1 + \frac{Q}{100}\right)^n = K(1+q)^n$$

, worin also $Q = 100\,q$ ist, so wird demgemäss diejenige für decursive Verzinsung endermassen lauten müssen:

$${}_mK_n = K\left(1 + \frac{P}{100 - m}\right)^n = K(1+p)^n$$

hierin entgegen dem Früheren $P = (100 - m)\,p$ bedeuten. Der Contrahent mmt daher in Baarem blos den Betrag

$$K' = K \cdot \frac{100 - m}{100}$$

schuldet dafür den Betrag K, welcher nach Ablauf von n Jahren, falls Zinsen Zinseszinsen zugeschlagen worden, auf den Werth ${}_mK_n$ anwachsen wird.

Dem empfangenen Betrage K' gemäss wird also der Werth

$${}_mK_n = K'\frac{100}{100 - m}\left(1 + \frac{P}{100 - m}\right)^n$$

Form 4) vollends entsprechen und erhält man mit Hilfe der Relation

$$K'\frac{100}{100 - m}\left(1 + \frac{P}{100 - m}\right)^n = K'\left(1 + \frac{P_1}{100}\right)^n$$

dem nominellen Zinsfusse P entsprechenden effectiven P_1, auf dessen Grundlage zu Handen des Contrahenten baar ausgezahlte Capital K' mit gewöhnlichen en und Zinseszinsen aufgezinst, nach Ablauf der gleichen Frist n den Endwerth liefern würde. Der Form 7) entsprechend wird daher zwischen P und P_1 ende Relation bestehen:

$$P_1 = \left[\left(\frac{100}{100 - m}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{P}{100 - m}\right) - 1\right] \cdot 100$$

deren Hilfe die Höhe der effectiven Verzinsung ermittelt werden kann.

Zu besserem Verständniss sei folgendes Beispiel durchgeführt: Eine Bank rde die Begebung einer vierpercentigen Papier-ntenanleihe von 10 Millionen Gulden, welche durch n Staat contrahirt wird, zum Course von 92 mit der rpflichtung übernehmen, die zur Deckung der jähr-en Zinsen nöthigen Capitalien durch Emission terer zu demselben Course zu übernehmender Renten-es zu beschaffen; wie hoch würde sich die Summe der im aufe sich befindlichen Rente nach 30 Jahren belaufen wie gross wäre der effective Darlehenszinsfuss?

Da der effective Betrag $K' = 10,000.000$, so wird nach der Form 5)
nominelle Betrag

$$K = 10,869,565 \cdot 22$$

und somit nach der Form 4)

$$_{m}K_{n} = {}_{8}K_{30} = K\left(1 + \frac{4}{92}\right)^{30} = 38,969.360 \cdot 36$$

das nach 30 Jahren sich im Umlaufe befindliche Rentencapital sein. Ferner, d
diesem Falle der Staat für je 100 Gulden emittirter Rente blos 92 Gulden er
also $m = 8$ ist, wobei der nominelle Zinsfuss mit $P = 4\%$ und die Frist
$n = 30$ Jahren festgesetzt ist, erhält man aus der Relation 8) die entsprech
Form für den effectiven Zinsfuss

$$P_1 = \left[\left(\frac{100}{92}\right)^{\frac{1}{30}} \cdot \left(1 + \frac{4}{92}\right) - 1\right] 100 = 4 \cdot 638\%$$

mit welchem der effectiv entlehnte Betrag von 10 Millionen verzinst werden m
obzwar der nominelle Zinsfuss blos mit 4% festgesetzt ist. Der Staat wird somit n
4%, d. h. 4 von 100 des baar erhaltenen Capitales, sondern 4 von 92 des nom
schuldigen Betrages an Zinsen pro anno und ferner 100 Gulden für 92 zu zahlen ha

Für den speciellen Fall, in welchem $m = P$ ist, d. h. der Uebernahmsc
mit soviel Gulden unter 100 angenommen wird, als in Percenten die nominelle Verzin
beträgt, wird die Form 4) in folgende übergehen:

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{100 - P}\right)^n = \frac{K}{\left(1 - \frac{P}{100}\right)^n} \tag{9}$$

welche eine Verzinsung auf Grund von $P\%$ mit anticipativen Zinsen und Zi
zinsen darstellt, und sich von der eigentlichen anticipativen Verzinsung, deren F
in 1) zum Ausdrucke gelangt, durch den Umstand unterscheidet, dass in ders
im Gegensatze zur früheren selbst auch die Zinseszinsen auf n Jahre im Vorhi
anticipirt werden. Bei einer P-percentigen derartigen Verzinsung werden
Schuldner vom Darlehen im Vorhinein abgezogen:

Die Zinsen vom ersten Jahre, ferner die Zinsen der erstjährigen Zinsen
zweiten Jahre, die Zinsen der Zinseszinsen im dritten, vierten etc. Jahre u. s

Die Definition der allgemein üblichen anticipativen Verzinsung in diesem S
wie sie in manchen im Gebrauche vorkommenden Lehrbüchern zu finden ist, m
daher als absolut falsch angesehen werden.

Dr. Ludwig Grossmann's

...tersuchungen über die gebräuchliche anticipative Verzinsungsform im Bankwesen.

Der eigentliche Sinn der anticipativen Verzinsung, wie dieselbe im Bankwesen Anwendung kommt, ist in dem Umstande zu suchen, dass die Zinsen zum Unter-...iede von der in 1) der vorigen Abhandlung angeführten Form, bei welcher die ...sen dem Capitale im Vorhinein zugeschlagen sind, im vorliegenden Falle vom ...itale im Vorhinein in Abzug gebracht werden. Der Schuldner verzinst somit der ...m (9)

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{100 - P}\right)^n = \frac{K}{\left(1 - \frac{P}{100}\right)^n}$$

...näss das Capital im decursiven Sinne mit P von $100 - P$, was gleichbedeutend mit Ppercentiger Verzinsung anticipativ, indem $100 - P$ mit Ppercentiger ...rzinsung auf ein Jahr den Zinsertrag von

$$(100 - P)\frac{P}{100}$$

...ert, welcher jedoch anticipativ zu entrichten ist. Da nun derselbe erst am Schlusse ... Jahres mit dem Capitale $100 - P$ zur Auszahlung gelangt, so werden dessen ...zugszinsen auf ein Jahr abermals in Rechnung kommen müssen, und zwar ist ...en Werth durch

$$(100 - P)\frac{P}{100} \cdot \frac{P}{100}$$

...gedrückt. Dieser ist nun ebenfalls anticipativ zu entrichten und müssen daher in ...ge des Umstandes, als derselbe auch erst am Schlusse des Jahres zur Auszahlung ...angt, dessen einjährige Verzugszinsen abermals in Rechnung kommen, und ergibt ...h somit als Werth derselben

$$(100 - P)\frac{P}{100} \cdot \frac{P}{100} \cdot \frac{P}{100}$$

Setzt man dies nun in derselben Weise fort, so gelangt man schliesslich zu der ...lation

$$Z = (100 - P) \cdot \frac{P}{100} + (100 - P)\left(\frac{P}{100}\right)^2 + (100 - P)\left(\frac{P}{100}\right)^3 \ldots.$$

... da das zum Schlusse des Jahres zu entrichtende Capital sammt Zinsen ...$) - P + Z$ beträgt, so ergibt sich hiefür der Werth

$$\ldots - P + Z = (100 - P)\left[1 + \frac{P}{100} + \left(\frac{P}{100}\right)^2 + \left(\frac{P}{100}\right)^3 + \ldots \left(\frac{P}{100}\right)^\infty\right]$$

... gleichbedeutend ist mit dem Ausdrucke

$$100 - P + Z = (100 - P)\frac{\left(\frac{P}{100}\right)^\infty - 1}{\frac{P}{100} - 1}$$

welcher in Folge des Umstandes, dass $P < 100$ und somit $\left(\frac{P}{100}\right)^{\infty} = 0$ ist, in (
jenigen von der Form

11) $$100 - P + Z = 100, \text{ resp. } P = Z$$

übergeht.

Daraus geht hervor, dass die vom Capitale in Vorhinein abgezogenen Zi gleich sind der Ppercentigen anticipativen Verzinsung in diesem Sinne und be somit der zu Handen des Schuldners zu Beginn des Jahres gelangende B $100 - P$ am Ende desselben 100.

Nehmen wir z. B. an, 100 fl. wären mit 5percentiger anticipativer Verzin geliehen worden, so erhält der Schuldner an baar blos 95 fl. ausgezahlt, muss jedoch verpflichten am Schlusse des Jahres 100 fl. zurückzuzahlen.

Es liefert nun fl. 95 zu 5% den Zinsenbetrag von fl. 4·75, welcher im hinein zu bezahlen wäre, jedoch erst im Nachhinein fällig wird.

Es müssen in Folge dessen auch die Zinsen von diesem entrichtet werden un

für fl. 4·75 zu 5% der Zinsenbetrag fl. 0·2375

was aus demselben Grunde wiederholt abermals

für fl. 0·2375 zu 5% den Zinsenbetrag von fl. 0·011875
« « 0·011875 « « « « « « 0·00059375
« « 0·00059375 « « « « « « 0·0000296875

liefert. Setzt man dieses nun fort und summirt die entfallenden Zinsenbeträge, so e man den Betrag von fl. 5 als decursive Zinsen von fl. 95, welche gleichbede sind mit 5percentigen anticipativen Zinsen von fl. 100.

Es sei zum Behufe der besseren Erläuterung folgendes Beispiel zur D führung gebracht.

Ein Capital von 5000 Gulden sei bei 5percenti Verzinsung anticipativ auf 10 Jahre angelegt; welc Werth erreicht dasselbe?

Der Form 9) gemäss ergibt sich

$$K_n = 5000\left(1 + \frac{5}{95}\right)^{10} = \frac{5000}{\left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10}} = \text{fl. } 8350{\cdot}91$$

als Resultat.

Nehmen wir nun an, dass die Zinsen, welche gleich zu Beginn des Ja gerechnet werden sollen, erst am Schlusse desselben mit dem Capitale bezahlt we In diesem Falle wird die Schuld am Ende des Jahres soviel betragen, als die Proportion $95 : 100 = 5000 : K_1$ entspricht. Das liefert also $K_1 = 5263{\cdot}158$, der Capitalist gibt 5000 Gulden baar und erhält hiefür vom Darlehens-Contrah eine Schuldverschreibung von fl. 5263·158, welcher Betrag am Schlusse des Ja fällig wird. Soll nun dieser Betrag auf ein weiteres Jahr unter denselben Bedingu dem Contrahenten überlassen werden, so müsste derselbe für fl. 5263·158 eine Sc verschreibung von fl. 5540·166 geben, welche am Ende des zweiten Jahres wäre. Auf diese Art würde sich successive das nach 10 Jahren fällige Capit obigen Sinne ergeben, u. zw. wie folgt:

5000	fl.	geben	in	einem	Jahre	500000	:	95	=	5263·158	fl.
5263·158	«	«	«	«	«	526315·8	:	95	=	5540·166	«
5540·166	«	«	«	«	«	554016·6	:	95	=	5831·754	«
5831·754	«	«	«	«	«	583175·4	:	95	=	6138·688	«
6138·688	«	«	«	«	«	613868·8	:	95	=	6461·777	«
6461·777	«	«	«	«	«	646177·7	:	95	=	6801·871	«
6801·871	«	«	«	«	«	680187·1	:	95	=	7159·864	«
7159·864	«	«	«	«	«	715986·4	:	95	=	7536·699	«
7536·699	«	«	«	«	«	753669·9	:	95	=	7933·367	«
7933·367	«	«	«	«	«	793336.7	:	95	=	8350·910	«

Aus dieser Erörterung ist zu ersehen, worin der Unterschied zwischen der in
'm 1) der vorigen Abhandlung und der in Form 9) angeführten Verzinsungsart,
en Beschaffenheit hier untersucht wurde, besteht.

Im allgemeinen Bankverkehre wird also, wie bereits bemerkt, nur die letztere
rzinsungsform, d. h. die Anticipativ-Verzinsung angewendet, indem die zu ent-
itenden Zinsen im Vorhinein vom Capitale abgezogen werden. Der Wechsel-
ompte-, der Lombard-, wie auch der Boden- und Hypothekar-Credit wenden zu-
ist diesen Verzinsungsmodus an. Der andere der Form 1) entsprechende gelangt
n grossen Theile in Deutschland zur Anwendung, wo bekanntlich beim Boden-
l Hypothekar-Credit die Abzahlung nicht in Annuitäten, sondern in Raten üblich
Dies geschieht in der Weise, dass dem schuldigen Capitale, die einjährigen
sen zugeschlagen, und weiterhin nach dem jeweiligen Abzuge der jährlichen Rate
vom restlichen Capitale entfallenden Jahreszinsen demselben hinzugerechnet werden.
se Verzinsungsart hat den Vortheil, für längere Verzinsungsfristen eine populäre
m zu gestatten.

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern die Anticipativ-Verzinsung, wie sie der
rm 9) entspricht, durch einen correspondirenden Zinsfuss in decursive verwandelt
rden und als solche bei complicirten Rechnungsarten durch diese ersetzt werden kann.

Die Form 9)

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{100 - P}\right)^n = \frac{K}{\left(1 - \frac{P}{100}\right)^n}$$

st direct den Weg an, welcher zu diesem Zwecke einzuschlagen ist.

Die Proportion

$$\frac{P}{100 - P} = \frac{X}{100}$$

rt wie ersichtlich zum gewünschten Resultate, indem der decursive Zinsfuss

$$X = \frac{100\,P}{100 - P}$$

Anticipativ-Zinsfusse P vollends entspricht, so dass die decursive Verzinsung
Grund von $X\%$ gleichbedeutend ist mit Ppercentiger Anticipativ-Verzinsung und
er auch zum gleichem Resultate führen muss.

Hinsichtlich der usuellen Verzinsungsmethode, welche beim Boden- und Hyp thekar-Credit für den Annuitätenmodus zur Anwendung kommt, sei noch folgende bemerkt:

Im diesbezüglichen Bankverkehre wird allgemein die Darlehens-Verzinsung anti cipativ und semestral, hingegen die Pfandbrief-Verzinsung decursiv und semestr gehandhabt.

Da nun die ersten Semestralzinsen vom dargeliehenen Capitale sofort in Abz gebracht werden und die Annuitäten erst für die weitere Folge die anticipativ Zinsen in sich schliessen, so wird die Berechnung derselben eine Verschiebun involviren.

Es sei beispielsweise K das Darlehenscapital, P der jährliche Zinsfuss und n d Tilgungsfrist, so ergibt sich die der Anticipativ-Verzinsung entsprechende Form

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{100 - P}\right)^n$$

Da nun die Verzinsung semestral erfolgt, so wird diese in folgende übergeh

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{200 - P}\right)^{2n}$$

und in Folge der zum Abzug gebrachten ersten Semestralzinsen ergibt sich schliess

$$K_n = K\left(1 + \frac{P}{200 - P}\right)^{2n - 1} \tag{14}$$

Das Capital K würde daher, falls von einer Tilgung abgesehen werden wü und die weiteren Zinsen dem Capitale zugeschlagen werden würden, nach Ablauf n Jahren mit semestraler Anticipativ-Verzinsung auf K_n anwachsen.

Da nun die Zinsen wohl decursiv gerechnet, jedoch im Vorhinein eingeho werden, so wird das um die ersten semestralen Zinsen gekürzte Darlehens-Cap erst nach Ablauf des Semesters wieder den vollen entsprechenden Betrag erreic und werden daher zur Ausgleichung des Fehlers die Tilgungsquoten um die D eines Semesters nach dem jeweiligen Zinsfusse discontirt. Ob und in welcher W diese Methode der Ausgleichung den rechnungsmässigen Anforderungen entspri mag in einer der nächsten Abhandlungen zur Erörterung gelangen.

Vorläufig begnügen wir uns damit, zu constatiren, dass die bisherigen zu die Behufe aufgestellten Tabellen den Anforderungen nur zum Theile genügen und vortheilhaft wäre, dieselben den Bedürfnissen vollends anzupassen, um selbe für praktische Handhabung zugänglicher zu machen.

Es wäre überdies vortheilhaft, wenn hier der Theoretiker, dem die allgeme Usancen der praktischen Geschäftsgebarung in vielen Fällen unzugänglich bleib mit dem Praktiker Hand in Hand ginge, um auf gemeinschaftlichen Erfahrung eine vollständige allen Anforderungen entsprechende Handhabe für den bankmässig Gebrauch zu schaffen.

---

rsuchungen über das Wesen der Invalidität vom Standpunkte des Absterbegesetzes.

III.

achdem wir in der vorigen Abhandlung die Form 12) auf ihren Ursprung cht und hiedurch den Sinn derselben einer Erörterung unterzogen haben, so uns nunmehr nicht schwer fallen, die weiteren Conclusionen aus derselben en. Der genannten Form

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

ht bekanntlich auch der Ausdruck für die fernere wahrscheinliche Lebens-

$$w_x = -\frac{1}{L_x}\,(C + \int L_x\,dx)$$

hier offenbar durch das entsprechende Lebensalter x und die mit demselben ndirende Anzahl von Lebenden L_x ausgedrückt ist. In Folge dessen sind wir Lage, auch die wahrscheinliche Gesammtlebensdauer W_x durch eine ähnliche zum Ausdruck zu bringen, indem bekanntlich die Summe der ferneren einlichen Lebensdauer w_x und des entsprechenden Alters x die wahrschein- esammtlebensdauer W_x darstellt.

emgemäss ist

$$W_x = w_x + x$$

nit auch

$$W_x = \frac{1}{L_x}\,(L_x\,.\,x - \int L_x\,dx - C) = \frac{1}{L_x}\,(\int x\,d\,L_x - C)$$

uchtes Resultat.

eifen wir nun zurück auf die Grundlagen unseres Systemes und rufen uns leutung der ersten Differenzialquotienten der Grössen w_x und W_x in's Ge- ss zurück, so finden wir, dass

$$\frac{d\,w_x}{d\,x} = -1 + \frac{L'_x}{L_x^2}\,(C + \int L_x\,.\,dx) = -\frac{L'_x}{L_x}\,.\,w_x - 1$$

ative mittlere Lebenskraft-Verhältnisszahl a und

$$\frac{d\,W_x}{d\,x} = \frac{L'_x}{L_x}\Big(x - \frac{1}{L_x}\,(\int x\,d\,L_x - C)\Big) = \frac{L'_x}{L_x}\,(x - W_x)$$

tlere Lebenszähigkeits - Verhältnisszahl b darstellt; und da der Form 29) $W_x - x = w_x$ ist, so erhalten wir für

$$\frac{d\,W_x}{d\,x} = -\frac{L'_x}{L_x}\,.\,w_x$$

espondirenden Werth.

er Form 12) gemäss ist aber

$$\frac{L'_x}{L_x} = -\frac{1}{w_x} - \frac{w'_x}{w_x}$$

also auch

$$W' = w'_x + 1$$

was der Form 29) gemäss vollständig der Rechnung entspricht.

Soll nun die durch das Verhältniss der Lebenskraft und Lebenszähig Ausdruck gelangende mittlere Lebensenergie E durch die entsprechenden zur Geltung gebracht werden, so wird

$$34)\qquad E_x = \frac{K}{Z} = \frac{a}{b} = -\frac{w'_x}{W'_x} = \frac{-w'_x}{w'_x + 1}$$

der Anforderung Genüge leisten und somit ist auch für die mittlere Verhä der frei verfügbaren Lebenskraft k folgende Relation massgebend

$$35)\qquad k_x = \frac{E_x - 1}{E_x + 1} = -2\,w'_x - 1$$

aus welcher folgerichtig auch der Ausdruck für den mittleren Validitätscoëfici entspringt, welcher lautet

$$36)\qquad V_x = w'_x \,.\, \frac{2\,w'_x + 1}{w'_x + 1}$$

worin

$$w'_x = -a$$

bezeichnet.

Der mittlere Validitätscoëficient V_x gibt uns nun das Mittel an die H fernere wahrscheinliche Rüstigkeitsdauer der in verschiedenen Lebensaltern s Personen zu ermitteln Da nämlich der mittlere Validitätscoëficient der einz $x$ten Lebensjahre sich befindenden Lebenden L_x im Werthe V_x zum Ausdruck so wird das Product $L_x V_x$ die Anzahl derjenigen Validitätseinheiten in sich s welche die Gesammtzahl der beziehungsweisen Lebenden repräsentirt.

Ferner äussert sich im Verhältnisse der Validitätseinheiten des $(x + 1$ $x$ten Lebensjahres die Validitätswahrscheinlichkeit der Lebenden innerha Jahres, natürlicherweise die Lebenswahrscheinlichkeit mit inbegriffen.

Es muss sich daher aus dem Verhältnisse der Summen der Validitäts in den einzelnen Lebensjahren vom beziehungsweisen Alter x bis zur Validit gerechnet, und der dem Lebensalter x entsprechenden Validität-einheiten die wahrscheinliche fernere Rüstigkeitsdauer ergeben.

Demgemäss ist, da mit dem 66ten Lebensjahre die Validitätsgrenze im $x$ten Lebensjahre die mittlere Rüstigkeitsdauer durch die Form

$$37)\qquad v_x = \frac{\sum\limits_{x=66}^{x=x} L_x V_x}{L_x V_x}$$

zur Geltung gebracht.

Dieser Form entsprechend erhält man für v_x eine Reihe analog derje w_x, welche folgendermassen lautet

$$= \frac{L_{x+1} \cdot V_{x+1}}{L_x \cdot V_x} + \frac{L_{x+2} \cdot V_{x+2}}{L_x \cdot V_x} + \frac{L_{x+3} \cdot V_{x+3}}{L_x \cdot V_x} + \ldots + \frac{L_{66} \cdot V_{66}}{L_x \cdot V_x}$$

nso für

$$= \frac{L_{x+2} \cdot V_{x+2}}{L_{x+1} \cdot V_{x+1}} + \frac{L_{x+3} \cdot V_{x+3}}{L_{x+1} \cdot V_{x+1}} + \frac{L_{x+4} \cdot V_{x+4}}{L_{x+1} \cdot V_{x+1}} + \ldots + \frac{L_{66} \cdot V_{66}}{L_{x+1} \cdot V_{x+1}}$$

folgerichtig

$$v_x = \frac{L_{x+1} \cdot V_{x+1}}{L_x \cdot V_x} (1 + v_{x+1})$$

gt. Setzt man nun hierin für das Intervalle eines Jahres ein solches von h kurzer Dauer, so ergibt sich [analog den Formen 5) bis 8), Abhdl. I] als für die mittlere fernere Rüstigkeitsdauer

$$v_x = \frac{L_{x+\triangle x} \cdot V_{x+\triangle x}}{L_x \cdot V_x} (\triangle x + v_{x+\triangle x})$$

r die wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x ergab sich nun bekanntlich der Ausdruck

$$w_x = \frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} (\triangle x + w_{x+\triangle x})$$

der Form 8) der Abhandlung I.

ringt man also diese beiden Formen in ein Verhältniss zu einander, so resultirt die Relation

$$\frac{v_x}{w_x} = \frac{V_{x+\triangle x}}{V_x} \cdot \frac{\triangle x + v_{x+\triangle x}}{\triangle x + w_{x+\triangle x}}$$

mit auch, falls man $\triangle x$ gegen Null verschwinden lässt, der Ausdruck

$$\frac{v_x}{w_x} = \frac{V_x + dV_x}{V_x} \cdot \frac{dx + v_x + dv_x}{dx + w_x + dw_x}$$

schliesslich zu der Gleichung

$$\frac{1 + w'_x}{w_x} - \frac{1 + v'_x}{v_x} = \frac{V'_x}{V_x}$$

ie auf dem Wege der Integration in dem Resultate

$$V_x = \frac{w_x}{v_x} \cdot e^{\int \frac{dx}{w_x} - \int \frac{dx}{v_x}} \qquad \text{resp. } L_x \cdot V_x = \frac{e^{-\int_{x=0}^{x=66} \frac{dx}{v_x}}}{v_x}$$

ung gelangt. Betrachten wir nun diese Form näher, so finden wir eine auf- Analogie mit derjenigen in 12) der vorigen Abhandlung ausgedrückten, so o die Beziehung der Validitätseinheiten $V_x L_x$ zur mittleren ferneren Rüstig- er v_x mit Rücksicht auf das Alter x bis zur Grenze des 66ten Lebensjahres ist, wie diejenige der Lebenden L_x zur mittleren ferneren Lebens- x.

ll nun auch die Beziehung zwischen der mittleren ferneren Rüstigkeits- und auer zur Geltung gelangen, so bedarf es blos der Substitution der ent- den durch w_x zum Ausdruck gebrachten Werthe von L_x und V_x und ergibt mit die Relation

41)
$$\frac{2\,w'_x + 1}{w'_x + 1} \cdot \frac{w'_x}{w_x} \cdot e^{-\int \frac{dx}{w_x}} = \frac{e^{-\int \frac{dx}{v_x}}}{v_x}$$

welche zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 66$ Giltigkeit besitzt. Da nun unsere Rechnung die Anwendung dieser Beziehung erst vom 18ten Lebensjahre fangen voraussetzt, so wird den Anforderungen mit Rücksicht auf das Alter vol entsprochen.

Je mehr nun die mittlere wahrscheinliche fernere Rüstigkeitsdauer der mit wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer sich nähert, desto geringer ist die wahrsc liche mittlere Invaliditätsdauer als voraussichtlich anzunehmen, und umgekehrt auch mit dem Wachsthume der Differenz zwischen diesen beiden der jewe Altersclasse eine längere Frist der Invalidität vor dem Tode entsprechen.

Man kann daher in der Differenz

42)
$$w_x - v_x = d_x$$

die Relation für die wahrscheinliche mittlere Invaliditätsdauer, respective für die mi Ueberlebensdauer der Validität oder Rüstigkeit erblicken, welche das 66. Leben d. i. die Validitätsgrenze, als Durchschnittszeitpunkt des Eintrittes einer so voraussetzt.

Für die Rente, welche für die mittlere Invaliditätsdauer d_x erforderlic muss daher vorderhand jener Baarwerth ermittelt werden, welcher bis zum Be der Invalidität von den angesammelten Prämien aufgebracht werden soll.

Der für die mittlere Ueberlebensdauer der Validität nöthige Baarwerth Jahresrenten wird in dem Ausdrucke

$$B = \frac{1+p}{p} \cdot \frac{(1+p)^{d_x} - 1}{(1+p)^{d_x}}$$

für den Rentenbetrag 1 zur Geltung gelangen, und liefern in Folge dessen d $x$ten Lebensjahre lebenden Personen mit diesem Baarwerthe B multiplicirt erforderlichen Betrag der Dotirung der jeweilig entsprechenden für die mi Ueberlebensdauer ihrer Validität nöthigen Renten.

Setzt man nun die Prämienzahlung bis zum 70sten Lebensjahre voraus, i man die Invaliditätsrente bis zum Eintritte dieses Alters um die Jahresprämie und erst die vom 70sten Lebensjahre flüssig werdende Altersrente voll zur Auszal bringt, so wird die Summe der discontirten Lebenden vom $x$ten bis zum 7 Lebensjahre, in den obengenannten vom 67sten Lebensjahre, auf den gleichen punkt discontirten Betrag dividirt, die erforderliche einmalige Prämie liefern, w durch die beziehungsweise Mise, einer bis zum 70sten Lebensjahre laufenden R dividirt, den Werth der entsprechenden Jahresprämie ergibt.

Dr. Ludwig Grossmann's

exion über den Einfluss der Veränderung des Provisions-entes auf das Gewinnerträgniss beim Boden- und Hypothekar-Credit.

I.

Die bisherigen Untersuchungen auf diesem Gebiete des Bankwesens galten den
nungen zwischen Zinsfuss und Tilgungsfrist unter Beibehaltung eines bestimmten
ionspercentes, indem bei Veränderung des Pfandbriefzinsfusses auch die Dar-
verzinsung derart erhöht oder herabgesetzt wurde, dass die Differenz zwischen
veränderten Zinsfüssen derjenigen zwischen den ursprünglichen gleichkam.
rovisionspercent wurde nämlich der Einfachheit halber mit 1 Percent festgesetzt
nter allen Umständen beibehalten, wodurch Complicationen der diesbezüglichen
hnungen vermieden wurden. Nachdem nun diejenigen Fragen, welche die
affenheit der Darlehens- und Pfandbriefverzinsung und deren Abhängigkeit von
ilgungsfrist und dem Gewinnerträgnisse betreffen, in allen möglichen Formen
pft wurden, so mag nun auch für alle diese möglichen Fälle diejenige Even-
it in Betracht gezogen werden, wo auch das Provisionspercent selbstständig
Veränderung unterworfen wird und hiedurch seinen Einfluss auf das Gewinn-
niss geltend macht, welches in Folge seiner gleichzeitigen Abhängigkeit vom
ens- und Pfandbriefzinsfusse einerseits von der Tilgungsfrist, sowie der Höhe
rlehens andererseits nunmehr eine erhöhte Veränderlichkeit erlangen wird, aus
r eine Reihe neuer Relationen entspringt. Die einfachste und zumeist nahe-
le ist diejenige, wo bei gleichbleibendem Pfandbriefzinsfusse der Darlehens-
s eine Veränderung erfährt, also das Provisionspercent in directem Sinne
rt wird und in Folge dessen seinen Einfluss auf das Provisionserträgniss ausübt,
also für den Fall der vorausgesetzten Stabilität dieses Erträgnisses auch auf
gungsfrist ausdehnt. Eine andere, nicht minder interessante Relation ist diejenige,
i Convertirung des Pfandbrief- und Darlehenszinsfusses die Differenz zwischen
geändert wird, wodurch mit Rücksicht auf das Provisionserträgniss in zweierlei
e Tilgungsfrist beeinflusst werden kann, u. z. einerseits für den Fall des voraus-
ten gleichbleibenden jährlichen Provisionsgewinnes und andererseits bei Annahme
unveränderten Gesammtprovisionserträgnisses. Schliesslich sei noch derjenigen
n gedacht, welche sich bei gleichbleibendem Provisionserträgniss und unver-
r Tilgungungsfrist ergeben muss, falls die Herabsetzung des Pfandbriefzins-
in bestimmter Weise vorgesehen ist, das Maass der Herabsetzung des Darlehens-
ses jedoch von der Stabilität des Provisionserträgnisses abhängig gemacht
u. z. sind auch hier zwei verschiedene Fälle möglich, indem einerseits die
heit der jährlichen Provisionsgewinne mit denjenigen beim ursprünglichen
s und andererseits ein im selben Sinne unverändertes Gesammt-Provisions-
iss, zur Rechnungsgrundlage angenommen werden kann. Unter allen Umständen
r hiedurch eine ganze Reihe von Handhaben geboten, welche geeignet sind,

4

den durch Veränderung des Darlehenszinsfusses im eventuellen Falle entstandenen Ausfall am Gewinne beim Boden- und Hypothekarcredit in geeigneter Weise zu paralysiren.

Eine während der ganzen Tilgungsfrist gleichbleibende Provision würd bekanntlich durch die Differenz der Annuität auf Grund des Darlehenszinsfusses und derjenigen auf Grund des Pfandbriefzinsfusses dargestellt sein. Discontirt man nun sämmtliche während der ganzen Tilgungsdauer sich ergebenden jährlichen Provisione auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung, so erhält man den Baarwerth de gesammten Provisionsgewinnes. Nehmen wir nun an, ein Institut würde (wie dies i allgemeinen Geschäftsgebaren üblich ist) verschiedene Geschäfte, welche auf gleich verzinslichen Pfandbriefen basiren, mit ungleichem Darlehenszinsfuss abschliesse Hieraus müsste sich also eine Ungleichheit der respectiven Provisionsgewinne ergebe Um dieselben also auszugleichen, wird die beziehungsweise Tilgungsfrist einer Aende rung in der Weise unterzogen, dass dieselbe in dem Maasse verlängert wird, als d Provisionsgewinn von seiner durchschnittlichen Höhe abweicht. Es wird also ei auf den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung discontirte kleinere Anzahl höhe jährlicher Provisionen in den Baarwerth einer grösseren Anzahl kleinerer Jahre provisionen verwandelt. Fasst man anderenfalls diese Frage von demjenigen Stand punkte auf, wie dieselbe in Wirklichkeit sich verhält, indem die Provisionen anfa grösser sich gestalten und in den weiteren Jahren sich vermindern, so wird besagte Transaction folgendem Processe entsprechen: Durch die Verlängerung d Tilgungsfrist wird die Tilgung des Darlehens um eine bestimmte Dauer verzögert, u in Folge dessen auch eine langsamer verlaufende Abnahme der Zinsenbeträge erzi Da nun die jährlich entfallenden wirklichen Provisionsgewinne den jeweiligen Zins beträgen proportional sind, so wird hieraus ebenso ein langsameres Abfallen d Provisionen, also auch ein günstigeres Gesammtergebniss derselben resultiren, wodu der in Folge der Kürzung des Provisionspercentes entstandene Ausfall ergänzt wi Es handelt sich nun darum, rechnungsmässig festzustellen, um wieviel Jahre die Ti gungsfrist für den Fall einer beliebigen Kürzung des Provisionspercentes verläng werden muss, um einen Ausfall des ursprünglichen Provisionsgewinnes hintanzuhalt Zu diesem Behufe ist es nothwendig, der dem beziehungsweisen Darlehenszinsfu entsprechenden Annuität die auf Grund des gemeinschaftlichen Pfandbriefzinsfus sich ergebende entgegenzustellen; und durch Vergleich der entsprechenden, mit Hi der jeweilig sich ergebenden Differenz für den Zeitpunkt der Darlehenscontrahir ermittelten Gewinnbaarwerthe, das Verhältniss der correspondirenden jeweiligen Ti gungsfristen festzustellen. In Folge des Umstandes nun, dass die eine derselben allen Fällen bekannt ist, führt dieses Ergebniss unbedingt zum gesuchten Resulta

Das Princip, auf dessen Grundlage die mathematische Ermittlung dieser Frag sich vollzieht, unterscheidet sich von dem früheren dadurch, dass im Gegentheile z jenem, wo bekanntlich die Tilgungsfrist von der Veränderlichkeit des Pfandbrief- un Darlehenszinsfusses im aliquoten Sinne abhängig gemacht wurde, also die Differe zwischen diesen beiden constant blieb, hier die Differenz einer Veränderlichkeit unter worfen wird, wohingegen der eine der beiden Zinsfüsse unverändert bleibt.

Bezeichnet man also den Darlehenszinsfuss mit $P = 100\,p$, den entsprechenden Pfandbriefzinsfuss mit $Q = 100\,q$, das Darlehenscapital mit A, die Tilgungsfrist mit n und die Annuität mit R, so gelangt man zu der bekannten Form

$$1)\qquad A\,(1+p)^n - R\,\frac{(1+p)^n - 1}{p} = 0$$

und hieraus die Annuität

$$2)\qquad R = A\,\frac{(1+p)^n\,p}{(1+p)^n - 1}$$

Auf Grundlage des Pfandbriefzinsfusses würde die Tilgung mittelst der Annuität

$$3)\qquad R_1 = A\,\frac{(1+q)^n\,q}{(1+q)^n - 1}$$

in derselben Zeit sich vollziehen. In der Differenz zwischen diesen beiden Annuitäten

$$4)\qquad R - R_1 = g$$

ist also diejenige jährliche Provision zu erblicken, welche sich ergeben würde, wenn der Provisions-Gesammtertrag in gleichbleibenden Jahres-Quoten während der ganzen Tilgungsdauer flüssig werden würde.

Es ist demnach

$$5)\qquad K = g\,.\,\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n\,.\,q}$$

der Baarwerth des gesammten Provisionsgewinnes zur Zeit der Darlehens-Contrahirung.

Nehmen wir nun an, der Darlehenszinsfuss P würde irgend eine Veränderung erfahren, hingegen der Pfandbriefzinsfuss sich gleichbleiben. In diesem Falle müsste also der ursprüngliche Darlehenszinsfuss P in den veränderten P', respective p in p' übergehen, wobei selbstverständlich auch der Werth der Annuität eine entsprechende Aenderung erfahren müsste.

Die Form

$$6)\qquad R' = A\,.\,\frac{(1+p')^n\,.\,p'}{(1+p')^n - 1}$$

repräsentirt nun den der veränderten Annuität entsprechenden Werth, welcher, da der Pfandbriefzinsfuss derselbe bleibt, analog zum Obigen, zu der Relation

$$7)\qquad R' - R_1 = g'$$

führt, mittelst welcher man zum Baarwerthe des diesfälligen Provisions-Gesammtertrages gelangt, der in der Form

$$8)\qquad K' = g'\,.\,\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n\,.\,q}$$

zum Ausdrucke kommt. Sollen nun die beiden unterschiedlichen Baarwerthe K und K' einander gleich werden, d. h. der Provisionsertrag in dem veränderten Falle mit dem des ursprünglichen übereinstimmen, so wird dies nur auf Kosten der Tilgungsfrist geschehen können. Wird also der Darlehenszinsfuss gekürzt, so wird in demselben Verhältnisse die Dauer der Tilgung verlängert werden müssen.

Demgemäss übergeht die Form 6) in

$$R' = A\,\frac{(1+p')^x\,.\,p'}{(1+p')^x - 1}$$

worin x die fragliche veränderte Tilgungsfrist bezeichnet, sowie auch dementspre die Gleichung für die diesbezügliche Annuität auf Grundlage des Pfandbrie fusses in

$$10)\qquad R'_1 = A\,\frac{(1+q)^x \cdot q}{(1+q)^x - 1}$$

und in Folge dessen die gleichbleibende jährliche Provisionsquote

$$11)\qquad g' = R' - R'_1$$

mit deren Hilfe dann der Baarwerth K' durch den Ausdruck

$$12)\qquad K' = g' \cdot \frac{(1+q)^x - 1}{(1+q)^x \cdot q}$$

zur Darstellung gelangt

Sollen nun die Baarwerthe K und K' einander gleich sein, so muss auc Relation

$$13)\qquad g\,\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n \cdot q} = g'\,\frac{(1+q)^x - 1}{(1+q)^x \cdot q}$$

entsprochen worden, welche eine Beziehung zwischen den beiden Unbekannten g x repräsentirt. Es ist daher zum Zwecke der Lösung noch eine zweite diesb liche Relation nothwendig und erhält man diese aus der Form 11), indem in selbe die Werthe R' und R'_1 substituirt werden. Es ergibt sich also

$$14)\qquad g' = A \cdot \left[\frac{(1+p')^x \cdot p'}{(1+p')^x - 1} - \frac{(1+q)^x \cdot q}{(1+q)^x - 1}\right]$$

als die gesuchte zweite Beziehung, und mithin durch Elimination von g' au Formen 13) und 14) die Gleichung

$$15)\qquad g\,\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n \cdot q} = A \cdot \left[\frac{(1+p')^x \cdot p'}{(1+p')^x - 1} - \frac{(1+q)^x \cdot q}{(1+q)^x - 1}\right] \frac{(1+q)^x -}{(1+q)^x \cdot}$$

in welcher mit Ausnahme von x sämmtliche Grössen bekannt sind. Hieraus sich somit folgerichtig

$$16)\qquad \frac{q}{p'}\left[1 + \frac{g}{A} \cdot \frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n \cdot q}\right] = \frac{(1+p')^x}{(1+q)^x} \cdot \frac{(1+q)^x - 1}{(1+p')^x - 1}$$

und durch Logarithmirung dieses Ausdruckes, welcher mit Rücksicht auf die kannte x transcendent ist und in Folge dessen blos mit Hilfe einer Ersatzglei die Lösung ermöglicht, eine die Convergenz der Näherungswerthe in sich schlie Form nachfolgender Art

$$17)\qquad x = \frac{lg\,\frac{q}{p'}\left[1 + \frac{g}{A} \cdot \frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n \cdot q}\right] - lg\,\frac{(1+q)^x - 1}{(1+p')^x - 1}}{lg\,(1+p') - lg\,(1+q)}$$

welche die gesuchte Ersatzgleichung

$$18)\qquad x = \mathop{E}_{m>n}\left(\frac{lg\,\frac{q}{p'}\left[1 + \frac{g}{A}\,\frac{(1+q)^n - 1}{(1+q)^n \cdot q}\right] - lg\,\frac{(1+q)^m - 1}{(1+p')^m - 1}}{lg\,(1+p') - lg\,(1+q)}\right)$$

liefert, in welcher m den entsprechenden Näherungswerth für die Grösse x bezei

Prämienberechnung für die Alters- und Invaliditätsrente.

I.

Die Errungenschaft, auf Grund des Sterblichkeitsverlaufes eine Vergleichstabelle n Zeitpunkt und mittleren Grad der in Folge des successiven Kräfteverfalles enschen eintretenden Invalidität desselben geschaffen zu haben, spornte uns f dem betretenen Pfade weiter zu schreiten und auch diejenige wahrscheinliche re Frist zu ermitteln, welche eine invalid gewordene Person noch zu leben hat. rundlage des in den einzelnen Lebensstadien sich ergebenden mittleren Validitäts- üstigkeitsgrades ist es gelungen, die Wahrscheinlichkeit der mittleren ferneren gkeitsdauer der in verschiedenen Altersstadien sich befindenden Individuen fest- len. Nachdem nun die mittleıe fernere Lebensdauer einer jeden, in welchem immer stehenden Person ohnehin bekannt ist, so liefert die Differenz zwischen ittleren Lebens- und Rüstigkeitsdauer die mittlere wahrscheinliche Invaliditäts- ; und zwar aus dem Grunde, weil nach zurückgelegter fernerer Rüstigkeits- nothwendigerweise der mittlere Invaliditätszeitpunkt eintreten muss, und von gefangen die Invalidität bis zum eintretenden Tode fortdauert.

Der mittlere Zeitpunkt für die eintretende Invalidität des Menschen fällt nun ngsmässig auf das Mittel zwischen dem 66sten und 67sten Lebensjahre, so alle dieses Alter erreichenden Personen im Verhältnisse der zur Zeit ihres herungsbeitrittes Lebenden und deren jeweiligen wahrscheinlichen mittleren itätsdauer an der Rente participativ theilnehmen. In Folge dessen wird das eraus ergebende Resultat, einer beispielsweise im 50sten Lebensjahre invalid denen und im 60sten Lebensjahre, also vor dem Eintritte des mittleren Inva- szeitpunktes verstorbenen Person ebenso genügen, wie einer erst im 67sten Lebens- invalid gewordenen und erst im 90sten Lebensjahre verstorbenen. Es kommt also nicht das einzelne Individuum, sondern die Gesammtheit in Betracht, t man nun die sich participativ ergebende beziehungsweise Rentensumme zur lage der Prämienberechnung, und berücksichtigt zugleich das Beitrittsalter, tive die Dauer der Prämienzahlung, so ergibt sich diejenige Prämie, welche urchwegs gleichen Rentenbezügen zu zahlen wäre, und ist somit der gestellten derung Genüge geleistet.

Die Prämie wird sodann eine Regelung in dem Sinne erfahren haben, als die- vom jeweiligen Beitrittsalter bis zu einem im Voraus bestimmten gleichmässigen ununterbrochen jährlich zu zahlen ist. Tritt die Invalidität vor diesem Alter o wird die Prämie von der jährlichen Invaliditätsrente vorher in Abzug gebracht rst mit der Erreichung jenes Alters kommt für die ferneren Jahre die volle in Betracht. Dieses Alter, in welchem unter allen Umständen die volle Jahres- zur Auszahlung gelangt, kann daher als Zeitpunkt der beginnenden Altersrente htet werden, so dass die jeweilige Prämie die Differenz zwischen der Höhe der - und Invaliditätsrente bezeichnet.

Soll jedoch die Invaliditäts- und Altersrente gleich gross sein, so wird lebenslänglich zu zahlende Prämie als Grundlage genommen und diese von jeweiligen Rente, welche gleichmässig vom Eintritte der Invalidität bis zum Able an den Versicherten zu zahlen ist, jedesmal in Abzug gebracht. Um nun die H der ursprünglichen Rente wieder zu erreichen, wird eine Erhöhung der Prämie dem Sinne stattfinden müssen, als das Verhältniss der gekürzten Rente zur ursprü lichen dasselbe sein muss, wie dasjenige der lebenslänglichen ursprünglichen Pr zur erhöhten. Somit ergibt sich die jeweilige Prämie für eine, von irgend ei Zeitpunkte der eingetretenen Invalidität bis zum Ableben ohne jedweden Abzu beziehende gleichmässige Jahresrente; u. zw. für jedes beliebige Beitrittsalter 18ten Lebensjahre angefangen, welche jedoch vom 67sten Lebensjahre begi unter allen Umständen, also auch bei voller Rüstigkeit des Versicherten, als A rente jährlich zur Auszahlung gelangt. Die Invaliditätsrente kann also auc eine vorzeitig fällig werdende Altersrente betrachtet werden, insoferne man Invalidität in Folge Kräfteverfalles als vorzeitigen Eintritt der Arbeitsunfä ansieht.

Um aber ein Aequivalent auch für diejenigen Versicherten zu haben, ihre vorzeitige Invalidität einem Unfalle verdanken, also die Anzahl der durch K verfall invalid Gewordenen um ein Erkleckliches vermehren, so könnte der Zeit der beginnenden Altersrente vom 67sten auf das 70ste Lebensjahr verlegt wer dass die Versicherungsbank mit allen diesbezüglich ersparten dreijährigen Rent Mehrbedarf an Invalidenrenten zu decken im Stande wäre.

Die Grundlage dieser Form wäre mit Bezug auf diesen Umstand eine Pr zahlung bis zum vollendeten 70sten Lebensjahre, welche hinreichen würde, Versicherungsbank diejenigen Mittel zu bieten, ihren Verpflichtungen den Versi gegenüber nachkommen zu können. Die nachfolgenden Tabellen geben den Ga zur Berechnung der Prämien nöthigen allgemeinen Vorarbeiten an.

Die erste Tabelle behandelt die durch Multiplication der in den einzelnen A classen von 100.000 zehnjährigen Personen noch Lebenden L_x mit den denselben je entsprechenden Validitätscoëfficienten V_x, als Product sich ergebenden Vali einheiten L_x V_x bis zum 66sten Lebensjahre. Ferner durch Summirung dieser Pr von der Validitätsgrenze herab bis zum jeweiligen $(x + 1)$ten Lebensjahre die hungsweisen Summen der Validitätseinheiten $\Sigma\ (L_{x+1} \cdot V_{x+1})$ welche Division der entsprechenden Validitätseinheiten des $x$ten Lebensjahres $L_x \cdot V_x$ demselben entsprechende wahrscheinliche fernere Rüstigkeitsdauer ergeben.

Die zweite Tabelle behandelt die auf Grundlage der gefundenen ferneren scheinlichen Rüstigkeitsdauer, sich aus der Differenz zwischen dieser und der scheinlichen ferneren Lebensdauer ergebende wahrscheinliche mittlere Invaliditäts respective wahrscheinliche mittlere Validitäts-Ueberlebensdauer d_x für alle im Lebensjahre beigetretenen Personen.

Und schliesslich den während dieser jeweiligen Dauer entfallenden bezieh weisen Baarwerth zur Dotirung gleicher Jahresrenten 1.

Tabelle I.

Lebende L_x	Validitäts-Coëfficient V_x	Validitäts-Einheiten $L_x \cdot V_x$	Summe der Validitäts-Einheiten $\Sigma(L_x \cdot V_x)$	Wahrscheinliche fernere Rüstigkeitsdauer $v_x = \frac{\Sigma(L_{x+1} \cdot V_{x+1})}{L_x \cdot V_x}$
94620	+0·89263	84460·65	3,100.304·27	35·70708
93945	+0·91069	85554·77	3,015.843·62	34·25044
93268	+0·92461	86236 53	2,930.288·85	32·97977
92588	+0·93936	86973·46	2.844.052 32	31·70023
91905	+0·95504	87772·95	2,757.078·86	30·41149
91219	+0·96737	88242·52	2,669.305·91	29·24966
90529	+0·98094	88803·52	2,581.063·39	28·06487
89835	+0·99512	89396·61	2,492.259·87	26·87866
89137	+1·00652	89718·17	2,402.863·26	25·78235
88434	+1·01882	90098·33	2,313.145·09	24·67356
87726	+1·02788	90171·80	2,223 046·76	23·65346
87012	+1·03850	90361·96	2,132.874·96	22·60368
86292	+1·04581	90245·04	2,042.513·00	21·63203
85565	+1·05477	90251·14	1,952.267·96	20·63150
84831	+1·06076	89985·33	1,862.016·82	19·69240
84089	+1·06799	89806·21	1,772.031·49	18·73172
83339	+1·07671	89731·93	1,682.225·28	17·74726
82581	+1·06024	87555 68	1,592.493·35	17·18835
81814	+1·04983	85190 79	1,504.937·67	16·62717
81038	+1·06677	86448·91	1,419.746·88	15·42296
80253	+1·08550	87014·63	1,333.297·97	14·32268
79458	+1·10503	87803 47	1,246.283·34	13·19401
78653	+1·12670	88618·34	1,158.479·87	12·04493
77838	+1·13617	88437·20	1,069.861·53	11.10071
77012	+1·14093	87865 30	981.424·33	10.17078
76173	+1·12917	86012·27	893.659·03	9·38990
75316	+1·10146	82957 56	807.646·76	8·73567
74435	+1·06187	79040·29	724.689·20	8·16861
73526	+1·00594	73962·74	645.648·91	7·72938
72582	+0·94972	68932·58	571.686·17	7·29341
71601	+0 89132	63819 40	502.753·59	6·87776
70580	+0·83361	58836·19	438.934·19	6·43060
69517	+0·77483	53863·86	380.098·00	6·05664
68409	+0·70358	48131·20	326.234·14	5·77802
67253	+0·65822	44267·27	278.102·94	5·28236
66046	+0·59665	39406·35	233.835·67	4·93396
64785	+0·54152	35082·37	194.429·32	4·54208
63469	+0·49084	31153·12	159.346·95	4·11496
62094	+0·43167	26804·12	128.193·83	3·78262
60658	+0·38263	23209·57	101.389·71	3·36844
59161	+0·33732	19956·19	78180·14	2·91759
57600	+0·28461	16393·54	58223·95	2·55164
55973	+0·23957	12409·45	41830·41	2·37085
54275	+0·19415	10537·49	29420·96	1·79203
52505	+0·15037	7895·18	18883·47	1·39177
50661	+0·11000	5572·71	10988·29	0·97180
48744	+0·07178	3498·84	5415·58	0·54782
46754	+0·03658	1710·26	1916·74	0·12073
44693	+0 00462	206·48	206·48	0·00000

Tabelle II.

Lebens-alter x	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Wahrscheinliche fernere Rüstigkeits-dauer v_x	Wahrscheinliche Validitäts-Ueber-lebensdauer $w_x - v_x = d_x$	Baarwerth B_x für Jahresrente 1, währe mittleren Validitäts-lebensdauer
18	42·37112	35·70708	6 66404	5·98005
19	41·67567	34·25044	7·42523	6·57788
20	40·97818	32·97977	7·99841	7·00081
21	40·27914	31·70023	8·57891	7·42857
22	39·57848	30·41149	9·16699	7·85195
23	38·87612	29·24966	9·62646	8·17616
24	38·17244	28·06487	10·10757	8·50907
25	37·46732	26·87866	10·58866	8·83625
26	36·76072	25·78235	10·97837	9·11347
27	36·05294	24·67356	11·37938	9·36032
28	35·34390	23·65346	11·69044	9·56209
29	34·63394	22·60368	12·03026	9·77969
30	33·92291	21 63203	12·29088	9·94477
31	33·21115	20·63150	12·57965	10·12555
32	32·49850	19·69240	12·80610	10·26584
33	31 78526	18·73172	13·05354	10·41779
34	31·07131	17·74726	13·32405	10 58226
35	30·35651	17·18835	13·16816	10·46359
36	29·64332	16·62717	13·01615	10·39494
37	28·93116	15·42296	13·50820	10·69320
38	28·21733	14·32268	13·89465	10·92346
39	27·50168	13·19401	14·30767	11·16572
40	26·78417	12·04493	14·73924	11·41467
41	26·06461	11·10071	14·96390	11·54265
42	25·34417	10·17078	15·16339	11·65534
43	24·62329	9·38990	15·23339	11·69471
44	23·90350	8·73567	15·16783	11·65784
45	23·18642	8·16861	14·91781	11·51650
46	22·47307	7·72938	14·74369	11·43402
47	21·76535	7·29341	14·47194	11·26098
48	20·06356	6·87776	14·18580	11·09465
49	19·36826	6·43060	13·93766	10·94887
50	19·67972	6·05664	13·62308	10·76103
51	18·99846	5·77802	13·22044	10·51948
52	18·32526	5·28236	13·04290	10·41130
53	17·65992	4·93396	12·72596	10·21631
54	17·00366	4·54208	12·46158	10·05179
55	16·35622	4·11496	12·24126	9·91340
56	15·71744	3·78262	11·93482	9·71890
57	15·08953	3·36844	11·72109	9·58184
58	14·47136	2·91759	11·55377	9·47374
59	13·86285	2·55164	11·31121	9·31576
60	13·26652	2·37085	10·89567	9·04163
61	12·68157	1·79203	10·88954	9·02480
62	12·10908	1·39177	10·71731	8·90206
63	11·54983	0·97180	10·57803	8·82903
64	11·00406	0·54782	10·45624	8·74683
65	10·47244	0·12073	10 35171	8·67595
[illegible]	9·95536	0·00000	9·95536	8·40457

Dr. Ludwig Grossmann's

xionen über den Einfluss der Veränderung des Provisions-entes auf das Gewinnerträgniss beim Boden- und Hypothekar-Credit.

II.

Für die specielle Voraussetzung einer auf Grundlage fixer Pfandbriefverzinsung ngleichem Darlehenszinsfusse sich ergebenden Verschiedenartigkeit der den igen Darlehensgeschäften entsprechenden Provisionspercente, wurde in der n Abhandlung diejenige Form ermittelt, welche es ermöglicht, mit Hilfe der ngerung der Tilgungsfrist den beziehungsweisen, durch Kürzung des Provisions-tes bewirkten Ausfall an dem zur Zeit der Darlehenscontrahirung sich nden Baarwerthe der gesammten jährlichen Provisionsgewinne, wieder in der zu ergänzen, dass für gleich grosse Darlehensbeträge unter obgenannten ver-nartigen Verzinsungsmodalitäten die jeweiligen auf den Zeitpunkt der Dar-contrahirung berechneten Baarwerthe der während der Tilgungsfrist flüssig den jährlichen Provisionsgewinne ebenfalls vollständig miteinander überein-en.

Die diesbezüglich giltige Form 18)

$$x = \underset{m>n}{\mathrm{E}}\left(\frac{lg\,\frac{q}{p'}\left[1+\frac{g}{A}\cdot\frac{(1+q)^n-1}{(1+q)^n\cdot q}\right]-lg\,\frac{(1+q)^m-1}{(1+p')^m-1}}{lg\,(1+p')-lg\,(1+q)}\right)$$

cher A das Darlehenscapital gleicher Höhe bei zweien Darlehensgeschäften und

$$g = R - R' = A\left(\frac{(1+p)^n\cdot p}{(1+p)^n-1}-\frac{(1+q)^n\cdot q}{(1+q)^n-1}\right)$$

ährlichen Provisionsgewinn für den bei günstigerem Provisionspercente abge-enem Darlehensgeschäfte darstellt, liefert demnach in Folge der vollzogenen itution

$$x = \underset{m>n}{\mathrm{E}}\left(\frac{lg\left[\frac{p}{p'}\cdot\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^n\cdot\frac{(1+q)^n-1}{(1+p)^n-1}\right]-lg\,\frac{(1+q)^m-1}{(1+p')^m-1}}{lg\,(1+p')-lg\,(1+q)}\right)$$

ntsprechende endgiltige Form der Ersatzgleichung, in welcher p und p' die henszinsfüsse, q den gemeinschaftlichen Pfandbriefzinsfuss und n, beziehungs-x, dessen Näherungswerth m darstellt, die correspondirenden Tilgungsfristen sentiren.

Der relative Ertragswerth zweier oder mehrerer, unter verschiedenartigen Ver-ngsmodalitäten abgeschlossenen, auf gleichem Pfandbriefzinsfusse beruhenden hensgeschäfte, lässt sich daher in dieser Form vollständig zum Ausdrucke

bringen, und zwar in dem Sinne, als die jeweilig resultirende Tilgungsfrist Bezug auf diejenige, innerhalb welcher ein den percentuell normalen Ertrags bietendes Darlehen zur Tilgung gelangt, eine kürzere oder längere ist. Zugrundelegung gleich grosser Darlehensbeträge verhalten sich daher die Form jeweilig entspringenden Tilgungsfristen im umgekehrten Verhältnisse der Grund der jeweiligen Provisionspercente sich ergebenden absoluten Ertrags Der praktische Werth, welcher auf Grund dieses Umstandes obiger Form inne lässt sich also unschwer ermessen.

Diesbezüglich mag zur besseren Erläuterung folgendes Beispiel durchg werden:

Es sei ein Darlehen, welches innerhalb einer Dauer 30 Jahren in jährlichen gleichen Annuitäten zu tilgen mit einem Darlehenszinsfusse von 5 Percent auf eine H thek geliehen worden; es soll nun ein zweites Darleh geschäft auf Grundlage einer 4·8percentigen Verzin zum Abschlusse gelangen, und zwar derart, dass für b Darlehensgeschäfte, denen gleich hoch verzinsliche zwar 4percentige Pfandbriefe zugrunde gelegt sind relativ gleich hoher Ertragswerth sich ergibt. We Tilgungsfrist wird bei diesem festgesetzt werden mü um einer solchen Anforderung zu entsprechen?

Für diese Frage werden daher die in Form 19) vorkommenden Grösse folgenden Werthen correspondiren:

$$p = 0{\cdot}05 \quad , \quad p' = 0{\cdot}048 \quad , \quad q = 0{\cdot}04 \quad , \quad n = 30 \quad , \quad \text{und } x = ?$$

Diesen leistet nun nachstehende, der genannten Form entspringende B Genüge, und zwar wird die Gleichung

$$x = \underset{m>30}{\mathrm{E}} \left(\frac{lg \left[\frac{0{\cdot}05}{0{\cdot}048} \cdot \left(\frac{1{\cdot}05}{1{\cdot}04} \right)^{30} \cdot \frac{(1{\cdot}04)^{30} - 1}{(1{\cdot}05)^{30} - 1} \right] - lg \, \frac{(1{\cdot}04)^m - 1}{(1{\cdot}048)^m - 1}}{lg \, 1{\cdot}048 - lg \, 1{\cdot}04} \right)$$

nach vollzogener Durchführung in diejenige von der Form

$$x = \underset{m>30}{\mathrm{E}} \left(\frac{0{\cdot}9719249 - 1 - lg \, \frac{(1{\cdot}04)^m - 1}{(1{\cdot}048)^m - 1}}{0{\cdot}003328} \right) = 41{\cdot}486$$

übergehen. Das auf Grundlage eines 4·8percentigen Darlehenszinsfusses abzuschli Geschäft wird demnach bei einer Tilgungsfrist von 41·5 Jahren relativ den g Ertragswerth liefern, wie das auf Grund eines 5percentigen Darlehenszinsfuss 30jähriger Tilgungsfrist abgeschlossene, und zwar ohne Rücksicht auf die jew Darlehensbeträge.

Würde man jedoch die entsprechenden Darlehen gleich gross annehm müssten die beziehungsweisen, für den Zeitpunkt der jeweiligen Darlehenscontra

ten Baarwerthe sämmtlicher während der entsprechenden Tilgungsfristen rerdenden jährlichen Provisionsgewinne miteinander im Werthe vollständig immen.

mmt man daher die beiden Darlehenscapitalien mit je 100.000 Gulden an n die beiden Baarwerthe auf folgendem Wege zur Ermittlung gelangen.

die auf Grund des Darlehenszinsfusses $P = 100\,p = 5$ Percent bei einer frist von 30 Jahren sich ergebende Annuität der Form 2) der vorigen Ab- gemäss

$$R = 100{,}000\,\frac{(1{\cdot}05)^{30}\,.\,0{\cdot}05}{(1{\cdot}05)^{30} - 1} = 6{,}505{\cdot}145$$

enige auf Grund des Pfandbriefzinsfusses $Q = 100\,q = 4$ Percent für die Tilgungsfrist nach Form 3)

$$R_1 = 100{,}000\,\frac{(1{\cdot}04)^{30}\,.\,0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^{30} - 1} = 5{,}783{\cdot}015$$

ergibt sich als Werth des jährlich gleich grossen Provisionsgewinnes der entsprechend

$$g = 6{,}505{\cdot}145 - 5{,}783{\cdot}015 = 722{\cdot}13$$

Folge dessen der Baarwerth sämmtlicher Provisionsgewinne während der Tilgungsfrist für den Zeitpunkt der Darlehenscontrahirung berechnet laut

$$K = 722{\cdot}13\,.\,\frac{(1{\cdot}04)^{30} - 1}{(1{\cdot}04)^{30}\,.\,0{\cdot}04} = 12{,}487{\cdot}08$$

sich ergebende Resultat einerseits.

n ist ferner die auf Grund des Darlehenszinsfusses von $P' = 100\,p' = 4{\cdot}8$ bei einer Tilgungsfrist von 41·5 Jahren sich ergebende Annuität gemäss der

$$R' = 100{,}000\,\frac{(1{\cdot}048)^{41\cdot5}\,.\,0{\cdot}048}{(1{\cdot}048)^{41\cdot5} - 1} = 5{,}600{\cdot}22$$

nige auf Grund desselben Pfandbriefzinsfusses wie oben $Q = 100\,q = 4$ Per- einer Tilgungsfrist von 41·5 Jahren nach Form 10)

$$R'_1 = 100{,}000\,\frac{(1{\cdot}04)^{41\cdot5}\,.\,0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^{41\cdot5} - 1} = 4{,}977.54$$

nach ergibt sich als Werth für den jährlichen während der ganzen Tilgungs- ig werdenden Provisionsgewinn laut Form 11)

$$g' = 5{,}600{\cdot}22 - 4{,}977{\cdot}54 = 622{\cdot}68$$

t schliesslich der Baarwerth sämmtlicher jährlich entfallenden Provisions- im Zeitpunkte der Darlehenscontrahirung entsprechend der Form 12)

$$K' = 622\cdot68 \frac{(1\cdot04)^{41\cdot5} - 1}{(1\cdot04)^{41\cdot5} \cdot 0\cdot04} = 12{,}509\cdot85$$

als das sich ergebende Resultat andererseits.

Wie ersichtlich, stimmen die Werthe K und K' miteinander nahezu volls[illegible] überein, da man die sich zwischen beiden ergebende Differenz von 22·77 auf [illegible] nung des Fehlers setzen muss, welcher durch Abrundung der gefundenen Tilg[illegible] frist $x = 41\cdot486$ auf 41·5 sich ergibt, indem derselbe schon bei der Berec[illegible] der bezüglichen Annuitäten seinen Einfluss übt und in Folge dessen auf den [illegible] ergebenden Baarwerth doppelt einwirkt.

In dieser Weise gibt sich nun die Uebereinstimmung der absoluten Er[illegible] werthe bei zwei auf verschiedenen Verzinsungsgrundlagen abgeschlossenen Darl[illegible] geschäften kund. Inwiefern dagegen die Form 18) die relative Gleichwerth[illegible] der Erträgnisse zweier mit verschiedenartigen Darlehenszinsfüssen abgeschl[illegible] Geschäfte zum Ausdrucke bringt, mag in nachfolgenden Auseinandersetzungen [illegible] werden.

In der genannten Form ist nebst den Zinsfüssen p' und q und der Tilg[illegible] frist n nur noch das Verhältniss $g : A$ als bestimmender Factor massgeben[illegible] nun g als jährlich gleichbleibender Provisionsgewinn in seiner absoluten Höhe [illegible] Anderem auch von der Höhe des Darlehens A direct abhängt und durch da[illegible] hältniss $g : A$ der durch diese letztere Abhängigkeit hervorgebrachte Einfluss [illegible] Form 18) eliminirt wird, so wird im Rahmen dieser Form für g blos dess[illegible] hängigkeit von den übrigen Grössen in Rechnung kommen, oder mit anderen W[illegible] Die relative Gleichwerthigkeit der Erträgnisse wird durch die Form 18) ohne [illegible] sicht auf die Höhe des Darlehenscapitales regulirt.

Dies wird schon durch den Umstand bestätigt, dass die Form 18) durch [illegible] stitution des entsprechenden Werthes für obiges Verhältniss in die von A [illegible] vollständig unabhängige Relation 19) übergeht, in welcher das Verhältniss [illegible] durch eine Function des Zinsfusses $P = 100p$ ersetzt ist, so dass die g[illegible] die Ertragswerthe relativ regulirende Tilgungsfrist x ausschliesslich von der [illegible] spondirenden Tilgungsfrist n, den beziehungsweisen Darlehenszinsfüssen $P' =$ [illegible] und $P = 100p$, wie auch von dem die gemeinschaftliche Grundlage bil[illegible] Pfandbriefzinsfusse $Q = 100q$ abhängig ist.

Mithin ist der diesbezüglichen Anforderung in Betreff der Untersuchu[illegible] Gleichwerthigkeit der Erträgnisse bei Boden- und Hypothekar-Darlehen [illegible] entsprochen.

---

ie Prämienberechnung für die Alters- und Invaliditätsrente.

II.

Wenn man die in der vorigen Abhandlung ermittelte wahrscheinliche fernere istigkeitsdauer näher betrachtet, so findet man, dass in dieselbe auch die Sterbhkeit miteinbezogen ist; jedoch blos bis zur Grenze des 66. Lebensjahres, was nen Grund darin hat, dass von da ab die fernere Sterblichkeit diesbezüglich insorne irrellevant ist, als mit der Erreichung dieses Alters ohnehin die mittlere Invaität beginnt. Da nun überdies der Grad der Invalidität hier ausser Betracht kommt, d schon das Vorhandensein derselben genügt, um die Rüstigkeit zu negiren, so ssen unwillkürlich auch alle Todten, vermöge ihrer mathematisch äussersten Grenze r Invalidität in die Kategorie der nichtrüstigen fallen, und zwar schon aus dem unde, weil durch die blosse Berücksichtigung der Lebenden und ihrer jeweiligen hrscheinlichen Validität, die Todten rechnungsmässig mit der Validität von Null ennzeichnet werden. Es ist somit eine gewisse Gleichwerthigkeit der invalid wordenen und der Todten bei der mathematischen Ermittlung der ferneren wahreinlichen Rüstigkeitsdauer v_x vorausgesetzt; und kann man daher dieselbe im ntlichen Sinne des Wortes als wahrscheinliche fernere Lebensdauer rüstigen Zustande ansehen. Nun äussert sich aber w_x als wahrscheinliche ere Lebensdauer im Allgemeinen, also ohne Rücksicht auf die Rüstigkeit des viduums, wohingegen v_x die wahrscheinliche fernere Lebensdauer im rüstigen ande bezeichnet; es muss daher offenbar die Differenz der beiden $w_x - v_x = d_x$ mittlere Invaliditätsdauer, beziehungsweise die mittlere Validitäts-Ueberlebensdauer tellen. Was nun den relativen Verlauf derselben anbelangt, so mag folgende einandersetzung die verschiedenen Einflüsse näher beleuchten, welche sich diesiglich hier geltend machen.

Der Tabelle II in der vorigen Abhandlung kann man entnehmen, dass die tlere wahrscheinliche Gesammtlebensdauer des Menschen im rüstigen Zustande, che in der Summe des jeweiligen Alters x und der entsprechenden wahrscheinien ferneren Rüstigkeitsdauer v_x^*'zum Ausdrucke gelangt, beiläufig bis zum Alter 40 Jahren einer fast unmerklichen Veränderung unterworfen ist, indem dieselbe ischen 52. und 54. Lebensjahren variirt und erst von da ab in continuirlichem ne einen steigenden Verlauf bis zur Grenze des 66. Lebensjahres nimmt. Dars geht hervor, dass insolange, als die Sterblichkeit eine mässige ist, die Validitätsberlebensdauer d_x angesichts der zunehmenden allgemeinen mittleren Gesammtbensdauer W_x gegenüber der nahezu constanten mittleren Gesammtlebensuer im rüstigen Zustande, einem steigenden Verlaufe unterworfen sein muss; hingen zu Beginn der intensiveren Sterblichkeit, wo die Zunahme der mittleren allmeinen Gesammtlebensdauer W_x von derjenigen einer solchen im rüstigen Zustande

sogar relativ übertroffen wird, der Verlauf der Validitäts-Ueberlebensdauer d ebenso rapid abnehmender wird.

Da nun ferner die wahrscheinliche fernere Lebensdauer im Zustande der Rü keit v_x schon im 66. Lebensjahre Null wird, wohingegen w_x als wahrschei fernere Lebensdauer im Allgemeinen in diesem Alter noch nahezu zehn Jahre r sentirt und nur langsam bis zur äussersten Altersgrenze abnimmt, so wird vo ab die wahrscheinliche fernere Invaliditätsdauer mit der wahrscheinlichen fe Lebensdauer identisch sein. In Folge dessen müssen vom 66. Lebensjahre fangen sämmtliche noch lebende Personen im Durchschnitte als invalide in Kräfteverfalles betrachtet werden, und kann man also dieses Alter als mittleren punkt der beginnenden Invalidität ansehen. Einer jeden im $x$ten Lebensjahr getretenen Person entspricht nun bekanntlich eine vom genannten Zeitpunkt ginnende durchschnittliche Invaliditätsdauer von d_x Jahren. Ermittelt man dah im Momente des Flüssigwerdens sich ergebenden jeweiligen Baarwerth der wä d_x Jahren laufenden Invalidenrente und multiplicirt denselben mit der Anzahl im Alter x beigetretenen Personen, so erhält man den Gesammtbaarwert 66. Lebensjahre für alle an diese Personen zu entfallenden Invalidenrenten, und nach Massgabe desjenigen Zeitpunktes, in welchem deren jeweilige Invalidität wi eintritt einerseits, und nach Maassgabe der wahrscheinlicherweise sich ergeb jeweiligen mit dem Tode endenden Rentenbezugsdauer andererseits. Es muss eine jede im $x$ten Lebensjahre beigetretene Person für den im 66sten Leben sich ergebenden Baarwerth B_x einer zum selben Zeitpunkte beginnenden und d_x Jahren laufenden Jahresrente aufkommen, und braucht man daher blos entsprechenden Baarwerth vom 66. Lebensjahre jeweilig auf den Zeitpunk Beitrittes zu discontiren um die einmalige Prämie für eine im Falle der Inva beginnende und bis zum Tode fortlaufende Jahresrente festzustellen. Zum Resultate gelangt man aber auch auf folgendem Wege: Zieht man nämlich i tracht, dass alle im $x$ten Lebensjahre beigetretenen Personen der wahrschein ferneren Lebensdauer w_x gemäss schon im $x + w_x$ten Lebensjahre durchsc lich verstorben sein müssten, nachdem dieselben der ferneren wahrscheinlichen L dauer im Zustande der Rüstigkeit v_x entsprechend seit ihrem $x + v_x$ten L jahre invalid waren, so gelangt man zu dem Schlusse, dass alle der Sterblich tafel gemäss im $x + w_x$ten Lebensjahre noch Lebenden seit ihrem $x +$ Lebensjahre die Invalidenrenten zu beziehen haben würden; dieser Bezug jedoc dem $x + w_x$ten Lebensjahre aufzuhören hätte. Die einmalige Prämi einen solchermassen begrenzten während d_x Jahren laufenden jährlichen Renten für alle im $x + w_x$ten Lebensjahre noch lebenden Personen ist nun volls identisch mit dem auf den Zeitpunkt des Beitrittsalters discontirten Baarwert im 66. Lebensjahre beginnenden und während d_x Jahren laufenden Jahre gleicher Höhe.

Im Nachfolgenden sind die zur diesfälligen Berechnung nöthigen, aus der lichkeitstafel der 17 englischen Gesellschaften und auf Grund eines vierperce Zinsfusses resultirenden Hilfstafeln angeführt.

Tabelle III

(…uf Grund der Sterblichkeitstafeln' der 17 englischen Gesellschaften und eines 4percentigen Zinsfusses berechnet).

Alter x	L_x	$\frac{L_x}{r^x}$	$\Sigma\left(\frac{L_x}{r^x}\right)$	R_x	${}_{10}R_x$
10	100000	67556·42	1381771		
11	99324	64518·98	1314215		
12	98650	61616·50	1249696		
13	97978	58843·05	1188080		
14	97307	56192·37	1129237		
15	96636	53658·54	1073045		
16	95965	51236·50	1019386		
17	95293	48920·88	968149		
18	94620	46707·09	919228·1	19·68073	19·32019
19	93945	44590·28	872521·0	19·56754	19 18997
20	93268	42566·30	827930·7	19·45040	19·05480
21	92588	40630·73	785364·4	19·32935	18 91485
22	91905	38779·81	744733·7	19·20418	18·76993
23	91219	37009·95	705953·9	19·07473	18·61969
24	90529	35317·31	668943·9	18·94099	18·46415
25	89835	33698·62	633626·6	18·80277	18·30304
26	89137	32150·76	599928·0	18·66049	18·13605
27	88434	30670·38	567777·2	18·51225	17·96316
28	87726	29254·64	537106·8	18·35974	17·78409
29	87012	27900·52	507852·2	18·20227	17·59866
30	86292	26605·43	479951·7	18·03963	17·40667
31	85565	25366·62	453346·3	17·87178	17·20788
32	84831	24181·75	427979·7	17·69847	17·00207
33	84089	23048·30	403797·9	17·51965	16·78901
34	83339	21964·17	380749·6	17·33505	16·56834
35	82581	20927·30	358785·4	17·14439	16·33966
36	81814	19935·51	337858·1	16·94756	16·10283
37	81038	18986·95	317922·6	16·74428	15·85737
38	80253	18079·83	298935·6	16·53422	15·60280
39	79458	17212·24	280855·8	16·31723	15·33885
40	78653	16382·56	263643·6	16·09295	15·06504
41	77838	15589·23	247261·0	15·86102	14·78078
42	77012	14830·58	231671·8	15·62123	14·48574
43	76173	14104·82	216841·2	15·37356	14·17962
44	75316	13409·74	202736·4	15·11860	13·86276
45	74435	12743·15	189326·7	14·85713	13·53566
46	73526	12103·40	176583·6	14·58959	13·19827
47	72582	11488·46	164480·2	14·31699	12·85116
48	71601	10897·30	152991·7	14.03942	12·49410
49	70580	10328.76	142094·4	13.75717	12·12672
50	69517	9781·919	131765·6	13·47033	11·74882
51	68409	9255·778	121983·7	13·17920	11·35982
52	67253	8749·395	112727·9	12·88409	10·95939
53	66046	8261·892	103978·5	12·58533	10·54710
54	64785	7792·452	95716·64	12·28326	10·12223
55	63469	7340·540	87924·19	11·97790	9·68376

Alter x	L_x	$\frac{L_x}{r^x}$	$\Sigma\left(\frac{L_x}{r^x}\right)$	R_x	$_{70}R_x$
56	62094	6905·301	80583·65	11·66983	9·231
57	60658	6486·161	73678·35	11·35932	8·762
58	59161	6082·776	67192·19	11·04631	8.277
59	57600	5694·498	61109·41	10·731311	7·774
60	55973	5320·816	55414·91	10·414743	7.249
61	54275	4960·965	50094·09	10·097656	
62	52505	4614·595	45133·13	9·780520	
63	50661	4281·278	40518·53	9·464125	
64	48744	3960·841	36237·25	9·148883	
65	46754	3653·017	32276·41	8·835554	
66	44693	3357·679	28623·39	8·524760	
67	42565	3074·814	25265·71	8·216995	
68	40374	2804·366	22190·90	7·912987	
69	38128	2546.500	19386·54	7·613018	
70	35837	2301·431	16840·04	7·317206	
71	33510	2069·223	14538·61		
72	31159	1850 048	12469·39		
73	28797	1644·044	10619·34		
74	26439	1451·369	8975·291		
75	24100	1272·087	7523·922		
76	21797	1106·275	6251·835		
77	19548	953·9710	5145·560		
78	17369	815.0313	4191·589		
79	15277	689·2935	3376.558		
80	13290	576·5778	2687·264		
81	11424	476.5601	2110·686		
82	9694	388·8385	1634·126		
83	8112	312·8678	1245·288		
84	6685	247 9139	932·4197		
85	5417	193·1635	684·5058		
86	4306	147·6409	491·3423		
87	3348	110·3786	343·7014		
88	2537	80·42417	233·3228		
89	1864	56·81704	152·89863		
90	1319	38·65843	96·08159		
91	892	25·13800	57·42316		
92	570	15·44570	32·28516		
93	339	8·832815	16·839461		
94	184	4 609820	8·006646		
95	89	2·143990	3·396826		
96	37	0·8570403	1·2528358		
97	13	0·2895406	0·3957955		
98	4	0 08566288	0·10625492		
99	1	0·02059204	0·02059204		

Dr. Ludwig Grossmann's

Prämienberechnung für die Alters- und Invaliditätsrente.

III.

Nachdem in den bisherigen Auseinandersetzungen die nöthigen Vorarbeiten zur Berechnung der Prämie vorausgeschickt wurden, so kann man nunmehr zur endlichen Ermittlung der gesuchten Resultate schreiten. Hiezu soll nun die Tabelle III, in welcher x das Alter, L_x die Lebenden, $L_x : r^x$ die discontirten Zahlen derselben, $\Sigma (L_x : r^x)$ deren Summen und R_x die Mise für eine lebenslängliche, ${}_{70}R_x$ diejenige für eine bis zum 70sten Lebensjahre laufende Jahresrente darstellt, die nöthige Handhabe liefern. Demnach wird der in den Tabellen I und II dargestellte Factor B_x, welcher den Baarwerth einer während d_x Jahren laufenden Jahresrente zum Zeitpunkte des beginnenden Rentenbezuges darstellt, mit der Anzahl der im $x$ten Lebensjahre lebenden Personen L_x multiplicirt; und da der Beginn dieses Rentenbezuges im mittleren Zeitpunkte der Invalidität des Menschen, das ist im 67sten Lebensjahre rechnungsmässig sich ergibt, so werden alle in diesem Alter noch lebenden Personen an dem in $L_x \,.\, B_x$ dargestellten Capitale in dem Maasse participiren, als ihre Invalidität in Wirklichkeit früher oder später eintritt, beziehungsweise als dieselben das, die Altersrente involvirende Alter überleben. Es muss daher eine jede im $x$ten Lebensjahre beitretende Person mit ihrer einmaligen Prämie für ein auf $(67 - x)$ Jahre discontirtes Capital B_x aufkommen, um im Falle des Erlebens ihrer Invalidität die entsprechende, bis zum Tode laufende Jahresrente beziehen zu können.

Es ist daher die einmalige Prämie

$$P_x = \frac{B_x}{r^{67-x}} = B_x \,.\, \frac{r^x}{r^{67}}$$

Um nun diese Form durch die in Tabelle III gebotenen Zahlen zur Darstellung zu bringen, so mag folgendermassen vorgegangen werden.

Da uns zu Gebote stehen die Zahlen $D_x = \frac{L_x}{r^x}$ und $D_{67} = \frac{L_{67}}{r^{67}}$ so ist

$$\frac{L_x}{r^{67}} = \frac{D_{67}}{L_{67}} \,.\, L_x \text{ und demgemäss 3) } P_x = \frac{D_{67}}{L_{67}} \,.\, r^x \,.\, B_x = \frac{r^x}{r^{67}} \,.\, B_x$$

gesuchtes Resultat.

Zu demselben Resultate müsste man gelangen, wenn man den auf d_x Jahre aufgezinsten Baarwerth B_x mit den discontirten, im $x + w_x$ten Lebensjahre Lebenden $L_{x + w_x}$ multipliciren und durch die discontirten im $x$ten Lebensjahre Lebenden L_x dividiren würde; d. h. es ist auch

$$P_x = \frac{B_x \,.\, r^{d_x} \,.\, \frac{L_{x + w_x}}{r^{x + w_x}}}{\frac{L_x}{r^x}}$$

der Werth der ensprechenden einmaligen Prämie, wie dies in der vorigen Abhandlung über dieses Thema zur Genüge erklärt worden ist. Da nun w_x neben einer bestimmten Anzahl ganzer Jahre auch Bruchtheile derselben in sich schliesst, so müsste die Anzahl der Lebenden im $x + w_x$ten Lebensjahre jedesmal ermittelt

werden, wodurch die Rechnung sich complicirt gestalten würde. Es ist daher d
in der Form 1) ausgedrückte Werth der einmaligen Prämie dem letzteren der Ei
fachheit halber vorzuziehen. Freilich würde, genau genommen, das Alter des mi
leren Invalididätsbeginnes in der Form 1) eigentlich zwischen dem 66sten und 67s
Lebensjahre liegen müssen; wenn nun dieser Zeitpunkt auf das 67ste Lebensj
abgerundet wurde, so geschah dies ebenfalls aus Gründen der Vereinfachung
Rechnung; abgesehen davon, dass diese Abrundung hier nicht so schwer in's Gew
fällt, weil dieselbe für alle Altersclassen von gleichmässigem Einflusse ist, wog
dies bei der Form 4) durchaus nicht der Fall wäre.

Soll nun aus der einmaligen Prämie die jährliche ermittelt werden, so m
vor allen Dingen festgestellt sein, bis zu welchem Lebenszeitpunkte dieselbe
zahlen ist. Setzt man daher die Prämienzahlung bis zum 70sten Lebensjahre
aus, so braucht man nur die einmalige Prämie durch die jeweilige Mise einer
zum 70sten Lebensjahre laufenden Jahresrente zu dividiren, um die entsprech
jährliche Prämie festzustellen.

Demgemäss ist 5) $p_x = \frac{B_x}{{}_{70}R_x} \cdot \frac{r^x}{r^{67}}$ worin ${}_{70}R = \frac{\Sigma \frac{L_x}{r^x} - \Sigma \frac{L_{70}}{r^{70}}}{\frac{L_x}{r^x}}$

die Mise bezeichnet.

Setzt man ferner voraus, dass sämmtliche im 70sten Lebensjahre leb
Personen vom Beginne dieses Jahres an die Altersrente zu beziehen haben, so
die Invaliditätsrente um den Betrag der zu zahlenden jährlichen Prämie ger
sein, als die entsprechende Altersrente.

Demgemäss wird eine jede, die Invalidenrente beziehende Person vom B
ihres 70sten Lebensjahres an um den Betrag der jährlichen Prämie mehr an
beziehen, so dass die Invalidenrente durch diesen Zuwachs auf die Alter
ergänzt wird. Daraus geht hervor, dass sich die Begriffe Alters- und Invaliden
durchaus nicht trennen lassen, da die Invalidität, insofern dieselbe nicht durch
Unfall hervorgebracht wurde, als eine durch vorzeitigen Kräfteverfall hervorgeb
Arbeitsunfähigkeit betrachtet werden muss. Dem mittleren Zeitpunkte der a
mein eintretenden Invalidität im Alter von 67 Jahren gemäss, müsste nun
Altersrente schon zu diesem Zeitpunkte flüssig werden. Da jedoch drei Jahresr
als Aequivalent für die durch Unfall invalid Gewordenen in Rechnung gezogen
den, so erlangt die hier angeführte Prämie, unter der Voraussetzung der er
70sten Lebensjahre flüssig werdenden Altersrente, allgemeine Giltigkeit; mag
Invalidität durch welche Umstände immer hervorgebracht worden sein.

Eine jede versicherte Person hat also einen Anspr
auf die im 70sten Lebensjahre unter allen Umständen
ginnende und bis zum Tode fortlaufende Altersre
welche aber im Falle einer etwa früher eintretenden In
lidität schon von diesem Zeitpunkte an flüssig wird, jed
mit Abzug der jährlichen Prämie.

Nachfolgende Tabellen stellen die den verschiedenen Altersclassen entspr
den einmaligen und jährlichen Prämien, sowie den Gang für deren Berechnung

Tabelle IV

L_x	$\frac{L_x}{r^x}$	$\frac{L_x}{r^{67}}$	$\frac{L_x}{r^{67}} \cdot B_x$
94620	46707·09	6835·17	4,087.466
93945	44590·28	6786·41	4,464.017
93268	42566·30	6737·50	4,716.798
92588	40630·73	6688·38	4,968.510
91905	38779·81	6639·04	5,212.943
91219	37009·95	6589·49	5,387.671
90529	35317·31	6539·64	5,564.627
89835	33698·62	6489·51	5,734.295
89137	32150·76	6439·09	5,868.243
88434	30670·38	6388·30	5,979.658
87726	29254·64	6337·16	6,059.647
87012	27900·52	6285·58	6,147.104
86292	26605·43	6233·57	6,199.141
85565	25366·62	6181·05	6,258.660
84831	24181·75	6128·03	6,290.941
84089	23048·30	6074·43	6,328·218
83339	21964·17	6020·25	6,370.787
82581	20927·30	5965·49	6,242.046
81814	19935·51	5910·09	6,143.499
81038	18985·95	5854·03	6.259.831
80253	18079·83	5797·32	6,332.687
79458	17212·24	5739·90	6,409.004
78653	16382·56	5681·74	6,485.523
77838	15589·23	5622·87	6,490.280
77012	14820·58	5563·20	6.484.099
76173	14104·82	5502·59	6,435.122
75316	13409·74	5440·69	6.342.649
74435	12743·15	5377·04	6,192.469
73526	12103·40	5311·38	6,073.040
72582	11488·46	5243·19	5,904.340
71601	10897·30	5172·32	5,738.570
70580	10328.76	5098·57	5,582.353
69517	9781·919	5021·78	5,403.947
68409	9255·778	4941·74	5,198.448
67253	8749·395	4858·23	5,058.047
66046	8261·892	4771·04	4,874.244
64785	7792·452	4679·95	4,704.185
63469	7340·540	4584·88	4,545.175
62094	6905·301	4475·24	4,349.433
60658	6486·161	4381·82	4,198.586
59161	6082·776	4273·68	4,048.773
57600	5694·498	4160·92	3,876.207
55973	5320·816	4043·38	3,655.877
54275	4960·965	3920·72	3,538.372
52505	4614·595	3792·86	3,376.427
50661	4281·278	3659·66	3,231.120
48744	3960·841	3521·17	3,079.910
46754	3653·017	3377·42	2,930.231
44693	3357·679	3228·54	2,713.448
42565	*3074·814*		

Tabelle V

der Prämien für die Alters- und Invaliden-Versicherung.

Beitritts-Alter x	$\frac{L_x}{r^x}$	$\frac{L_x}{r^{67}} \cdot B_x$	Einmalige Prämie in Percenten der Rente P_x	${}_{70}R_x$	Jährliche Prämie in Percenten der Rente p_x
18	46707·09	4,687.466	87·513	19·32019	4·530
19	44590·28	4,464.017	104·872	19·18997	5·193
20	42566·30	4,716.798	110·811	19·05480	5·815
21	40630·73	4,968.510	122·285	18·91485	6·465
22	38779·81	5,212.943	134·424	18·76993	7·162
23	37009·95	5,387.671	145·574	18·61969	7·818
24	35317·31	5,564.627	157·561	18·46415	8·533
25	33698·62	5,734 295	170·164	18·30304	9·297
26	32150·76	5,868.243	182·523	18·13[illegible]05	10·064
27	30670·38	5,979.658	194·965	17·96316	10·854
28	29254·64	6,059.647	207·134	17·78409	11·647
29	27900·52	6,147.104	220·322	17·59866	12·519
30	26605·43	6,199.141	233·003	17·40667	13·386
31	25366·62	6,258.660	246·728	17·20788	14·338
32	24181·75	6,290.941	260·152	17·00207	15·301
33	23048·30	6,328.218	274·563	16·78901	16·354
34	21964·17	6,370.787	290·054	16·56834	17·507
35	20927·30	6,242.046	298·273	16·33966	18·255
36	19935·51	6,143.499	308·169	16·10283	19·138
37	18986·95	6,259.831	329·691	15·85737	20·791
38	18079·83	6,332.687	350·262	15·60280	22·449
39	17212·24	6,409.004	372·352	15·33885	24·275
40	16382·56	6,485.523	395·880	15·06504	26·278
41	15589·23	6,490.280	416·331	14·78078	28·167
42	14830·58	6,484.099	437·211	14·48574	30·182
43	14104·82	6,435.122	456·236	14·17962	32·175
44	13409·74	6,342.649	472·988	13·86276	34·119
45	12743·15	6,192.469	485·945	13·53566	35·901
46	12103·40	6,073.040	501·763	13·19827	38·017
47	11488·46	5,904.340	513·937	12·85116	40·923
48	10897·30	5,738.570	526·599	12·49410	42·148
49	10328·76	5,582.353	540·716	12·12672	44·568
50	9781·919	5,403.947	552·443	11·74882	47·021
51	9255·778	5,198.448	561·644	11·35982	49·441
52	8749·395	5,058.047	578·102	10·95939	52·750
53	8261·892	4,874.244	589·967	10·54710	55·936
54	7792·452	4,704.185	603·685	10·12223	59·640
55	7340·540	4,545.175	619·188	9·68376	63·941
56	6905·301	4 349.433	629·869	9·23117	68·233
57	6486·161	4,198.586	647·315	8·76297	73·869
58	6082·776	4,048.773	665·613	8·27780	80·419
59	5694·498	3 876 207	680·694	7·77400	87·560
60	5320·816	3,655 877	687·090	7·24983	94·773

Dr. Ludwig Grossmann's

ersuchungen über die gemeinschaftliche Grundlage der ebens-, Renten-, Invaliditäts- und Altersversicherung.

enn wir die Beschaffenheit der Prämienermittlung bei der Invaliditäts- und rsicherung näher in Betracht ziehen, so drängt sich uns unwillkürlich eine Analogie mit derjenigen der Lebens- und Rentenversicherung auf. Diese nung ist jedoch keine zufällige; denn es besteht thatsächlich eine gewisse ame Grundlage, welche diese beiden Disciplinen des Versicherungswesens et. Die bisherigen Auseinandersetzungen in Betreff dieser Frage haben uns belehrt, dass es insbesondere die aufgeschobene Leibrente ist, welche mit dem der Altersversicherung als vollständig identisch angesehen werden kann, falls inn des Rentenbezuges auf ein die Altersversorgung involvirendes bestimmtes lter festgesetzt wird. Aber auch die Invaliditätsversicherung lässt sich mit Begriffe identificiren, wenn man von einer Fixirung desjenigen Zeitpunktes, hem der Rentenbezug beginnen soll, absieht und denselben von dem wahrchen Eintritte der Invalidität abhängig macht. Diesen Principien muss nur dann Rechnung getragen werden, wenn die Jahresrenten eine bestimmte hrend der ganzen Bezugsdauer gleichmässige Höhe bedingen, wie dies unsere lung über dieses Thema voraussetzt. Wir haben nämlich die Frage der und Invaliditätsversicherung blos von jenem Standpunkte behandelt, nach sowohl für die Invaliditäts-, als auch für die Altersrente eine gewisse ässigkeit während der ganzen jeweiligen Bezugsdauer als Voraussetzung gilt rdies der Betrag der Rente von dem Fälligkeitstermine ganz unabhängig ist, lerselbe für eine bestimmte Prämie eine im vorhinein fixirte Höhe besitzt; ich diesbezüglich zwei verschiedene Kategorien in Betracht kommen, und ierseits, wo die Invaliditätsrente um die jährliche Prämie von der Altersrente terscheidet und andererseits, wo dieser Unterschied nicht stattfindet. Es also noch eines dritten Falles zu erwähnen, in welchem die Invaliditätssto grösser wird, je später der Zeitpunkt ihres Bezuges eintritt. Hier kann statistische Grundlage des wahrscheinlichen Eintrittes der Invalidität beim n vollständig entbehren, indem der angewandte Modus der aufgeschobenen e auf unbestimmte Zeit daselbst in jeder Beziehung den Anforderungen ent- Es frägt sich nur, ob diese letztere Art der Invaliditätsversicherung geeignet en diesbezüglichen Voraussetzungen Rechnung zu tragen. Offenbar würde son, welche in jüngeren Jahren invalid werden würde, lebenslänglich einen ingeren Rentenbetrag beziehen, als eine in späterem Alter invalid gewordene, Umstand als maassgebender Factor der Unzulänglichkeit betreff derjenigen rungen angesehen werden kann, welche durch die Invaliditätsversicherung

bezweckt sein wollen. Freilich lässt sich nicht leugnen, dass dieser Modus auch seine praktische Seite insofern besitzt, als den Anforderungen der Pensions- und Invaliditätsversicherung schon theilweise Genüge geleistet werden konnte, als es an den nöthigen statistischen Daten in Betreff der Invalidität des Menschen noch mangelte und daher rücksichtlich der unvollkommenen technischen Grundlagen von einer rationellen Bearbeitung dieses Versicherungszweiges abgesehen werden musste. Umsomehr drängt es nun, nachdem jetzt statistische Grundlagen zur Verfügung stehen, diese Frage von jenem Standpunkte aufzufassen, nach welchem dieselbe sich jenes Mangels der Unzulänglichkeit entledigen könnte. Es wäre beispielsweise mit der Lebensversicherung schlecht bestellt, wenn man bei Versicherungen auf den Todesfall blos denjenigen Betrag zur Auszahlung bringen wollte, welcher nach der Höhe und Anzahl der eingezahlten Prämien sich ergeben würde. Die wirthschaftliche Berechtigung, die heute diesem Versicherungszweige innewohnt, würde vollständig schwinden, ja noch mehr, es wäre demselben eine einfache Spareinlage vorzuziehen, würde man ihn des moralischen Zwanges, welcher in der pünktlichen Prämieneinhebung liegt, entkleiden.

Auf diese Weise gestaltet sich nun auch der veraltete Modus der Invaliditätsversicherung.

Tritt die Invalidität in einem Zeitpunkte ein, wo der Versicherte erst einen verhältnissmässig kurze Zeit den Prämienbeitrag geleistet, so kann er nur auf diejenige Rente Anspruch machen, welche seiner Prämienleistung im aliquoten Sinne entspricht. Die durch Ableben der einzelnen Versicherten sich auf die Uebrigen vererbenden Ansprüche sind gerade in den ersten Jahren so geringe, dass dieselben fast ausser Betracht kommen.

Berücksichtigt man überdies die hier nicht unbedeutenden Verwaltungskosten, welche geeignet sind, die in späteren Jahren sich vererbenden grossen Beträge schon im Vorhinein aufzuzehren, so gelangt man zu dem Schlusse, dass dieser Modus keineswegs den Anforderungen entsprechen kann. Daraus geht hervor, dass für die Invaliditätsversicherung dasselbe technische Princip zur Geltung gelangen muss, wie es bei der Lebensversicherung eingeführt ist, das heisst, der Versicherte muss mit der Einzahlung der ersten Prämie bereits das Recht besitzen, im Falle seiner, zu welchem Zeitpunkte immer eintretenden Invalidität, auf die gleiche Jahresrente Anspruch erheben zu können, als ob er durch 20 oder 30 Jahre dieselbe Prämie entrichtet hätte. Nur auf dieser Grundlage ist es möglich, die Frage der Invaliditäts- und Altersversicherung in rationeller Weise zu lösen. Untersuchen wir dabei, inwieweit unsere diesbezüglichen Resultate geeignet sind, dieser Anforderung Genüge zu leisten. Bekanntermaassen haben wir zur Grundlage der diesbezüglichen Tabellen die Sterblichkeit des gesammten Menschenmateriales angenommen, ohne auf die verschiedenartigen Beschäftigungen irgend welche Rücksicht zu nehmen. Nun darf aber nicht ausser Acht gelassen werden, dass mit der höheren Sterblichkeit einer Berufskategorie das Risiko einer längeren Invaliditätsdauer in einem entsprechenden Verhältnisse geringer wird, und umgekehrt bei geringerer Sterblichkeit einer solchen sich auch eine verhältnissmässig längere Invaliditätsdauer voraussetzen lässt.

gelangt daher zu dem Schlusse, dass die für das allgemeine Menschenmateriale ermittelten Tabellen keineswegs auf eine einzelne Berufsart anwendbar sind.

Ebenso wie sich aus der Art des Berufes ein vorzeitiger Eintritt der Invalidität mit einer längeren oder kürzeren ferneren Lebensdauer ergeben kann, so gibt es auch Berufsarten, wo die Invalidität erst im hohen Alter einzutreten pflegt, mit welchem Umstande wieder ein längerer oder kürzerer Invaliditätszustand verbunden sein kann, und zwar je nach der entsprechenden durchschnittlich vorherrschenden Lebensdauer. Die Umstände, welche bei den verschiedenen Berufsarten bald eine früher oder später eintretende Invalidität, bald eine kürzere oder längere Dauer derselben voraussetzen, können aber auch unterschiedlicher Art sein, so dass einerseits bei vollständiger Arbeitsfähigkeit bis in's späte Alter der Tod der Invalidität zuvorkommen, andererseits mit vorzeitiger Invalidität eine lange Lebensdauer verbunden sein kann. Es gibt Berufsarten, bei denen wohl Fälle von Invalidität in grösserem oder geringerem Maasse vorkommen, jedoch das pensionsfähige Alter in den seltensten Fällen erreicht wird, und umgekehrt wieder solche, bei denen die durchschnittliche Altersgrenze eine verhältnissmässig hohe ist, hingegen Fälle von Invalidität spärlich sind. Schon die Lebensweise, welche in vieler Beziehung mit dem Berufe zusammenhängt, hat einen nicht geringen Antheil an dem Grade der entsprechenden Sterblichkeit sowohl, als auch der Invalidität. Ausschweifung und Unmässigkeit im Essen und Trinken, besonders von Spirituosen, sind verderblich für den Organismus und erhöhen die Sterblichkeit in bedeutendem Maasse.

Neison berechnet die differirende wahrscheinliche ferneren Lebensdauer bei mässigen und unmässigen Personen in folgender Weise:

Alter	Mässige Personen	Unmässige Personen
20	44·2 Jahre	15·6 Jahre
30	36·5 «	13·8 «
40	28·8 «	11·5 «

Ebenso wird die Sterblichkeit durch Mangel an hinreichender körperlicher Bewegung erhöht. Insbesondere bei sitzender Lebensweise ist entsprechende Bewegung im Freien unumgänglich nothwendig.

Nach erfahrungsmässigen Beobachtungen ergaben sich folgende Differenzen in der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer. (Siehe Karup. Handb. d. Lebvers.)

Alter	Arbeit im Hause		Arbeit im Freien	
	wenig Bewegung	starke Bewegung	wenig Bewegung	starke Bewegung
20	41·88 Jahre	42·01 Jahre	37·80 Jahre	43·42 Jahre
30	35·12 «	34·50 «	30·14 «	36·58 «
40	27·91 «	27·80 «	23·04 «	29·13 «
50	20·50 «	21·18 «	17·28 «	21·97 «
60	14·04 «	15·14 «	11·02 «	15·56 «
70	8·65 «	10·44 «	4·56 «	9·33 «

Daraus geht hervor, dass auch Beschäftigung im Freien bei geringer Bewegung die Sterblichkeit erhöhen kann. Auch die Nahrungs- und Wohnungsverhältnisse haben einen einschneidenden Einfluss auf den Sterblichkeitsgrad. Der Wohlhabende lebt durchschnittlich bedeutend länger als der Arme und auch länger als der gewöhnliche Arbeiter.

Casper ermittelte die Absterbeordnung von 1000 gleichzeitig geborenen W habenden und Armen und gelangte zu folgenden Resultaten:

Alter	Wohlhabende		Arme	
	noch am Leben	gestorben	noch am Leben	gestorben
5	943	57	655	345
10	938	62	598	402
20	866	134	566	434
30	796	204	486	514
40	695	305	396	604
50	557	443	283	717
60	398	602	172	828
70	235	765	65	935
80	57	943	9	991

Karup führt Berechnungen der englischen General-Registratur an, welch Sterblichkeit unter 1000 Personen vom 35. bis zum 95. Lebensjahre darstellen, zwar einerseits bei wohlhabenden Landwirthen und andererseits bei Arbeitern.

Altersclassen	Gutsbesitzer und Pächter	Arbeiter und Handwerker	Verhältniss der beiden Classen
35—45	9	13	100 : 144
45—55	12	17	100 : 142
55—65	25	29	100 : 116
65—75	55	68	100 : 124
75—85	148	174	100 : 118
85—95	324	418	100 : 129

Aus diesen Zahlen allein geht schon der bedeutende Unterschied hervor, we bei der Invaliditäts- und Altersversicherung in statistischer Beziehung zwischen arbeitenden und wohlhabenden Classen bestehen muss.

Je grösser die Sterblichkeit bei einer Berufsclasse, desto kürzer die mit Lebensdauer im invaliden Zustande und in Folge dessen auch, desto kleiner Renten-Bezugsdauer. Ferner dem zufolge, desto geringer der zu versichernde Capi aufwand, also auch die zu entrichtende Prämie.

Wir gelangen daher zu dem Schlusse, dass unsere für das allgemeine Mensc materiale aufgestellten Tabellen I—V für die einzelnen Berufsarten nicht anwen sein können und somit nach den speciellen Mortalitätsverhältnissen derselben jew gesondert ermittelt werden müssen. Dementgegen lassen sich jedoch die ermitt durchschnittlichen Validitätsverhältnisse des Menschen für alle Berufsarten zur wendung bringen, insoferne es sich um Invalidität in Folge natürlichen Kräft falles handelt.

Ueber die Möglichkeit, die durch natürlichen Kräfteverfall erfolgte Invali des Menschen nach Maassgabe seiner Berufsart durch bestimmte untrügliche Ze zu constatiren, bestehen vorläufig noch verschiedene Meinungen, und dürfte es der Zeit ebenfalls gelingen, diese für die allgemeine Invaliditätsversicherung äu wichtige Frage einer rationellen Lösung zuzuführen.

ss und Securität vom staatswissenschaftlichen Standpunkte.

gesichts der stetigen Verschiebung der Zinsfussverhältnisse, welche sich in en Decennien in den verschiedensten Formen äussert und deren Erscheinung swirthschaftliche und finanzwissenschaftliche Forschung im hohen Grade gt, dürfte es von nicht geringem Interesse sein, die Ursachen, welche als end in dieser Beziehung beobachtet werden, von diesen beiden Standpunkten heren Untersuchung zu unterziehen. Die ersten Phasen dieser Erscheinung in diejenige Zeit, wo die ersten industriellen Betriebs-Gesellschaften sich zu egannen und das Bankwesen noch in den ersten Stadien seiner Entwicklung n jene Zeit fällt überhaupt der Anfang einer wirthschaftlichen Regelung des erhältnisses, sowie auch einer rationellen Anwendung derjenigen ökonomisch n Grundlagen, welche für die allgemeine Werthbestimmung des Credites as freie Walten von Angebot und Nachfrage geschaffen wurden. Insbesondere nser Jahrhundert, welches durch seine Erfindungen auf allen Gebieten das zwang, in Action zu treten. Der Ersatz der Landstrassen durch Eisenbahnen hte in dieser Beziehung einen nie geahnten Aufschwung, die Welt rückte mit neuen Communicationsmittel immer näher zusammen, wodurch Handel und in jeder Weise gehoben wurden und bedeutende Reformen auch auf anderen des Verkehres durch Schaffung neuer Institutionen nach sich ziehen mussten kam der Werth der Arbeit auf industriellem Gebiete immer mehr zu seiner Geltung. Das Capital als fördernder Motor der Arbeit suchte die industrielle on und bildete sich auf diese Weise ein ganz neues Verhältniss zwischen eiden wirthschaftlichen Factoren heraus. Das Capital erwarb hiedurch einen gten Antheil an dem Ertrag der Arbeit, wodurch die Frage eines Verhält- wischen Arbeitsentlohnung und Capitalsverzinsung eine acute wurde. Hier ur das Princip des unbeschränkten Verfügungsrechtes die richtige Mitte und wenn auch in mancher Beziehung Uebergriffe nicht zu vermeiden waren, dies doch der einzige Weg, das Gleichgewicht in der Forderung und Ge- von Vortheilen herzustellen. Das richtige Abschätzen von Leistung und istung kam immer mehr durch das freie Walten von Angebot und Nachfrage tung.

e industrielle Entwicklung musste nun unwillkürlich eine continuirliche ng des Volksvermögens zur Folge haben, wodurch immer mehr freies den Anlagemarkt zu suchen begann, und in Folge dessen die Zinsfussver- e eine stabilere Grundlage insofern erreichten, als dieselben von der Willkür italisten einerseits und dem mehr oder weniger dringenden Bedürfnisse des nscontrahenten andererseits nahezu unabhängig wurden und nur auf dem niss zur wirklichen Creditfähigkeit des Schuldners, also auf gewissen Securitäts- ngen zu beruhen *begannen*. Hiezu trug nicht wenig die zielbewusste Gründun

verschiedener, wirthschaftlichen Zwecken dienender Bankinstitute bei, welch staatlichen Privilegien ausgestattet, die Aufgabe hatten, den Credit zu orga und auf diese Weise den Geldmarkt in seine richtigen Bahnen zu lenken. Die städte und andere Emporien der Industrie hatten schon in früheren Jahrhu Institutionen geschaffen, wo an gewissen Tagen in der Woche mittelst Angeb Nachfrage geschäftliche Transactionen abgewickelt und die jeweiligen Leistung Gegenleistungen gegenseitig geregelt wurden. Die geschäftlichen Transaction Schuldurkunden verschiedenster Art machten die Gründung ähnlicher Instit auch in anderen grösseren Handelscentren nothwendig. Auf ähnliche Art sind auch heutigen Börsen aus dem Bedürfniss entstanden, durch Angebot und Nachfra Preis von Producten und Waaren jeweilig festzusetzen, sowie auch den Wert Geldeffecten und Schuldurkunden ihrer Verzinsung und Securität entspreche regeln. Die Sicherheit der Anlage unter Berücksichtigung ihrer Dauer und entsprechenden Zinsfusses wurde zur Grundlage einer einheitlichen Norm b Gewährung von Darlehen. Auf diese Weise entwickelte sich der sogenannte zinsfuss, welcher heute mit Rücksicht auf eine mit den grössten Garanti gestattete Sicherheit der Anlage einen Maassstab für die Verzinsungsbedin anderer mit minderer Sicherheitsgewähr ausgestatteter Darlehensgeschäfte bild diesen Erscheinungen hielt nahezu gleichen Schritt das Bedürfniss der Staat Einnahmen den neuen Anforderungen entsprechend zu erhöhen und sich in politischer Beziehung zu consolidiren. Das überschüssige anlagesuchende Capital zu staatlichen Investitionen herangezogen, indem ein Theil der regelmässigen einnahmen zu deren Verzinsung verwendet wurde. Und da eine Tilgung Staatsrenten nicht vorgesehen war, so hat sich, ohne dass eine bestimmte Theorie aufgestellt wurde der Grundsatz entwickelt, dass Staatsschulden nicht ge werden können. Dementsprechend entwickelte sich nach und nach das heutig hältniss des Staates als Schuldner zu seinem Gläubiger, dem internationalen C An die Stelle des Einzelngläubigers des Staates einerseits und der staatlichen Z anleihe andererseits ist die öffentliche Anleihe getreten, welche vom Stand des modernen Staates eine ungleich günstigere Grundlage in Betreff des Rech hältnisses zwischen diesem und seinem Gläubiger besitzt. Der berühmte Na ökonom Lorenz v. Stein interpretirt dieses Rechtsverhältniss in folgendem « Die öffentliche Schuld, welche in ihrem Wesen und ihrer Wirkung einen anderen Charakter besitzt wie die Privatschuld, als ein wirthschaftlich sociales R verhältniss, in welchem der Gläubiger Träger der Gewalt ist, die nach wirths lich classischen Grundsätzen das Geldcapital über die Production besitzt, muss von einem ganz anderen Standpunkte betrachtet werden wie diese, indem der als unendliche Persönlichkeit sich von der menschlichen Person dadurch untersch dass er das Bedürfniss hat, die sonst begrenzte Dauer der Schuld zu einer u lichen zu machen und nie zurückzuzahlen. Dementgegen hat der Gläubiger des St nachdem er ein endlicher ist, ein Interesse daran, die Rückzahlungsbedingungen öffentlichen Schuld zu statuiren und es herrscht daher bei jeder Staatsschuld *Kampf zwischen* den beiderseitigen divergirenden Interessen».

Dieser Kampf, dessen Consequenzen sich in dem jeweiligen, den Nominalwerth
oder weniger unterbietenden Uebernahmscourse eines Staatsanlehens äussern,
i einem nicht unbedeutenden Maasse vom Capitalsmarkte beeinflusst. Die
kungen zwischen Angebot und Nachfrage spielen hier eine grosse Rolle. Je
nlagesuchendes Capital den Markt beherrscht, desto leichter und unter desto
n Bedingungen ist es möglich, eine Anleihe zu contrahiren und umgekehrt, je
r das Geld, desto grössere Concessionen muss der Staat als Schuldner dem
chen Gläubiger gewähren. Einen in dieser Beziehung nicht minder wichtigen
bildet der Zinsfuss, auf dessen Grundlage die Contrahirung der Schuld statt-
Derselbe hängt jedoch von der momentanen Lage des Geldmarktes weit weniger
von der jeweiligen Beschaffenheit der finanziellen und ökonomischen Ver-
e eines Staates. Ein in jeder Beziehung consolidirtes Staatswesen, bildet die
, zu einem bedeutend billigeren Zinsfusse Anlehen aufnehmen zu können, als
Staaten der Fall ist, welche unter minder günstigen Umständen Schulden
ahiren genöthigt sind. In dieser Erscheinung äussert sich nun diejenige An-
g, welche an jedes Rechtsverhältniss gestellt werden muss; nämlich eine ge-
cherheit der rechtlichen Ansprüche. Da jedoch der Staat seine Schuld zu
endlichen macht, indem er dieselbe blos verzinst aber nie zurückzahlt, so dass
rheit der rechtlichen Ansprüche mit der Länge der Zeit auch leiden könnte,
der Gläubiger in der Höhe der Verzinsung einen Regress, und zwar in desto
Maasse, als die Möglichkeit eines solchen Ereignisses der menschlichen Vor-
ng gemäss näher liegt. Der öffentliche Gläubiger sucht in der höheren Ver-
zugleich eine successive Tilgung seines Capitales zu statuiren und auf diese
ie unendliche Schuld zu einer endlichen zu gestalten. Der wirthschaftlich
e Staat bietet daher eine grössere Gewähr für die Securität seiner Schulden
solchermaassen schwächere. Aber auch die politische Macht eines Staates ist
r Beziehung massgebend; und zwar nicht nur in Bezug auf die Nachbar-
sondern auch rücksichtlich der inneren Verhältnisse. Innere Unruhen, welche
sicherheit des Eigenthums erzeugen, sind geeignet den Staatscredit im hohen
zu schädigen. Die Securität der Staatsschulden ist also wohl im allgemeinen
leutend bessere, als diejenige der Privatschulden im Durchschnitte, jedoch ist
grösseren Einflüssen insofern unterworfen, als die Dauer während welcher sie
ruch genommen wird, eine unbegrenzte ist. Je länger daher die Rückzahlungs-
iner Schuld, desto grössere Securität muss derselben innewohnen. Ist dies nur
ile der Fall, so wird mit Hilfe einer höheren Verzinsung eine raschere Til-
instlich erzeugt. Somit steht die relative Höhe des Zinsfusses zur Securität
ekehrten Verhältnisse. Mit der industriellen Entwicklung und wirthschaft-
Kräftigung des Staatswesens im Allgemeinen, welche sich im Laufe der letzten
en vollzogen hat, ist die relative Höhe des Zinsfusses in einem nicht unbe-
en Maasse gesunken. Durch eine rationelle Systemisirung und Sicherung der
nsquellen haben nicht nur die Staatsschulden, sondern auch die Privatschulden
rität gewonnen, indem mit der wirthschaftlichen Kräftigung auch eine gewisse
ne Controle über die Einhaltung der rechtlichen Verträge bei Privatschulden

immer mehr sich Geltung verschaffte, und auf diese Art die Sicherheit des mobil Eigenthums gehoben wurde. Gleichen Schritt mit diesen Einrichtungen hielt au die Entwicklung des Geldwesens, indem die jeweiligen cursirenden Zahlungsmit durch genügende Bedeckung in Metallwerthen vor gefährlichen Werthschwankung bewahrt wurden. Aber auch andere Umstände waren nicht minder geeignet, auf relative Höhe des Zinsfusses ihren Einfluss auszuüben. Da nur ein Theil derjenig Zinsen, welche vom Capitale abgeworfen wurden, verzehrt werden konnte, so mus der übrige Theil einen immerwährenden Wachsthum des Gesammtcapitals verursach und hiedurch ein grösseres Angebot desselben involviren. Dieser Process übte auf relative Höhe des Zinsfusses einen immer grösser werdenden Druck aus, so dass heute auf demjenigen Punkte angelangt sind, wo sich das Verhältniss des Capita ertrages zum Arbeitsertrage der wirthschaftlichen Nothwendigkeit entsprechend regulirен trachtet. Wir leben in einer Aera der Conversionen, welche aus dem dürfniss entstanden sind, eine im relativen Sinne zu hohe Verzinsung des all meinen Capitales auf ein tieferes Niveau herabzudrücken. Die Zinsen, welche Eur jährlich zahlt, übersteigen die Summe von sieben Milliarden Gulden, wovon zwei Drittel durch Staatsrenten und ein Drittel durch Actien-Gesellschaften Privatschulden repräsentirt werden. Hievon gelangt beiläufig der dritte Theil wi zur Aufzehrung, so dass die jährliche Zunahme am Gesammtcapital auf etwa Milliarden geschätzt werden kann. Aus diesen Zahlen kann man entnehmen, wie Capital mehr jedes Jahr entsprechende Anlage sucht. Obzwar nun constatirt wer muss, dass auch die Anfrage eine verhältnissmässig grosse ist, so lässt sich nicht leugnen, dass dieselbe durch das Angebot bei weitem übertroffen wird. wäre es sonst möglich geworden, dass der Durchschnittszinsfuss im Laufe von ganz drei Decennien um mehr als den vierten Theil gesunken ist, trotzdem eine deutende industrielle Entwicklung auf allen Gebieten eine ebenso grosse Nachfr nach Capital verursacht hat. Wenn auch andererseits hiedurch die Staatseinnahm gestiegen sind und in Folge dessen die Securität der Staatsschulden gehoben wor ist, so konnte dieser Umstand allein unter den obwaltenden Verhältnissen d nicht hinreichen, um eine derartige Ermässigung des allgemeinen Zinsfusses, wie d selbe in einem verhältnissmässig so kurzen Zeitraume sich vollzogen hat, zu b wirken. Der jährliche Zuwachs des Gesammtcapitales ist also eine der Hauptursach des immer grösser werdenden Angebotes desselben und der hieraus entspringend günstigeren Darlehensbedingungen für den Contrahenten. Die unwillkürliche Steig ung der Securität an und für sich wäre blos geeignet, den allgemeinen Process d Zinsfussermässigung zu beschleunigen, wenn nicht eine von Zeit zu Zeit durch gro Staatsactionen hervorgebrachte übergrosse Anfrage nach Capital eine diesbezüglic Unterbrechung herbeiführen und durch einen entsprechenden Rückschlag eine langjährige Erholung involviren würde.

Dr. Ludwig Grossmann's

›anzpolitische und staatswissenschaftliche Reflexionen.

s Gebiet der Finanzpolitik gehört zu den interessantesten aber auch com-
en Disciplinen der modernen Nationalökonomie. Die wirthschaftlichen Ver-
welche den Anforderungen des letzten Jahrhundertes Rechnung tragend,
ständige Methamorphose durchgemacht haben, erfordern eine wissenschaftlich
Phasen geänderte Auffassung der verschiedenen sich aufwerfenden ökono-
Fragen, welche zum grossen Theile aus der neuen wirthschaftlichen Ordnung
hend, ein mehr oder weniger intensives Studium beanspruchen, wenn deren
tung eine in jeder Richtung zufriedenstellende und den Umständen vollends
te sein soll. Diejenigen Rücksichten, wirthschaftlicher, socialer und rein
er Art, welche diesfalls in Betracht kommen können, sind von einer Mannig-
, welche für die Behandlung einer solchen Frage an und für sich schon
um deren Schwierigkeit zu manifestiren.
n besonderem Belange ist diesbezüglich, die immer mehr um sich greifende
ung der Staaten-Politik mit den allgemeinen wirthschaftlichen Interessen,
ine oft gar nicht zu rechtfertigende Beeinflussung der ökonomischen Maass-
zur Folge hat, wodurch in vielen Fällen die Rücksichten der Oportunität
tischen Gründen vernachlässigt und die eigentlichen wirthschaftlichen Zwecke
werden. Wenn nun diese Tendenz in wirthschaftlicher Beziehung nur dort
endung gelangt, wo es die Verhältnisse erheischen, so findet dieselbe in der
litik einen desto fruchtbareren Boden, indem sie hier allgemein zum Durch-
gelangt. Die Ausbeutung des Capitales zu politischen Zwecken hat in unseren
ie geahnte Dimensionen erreicht. Die finanziellen Verhältnisse und Verpflich-
einzelner Staaten bilden heute den Ausgangspunkt grosser politischer Actionen
wälzungen. Die Oeffentlichkeit der Staatsschulden hat das mobile Capital mit
fährlichen Waffe ausgerüstet, deren symptomatisches Merkmal die Zwei-
gkeit ist.
ter diesen Umständen muss sich daher unwillkürlich die Frage aufdrängen,
sactionen finanzpolitischer Beschaffenheit nicht jener sicheren Grundlage zu
n beginnen, welche für deren Durchführung bisher als maassgebend be-
wurde, und zwar umsomehr, als das rapide Anwachsen der mobilen Capi-
nd jener hiedurch hervorgerufene förmliche Wettkampf um eine geeignete
anlage, eine gewisse intelectuelle Indifferenz, mit Bezug auf die erforderliche
t erzeugt, welche geeignet ist, die festen Säulen des öffentlichen Geldmarktes
nken zu bringen.
e grossartigen finanziellen Transactionen der letzten Epoche haben durchwegs
absetzung des *Zinsfusses zum* Gegenstande und sind geeignet, angesichts des

continuirlich sinkenden Capitalsertrages zu einer doppelten Vorsicht in Betreff der Securität zu mahnen, da hiedurch die Interessen-Gegensätze, welche zwischen der unendlichen Persönlichkeit des Staates und der endlichen Beschaffenheit des öffentlichen Gläubigers bestehen, bedeutend verschärft werden. Auf diesen Umstand wurde bereits in einer der früheren Abhandlungen, betitelt: „Zinsfuss und Securität vom staatswissenschaftlichen Standpunkte" hingewiesen. Insbesondere wurden daselbst die Ursachen der stetig fortschreitenden Zinsfussermässigung auf dem allgemeinen Capitalsmarkte einer näheren Untersuchung unterzogen und deren naturgemässe Nothwendigkeit nachzuweisen versucht. Dieselben Ursachen nun, welche auf diese Art die successive sich vollziehende Entwerthung des Capitalsertrages zur Folge haben, beeinflussen auch das Tauschverhältniss zwischen Geld und Waare, beziehungsweise zwischen Capital und Arbeit. Währenddem aber das Capitalserträgniss, insoweit dasselbe nicht Grund und Boden einerseits und industrielle wie auch wirthschaftliche Unternehmungen anderseits betrifft, sich den staatlichen Abgaben und Steuern zum grossen Theile zu entziehen weiss, wird die Production in desto grösserem Maasse durch directe und indirecte Steuern in Anspruch genommen. Hiedurch entsteht ein Missverhältniss in der Belastung der verschiedenen Quellen des Volkserwerbes, wenn man den Capitalsertrag ebenfalls als einen solchen zu betrachten für gut findet. Auf diese Weise geschieht es, dass der Arbeitszweck künstlich vertheuert wird; ohne die Arbeitsentlohnung in entsprechender Weise zu fördern. Während also auf der einen Seite der Preis der Lebensbedürfnisse gesteigert wird, erfährt der Arbeitsertrag auf der anderen Seite eine relative Schmälerung seiner gerechten Anforderungen. Hiezu kommt noch der Umstand, dass die Verwerthungserspriesslichkeit des Arbeitszweckes durch das der Production relativ angemessene Tauschverhältniss zwischen Geld und Waare, im selben Maasse eine günstigere wird, als sich die Entwerthung des Capitales vollzieht, wodurch eine Steigerung der Leistungsintensität der Arbeitskraft hervorgebracht wird. Die nächste Folge hievon ist eine unwillkürliche Verschiebung jenes Entlohnungsverhältnisses, welches zwischen der fördernden Capitalsleistung und der nackten Arbeitskraft besteht, und zwar vollzieht sich dieser Process wohl innerhalb derjenigen Grenzen, welche den Productionswerth auf der Grundlage von Angebot und Nachfrage regeln, jedoch immerhin zu Gunsten der Arbeitskraft und auf Kosten der Capitalsleistung.

Wenn nun trotz alledem die wirkliche Arbeitsentlohnung gegen die gerechten Anforderungen zurückbleibt, so ist dies blos eine Folge derjenigen Gewalt, welche nach wirthschaftlich klassischen Grundsätzen das Geldcapital über die Production besitzt. Der sociale Kampf, welcher heute zwischen dem Capital und der Arbeit ausgefochten wird, ist daher nichts Anderes als ein naturgemässer Ausgleich des Entlohnungs-Verhältnisses zwischen Capitals- und Arbeitsleistung. Währenddem der Zinsfuss als proportionaler Ausdruck der relativen Capitals-Verwerthung immer mehr zurückweicht und an Boden verliert, nimmt die nach besserer Entlohnung drängende Arbeit von dem verlassenen Gebiete Besitz. Der langsame und schrittweise Vollzug dieses Processes, welcher wohl die Vorbereitung zu grossen wirthschaftlichen Um-

lzungen bedeudet, wird blos durch jene diesbezüglich collidirenden Interessen des pitals und der Arbeit bedingt, welche von Zeit zu Zeit eine Spannung im socialen riebe erzeugen. Es wäre jedoch verfehlt, die allgemeinen Ursachen dieser Ereinung in gesellschaftlich zersetzenden Umtrieben suchen zu wollen.

Was nun die finanzpolitische Seite dieser Frage betrifft, so ist es im Interesse Staaten, den Vollzug dieses natürlichen Processes nach Möglichkeit zu unterzen, da hiedurch einerseits eine finanzielle Kräftigung der breiten, das grösste tingent für die indirecte Besteuerung bildenden Volksmassen erzielt und andererein günstigeres Verhältniss in der Belastung des allgemeinen Volkserwerbes vorgerufen wird.

Aber auch in anderer Beziehung äussert sich der Einfluss einer allgemeinen sfussermässigung auf die staatlichen Interessen. Nicht nur, dass die Bedürfnisse, che zur Verzinsung der Staatsschulden nöthig sind, sich nach Maassgabe der einetenen Umstände in entsprechender Weise verringern, und hiedurch nach erfolgter stellung des Gleichgewichtes im Staatshaushalte eine Minderbelastung des Volksnögens möglich ist, sondern auch in Betreff der wirthschaftlichen Verhältnisse s ein niedrigerer Zinsfuss von wohlthätigen Folgen für einen Staat begleitet sein. selben Maasse nämlich, als sich der Zinsfuss der öffentlichen Schulden ermässigt, ert das Capital industriellen Unternehmungen zu, aus welchen dasselbe eine ere Verzinsung zu erzielen hofft. Nun muss aber das stärkere Capitals-Angebot lieser Beziehung unmittelbar ein Sinken der fördernden Kraft des Capitals in r relativen Werthschätzung zur Folge haben, wodurch die Arbeitsleistung zunds in ihrem Werthe zu steigen beginnt.

Wir gelangen daher zu dem Schlusse, dass auf diese Weise die Erwerbsbedingen leichtere, und im selben Maasse die Lasten des Volksvermögens minder ckende werden müssen. Von welcher Tragweite es aber für die wirthschaftliche wicklung und Leistungsfähigkeit eines Staates ist, wenn der Werth der Arbeit prechend gewürdigt wird, dürfte nicht schwer zu ermessen sein. In den letzten sequenzen dieses Processes liegt daher die natürliche Lösung der socialen Frage.

Zur besseren Erläuterung dieser Auseinandersetzungen mag die Beschaffenheit gegenseitige Beziehung der Capitals- und Arbeitleistung einer näheren Unterhung unterzogen werden. Währenddem der Begriff der Arbeitsleistung ein coner, greifbarer ist, hat man es in Betreff der Capitalsleistung blos mit einem tractum zu thun, welches auch in der Dehnbarkeit eines solchen zum Ausdrucke ngt. Dementsprechend muss auch hinsichtlich der Art der beiden Begriffe ein sprechender Unterschied in der Entlohnung der jeweiligen Leistungen gemacht den. Die Entlohnung der Arbeitsleistung besitzt ein unveräusserliches Vorrecht enüber derjenigen des Capitals, welche erst nach vollständiger Befriedigung der eren in Frage kommen kann. Dem gegenüber besitzt das Capital jene Gewalt, che es nach wirthschaftlich classischen Grundsätzen über die Production ausübt, die demselben als dem eigentlichen Träger des übernommenen Risicos zusteht. n ist aber die Entlohnung der Capitalsleistung, welche erst nach Befriedigung jenigen der *Arbeit in Betracht* kommt, von einem eventuellen Productionsertrage

abhängig und wird unter Umständen der Verzicht auf dieselbe zum integrire Bestandtheil der Leistung selbst. Da nun das Capital auch einen eventuellen lust zu tragen bemüssigt ist, so muss demselben offenbar ebenso das Recht zuste einen etwaigen Gewinn vollends in Anspruch zu nehmen. Von den mehr oder mi grossen Productionskosten, zu welchen in erster Linie die Arbeitsentlohnung ge hängt nun diejenige Grenze ab, bei welcher die Entlohnung der Capitalsleistung ginnt und ist es daher erklärlich, wenn diesbezüglich eine immerwährende Colli zwischen den beiderseitigen Interessen von Arbeit und Capital besteht. Wird je in Folge äusserer wirthschaftlicher Einflüsse der Anspruch der relativen Capi Verwerthung auf ein Niveau herabgedrückt, bei welchem jene, die Prätensione Capitals- und Arbeitsleistung beschränkende Grenze eine Verschiebung zu Ungu des Capitales erleidet, dann tritt eine Expansion derjenigen Forderungen ein, w die Arbeit an die Production zu stellen berechtigt ist.

Es besteht daher zwischen den wirthschaftlichen Ursachen, welche den öf lichen Geldmarkt beeinflussen und denjenigen, welche eine Regelung der allgem Lohnverhältnisse zur Folge haben, ein bestimmter Causal nexus, der einen währenden Interessen-Ausgleich zwischen Capital und Arbeit involvirt. Dass ein solcher blos von Zeit zu Zeit vollzieht, hat seinen Grund darin, dass im erst eine gewisse Stauung der wirthschaftlichen Gegensätze eintreten muss, jene Ursachen von der entsprechenden Wirkung begleitet, dieses in ökonom Beziehung erforderliche Gleichgewicht hervorbringen. Wenn sich also zu ge Zeiten die Folgen eines relativ hohen Zinsfusses in drückender Weise geltend ma ohne die nöthige Ermässigung desselben herbeizuführen, so hat diese Ersch ihre Ursache in einer Stauung der wirthschaftlichen Gegensätze. Freilich kann periodisch sich wiederholende Veränderung des allgemeinen Bankzinsfusses nic selben Sinne gedeutet werden, weil hier die Ursachen viel näher liegen un wöhnlich blos ephemerer Natur sind. Hier pflegen meist Umstände handelspoli Beschaffenheit und die zum grossen Theile um die Jahreswende herum festge Termine der Couponfälligkeiten massgebend zu sein. Allein auch da müssen Umständen Ursachen rein politischer und socialer Natur, in Folge ihres Ein auf die ökonomischen Verhältnisse in ihrer Wirkung sich geltend machen, j sind auch diese meist von temporärer Beschaffenheit, und üben auf die conti liche Entwicklung des wirthschaftlichen Gleichgewichtes nur einen vorüberge Einfluss aus.

er das Verhältniss der Feuerversicherungs-Prämie zum Risiko.

e Seele der Feuerversicherung ist die thunlichste Durchführung einer genauen hätzung und Prämienbemessung. Wenn auch die relative Beschaffenheit der aden-Risken in Folge der immer grösseren und ausgiebigeren Schutzmaassregeln euersgefahr, Ausbreitung und Ansteckung im Allgemeinen eine stets bessere wird hiedurch jenes Verhältniss, welches zwischen dem übernommenen Risiko hiefür zu entrichtenden Prämie, als einer durch erfahrungsgemässe Schätzung en Gegenleistung, besteht, doch nur in geringem Maasse tangirt, indem dasselbe nerhalb gewisser Grenzen sich bewegenden Norm unterordnet ist, welche in llen als Grundlage eines rationellen Feuergeschäftes angesehen werden muss. in den letzten Jahren immer mehr sich bahnbrechenden auf statistischen Grund-ruhenden wissenschaftlichen Forschung auf diesem Gebiete der Assecuranz rücken enzen, zwischen welchen bisher in Folge der unzulänglichen empirischen Anhalts-ine klaffende, willkürlicher Risken-Schätzung genügenden Spielraum gewährende estanden hatte, immer näher zusammen. Die Schätzung der voraussichtlichen muss in Folge dessen den wirklichen Ergebnissen stets näher kommen, wodurch möglich wird, die Höhe der Prämien den beziehungsweisen Risken annähernd sen. Dieses unvorhergesehene Resultat musste nun auf dem Gebiete dieses anzzweiges bedeutende Umwälzungen hervorrufen. Wenn sich auch die Feuerver-ngs-Anstalten lange nicht entschliessen konnten, eine gegenseitige Assimilirung tistischen Materiales, dessen Geheimniss sie aus geschäftlichen Rücksichten streng u müssen glaubten, zuzulassen, und in Folge dessen die Schaffung einer umfas-Statistik der mathematisch controlirbaren Ursachen bei Bränden bis in die letzte rhindert wurde, so musste es desto mehr befriedigen, als es uns gelang, dieses l wenigstens zum Theile in den allgemeinen Dienst der Feuerversicherung zu wodurch es möglich wurde, die jeweilige Beschaffenheit des Gefahreffectes s von irgend welchen Gefahrmomenten abhängige Risiko mit hinreichender ichkeit zu ermitteln und auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit der Ent- und Verbreitung von Bränden in Folge von zufälligen Ursachen annähernd fest-n. Die der mathematischen Controle unzugänglichen wirthschaftlichen und logischen Umstände, welche dem fachmännischen Gutachten anheimgestellt mussten, da deren örtliche und temporäre Natur eine statistische Behandlung us sachlichen Gründen nicht zuliess, wurde ebenfalls auf entsprechende Weise mpiirsch zu bestimmende Coëfficienten in Rechnung gebracht, und gelang es e Art, das mathematisch Controlirbare vom Veränderlichen zu trennen und ersicherungsgebiete eine relativ verlässliche technische Basis zu geben, bisher Voraussetzung und Ergebniss jeglicher Verwandschaft entb

Als naturgemässe Folge der hiedurch hervorgerufenen Umwälzungen m
sich in Fachkreisen verschiedenartige Strömungen und Gegenströmungen fühlbar m
Hier waren es geschäftliche Oportunitätsgründe, welche eine derartige Einschrä
der oft mehr von Concurrenz-Rücksichten, als von fachmännischer Raison abhä
Prämienbemessung als unthunlich erscheinen liessen; dort wieder die Bedenken
alles Neue und das Widerstreben, mit alten gewohnheitsmässigen Ueberliefer
und Traditionen zu brechen. Kurz es wurden alle möglichen Gründe gelten
macht, welche geeignet waren, eine Neuerung auf dem Gebiete der Feuerversich
zu verhindern. Freilich konnte man sich es nicht verhehlen, dass eine Fi
des Verhältnisses zwischen Risiko und Prämie ein dringendes Bedürfniss ge
ist, insbesondere als die Tendenz, bei der Prämienbemessung den Concurrenz-
sichten in erster Linie Rechnung zu tragen, immer mehr Boden gewann u
Feuerprämie Gefahr lief, vollständig ein Object für Angebot und Nachfrage z
den. Um daher wenigstens das Fabriken-Risiko dieser planlosen Prämien
zu entreissen, wurden im Schosse des österreichisch-ungarischen Feuerversiche
Theilungsvertrages (Concordat) entsprechende Maassnahmen zur Erhaltung ein
Prämie ergriffen.

Diese Maassnahmen mussten sich jedoch bald als unzureichend erwei
einzelne Vertragsinstitute Mittel und Wege fanden, dieselben zu umgehen,
neue schärfere Maassregeln beschlossen werden mussten, um jener schrank
Prämienschleuderei Einhalt zu thun. Desto mehr wurden die übrigen Fe
sicherungs-Kategorien zum Tummelplatze jener heillosen Assecuranzwuth, ind
Concurrenz keine Mittel scheute, Versicherungen um jeden Preis abzujagen.

Und thatsächlich sind derzeit Assecuranz-Verträge in Kraft, deren Präm
Verhältnisse zum Risiko nahezu lächerlich erscheinen, wenn man dieselbe
Standpunkte der Leistung und Gegenleistung zu beurtheilen in die Lage kom

Selbstverständlich konnten unter diesen Umständen diejenigen Grenzen, z
welchen sich das empirische Verhältniss von Risiko und Prämie bewegt, ke
rücksichtigung erfahren und mussten sich auf diese Weise die Folgen jener e
Geschäftspolitik bald geltend machen, indem die Prämien-Einnahmen d
Schaden-Ergebnisse nicht nur vollständig absorbirt, sondern in minder guten
sogar bedeutend überschritten wurden.

Dieses bewusste Abstrahiren von jeglichen Bedenken empirischer und
scher Art und jenes absichtliche Vorschieben eines geschäftlich rücksich
Standpunktes lässt es Angesichts unserer sonst bewährten Feuer-Assecura
geboten erscheinen, nach den Ursachen dieser merkwürdigen Erscheinung zu fo
Die Dehnbarkeit, welche dem relativen Schaden-Ergebnisse mit Rücksicht a
grösseren oder kleineren Umfang eines Versicherungsstockes einerseits und in
einer jeweilig mehr oder minder rigorosen Risken-Auswahl andererseits inne
ist geeignet, das Bestreben nach einer grösseren Geschäftsausdehnung auf K
der guten Prämie insofern zu förderen, als die Erreichung eines grössere
sicherungsstockes bei entsprechend vorsichtiger Riskenschätzung zu einer
günstigeren Beschaffenheit der Schadenbilanz in derselben Weise beizutrag

de ist, wie dies mit Hilfe einer verhältnissmässig bedeutend rigoroseren Risken-
rahl bei einem kleinen Versicherungsstocke der Fall ist. Ein zweiter diesbe-
ch nicht minder wichtiger Factor ist der Umstand, dass Feuerversicherungen
ine längere Dauer als die eines Jahres abgeschlossen, einerseits ein bedeutend
eres Geschäft ermöglichen und andererseits zu einem günstigeren Durchschnitte
elativen Schadenbilanz beitragen. Diese Wahrnehmungen bilden nun die Grund-
zu einem Geschäftssysteme, welches in der Feuerversicherung seit mehreren
en Schule macht. Die Vortheile, welche der Schadenbilanz mit Rücksicht auf
relative Beschaffenheit aus dem grossen Umfange des Geschäftes und aus den
nden Versicherungs-Abschlüssen auf der einen Seite erwachsen, sollen diejenigen
theile wettmachen, die sich auf der anderen Seite aus der minder vorsichtigen
n-Auswahl und der verhältnissmässig zu wohlfeilen Prämie ergeben. Insolange
nun die Prämie blos um so viel ermässigt, dass der Entgang an Prämien-Ein-
en durch die in Folge der grösseren Geschäftsausdehnung und längeren Ab-
sdauer sich ergebenden Vortheile wieder aufgewogen wird, ist eine derartige
äftspolitik mit den Principien der Assecuranz vereinbar, und kann bei voraus-
ter Einhaltung dieser Bedingung das Verlangen der Versicherungs - Institute
einer möglichst grossen Anzahl auf längere Dauer abgeschlossener Versiche-
n nur als gerechtfertigt betrachtet werden. Wird jedoch ohne Rücksicht auf
tunität und rationelle Geschäftsgebahrung bei der Auswahl und Schätzung der
vorgegangen, indem der Prämienunterbietung derart freier Lauf gelassen
dass hiedurch das natürliche Verhältniss zwischen Leistung und Gegenleistung
leidenschaft gezogen erscheint, dann wächst mit der Anzahl derartiger Ver-
ungs - Abschlüsse die Last der durch die Prämien - Einnahme ungenügend
ten Verbindlichkeiten. Der grosse Geschäftsumfang, welcher sonst auf die
ffenheit des Versicherungsstockes mit Rücksicht auf dessen Schadenbilanz nur
ilhaft zu wirken berufen war, ist dann geeignet, nur Nachtheile zu fördern,
jene Bedingungen, welche diesbezüglich die Theorie der grossen Zahlen zur
lage haben, nicht mehr erfüllt werden.

Aber auch in anderer Beziehung ist es nothwendig, aus dem Rahmen nicht
zutreten, welcher die Grenzen einer rationellen Geschäftsgebahrung im Allge-
n bezeichnet, wenn die zu erzielenden Vortheile nicht in Nachtheile umschlagen
. Die Erfolge, welche mit Hilfe grösserer Geschäftsausdehnung und längerer
lussdauer in Betreff der individuellen Beschaffenheit eines Feuergeschäftes zu
hen sind, dürfen nicht überschätzt werden. Wenn schon Concurrenz- und
ftspolitische Rücksichten es mit sich bringen, dass unter diesen Umständen
iskenauswahl und Prämienbemessung bis zu einem gewissen Grade freierer
aum gelassen wird, so darf ein derartiger Maassstab nicht auch auf die Re-
sion angelegt werden. Hier müssen die Principien der Oportunität desto
er gehandhabt werden, je mehr gelockert die Fesseln sind, welche dem directen
eschäfte in technischer und empirischer Beziehung anhaften. Mit besonderer
ht muss auf die Beschaffenheit der einzelnen Risken Bedacht genommen
n, um die auf eigene Gefahr zu behaltenden Versicherungsbeträge ent-

sprechend abzuschätzen und den technischen Grundlagen und Anforderungen unterordnen.

Jenes Verhältniss, welches die zulässige Höhe der jeweiligen Versicherungssummen den entsprechenden Risken eines Versicherungsstockes subordinirt, ist erster Linie maassgebend für die Prosperität eines Feuergeschäftes.

Der Quotient, welcher diesem Verhältnisse entspricht, wurde in unserer Abhandlung über Brandschadenreserve (siehe zweite Lieferung „Mathematische Anleitung zur Schätzung der Brandschadenreserve II", Seite 67) mit dem Buchstaben bezeichnet und in den Formen 3) und 4) zum Ausdrucke gebracht. Die Formen und 7) (auf derselben Seite) bringen die Brandschadenreserve R durch das Product jenes Quotienten m, des entsprechenden Schadeneffectes S und der Prämie p zum Ausdrucke.

Setzt man nun in diesen Formen

$$R = S \cdot m \cdot p \quad \text{und} \quad R' = S' \cdot m' \cdot p$$

von denen die erstere für normales und die letztere für nicht normales Risiko Giltigkeit besitzt, die Brandschadenreserve R, beziehungsweise R' als relativ unverändert voraus, was gleichbedeutend ist mit der Aufrechterhaltung des erforderlichen Gleichgewichtes, so ergibt sich folgende Relation:

Der Quotient m wird durch die minder vorsichtige Risken-Auswahl im selben Verhältnisse grösser als die Prämie p hiedurch minder zureichend wird und dies der durchschnittliche Schadeneffect einen Wachsthum erleidet. Dies wird jedoch durch die Geschäftsausdehnung und längere Abschlussdauer insofern wieder ausgeglichen, als hiedurch einerseits der durchschnittliche Schadeneffect vermindert, andererseits durch die Verbilligung des Geschäftes der Prämienausfall wieder eingebracht wird. Ist jedoch das Verhältniss zwischen Prämie und Risiko ein derartiges, dass in einer Beziehung die Prämie ganz unzureichend wird, und in anderer Beziehung der durchschnittliche Schadeneffect nebst dem Quotienten m sich um so viel vergrössert, dass ein Ausgleich in genannter Weise nicht möglich ist, dann tritt offenbar eine Störung des erforderlichen Gleichgewichtes ein. Um wie viel mehr muss dies nun der Fall sein, wenn der Wachsthum des Quotienten m überdies durch eine jeder Basis entbehrende Schätzung der in eigenes Risiko zu übernehmenden Beträge spontan erhöht wird.

A N H A N G

ZUM THEORETISCHEN THEILE DES WERKES:

„DIE MATHEMATIK IM DIENSTE DER NATIONALÖKONOMIE“.



ALLGEMEINE INTEGRATION

DER

N EAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

HÖHERER ORDNUNG

INE NEUE WISSENSCHAFTLICHE ERRUNGENSCHAFT AUF DEM GEBIETE DER REINEN MATHEMATIK

VON

DR. LUDWIG GROSSMANN,

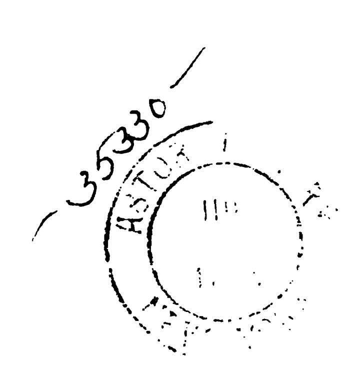
ABER DES ERSTEN WIENER MATHEMATISCHEN BUREAU UND HERAUSGEBER DER FACHSCHRIFT „CONTROLE“.

PRIORITÄT GEWAHRT DURCH DIE KAISERLICHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN.

WIEN 1889.

IM SELBSTVERLAGE DES VERFASSERS, III., SOFIENBRÜCKENGASSE NR. 5.

DRUCK VON JOS. BAYER & COMP., WIEN.



VORREDE.

in Problem, welches seit mehreren Decennien die hervorragendsten Männer
senschaft beschäftigt, ohne der Lösung im Geringsten näher gekommen zu
t die allgemeine Integration der linearen Differential-Gleichungen höherer
. Dasselbe bezeichnet gewissermassen die äusserste Grenze der bisherigen
gen auf dem Gebiete der reinen Mathematik; und zwar umsomehr, als die
Wissenschaften mit Rücksicht auf die einschlägige Beantwortung einer ganzen
ochwichtiger, von diesem Probleme abhängiger Fragen, dessen Lösung mit
d harren.

ir ist es nach 15jähriger mühsamer Arbeit endlich gelungen, dieses schwie-
ller Probleme einer allgemeinen Lösung zuzuführen; das heisst allgemein,
ur in Betreff der Beschaffenheit der Coëfficienten dieser Gleichungen als
Functionen von derjenigen Variablen, nach welcher die Derivation vollzogen
ern auch mit Rücksicht auf die Höhe der Ordnung, indem die Art der
eine staunenswerthe Analogie für alle möglichen Formen dieser Kategorie
ichungen in sich schliesst.

veröffentliche hiemit das Resultat meiner diesbezüglichen Forschungen mit
erzeugung, der Wissenschaft einen bedeutenden Dienst geleistet zu haben
e der Zuversicht Raum, dass auch eine Förderung des ferneren wissenschaft-
ortschrittes hiedurch bewirkt werden wird.

IEN, im Februar 1889.

Der Verfasser.

gemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

I.

ie linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung drücken bestimmte Be-en aus, in welchen sich die Ordinaten zweier oder mehrerer von einander dener Curven oder Curvensysteme, bei gemeinschaftlicher Abscisse zu ein-efinden. Da nun die Ordinate als Function der Abscisse anzusehen ist, so ie Beziehung, welche zwischen zweien, verschiedenen Curven oder Curven-n angehörigen Ordinaten besteht, im Grunde genommen auch den ent-nden jeweiligen Functionen der gemeinschaftlichen Abscisse eigen sein müssen. nach die Ordinate einer der beiden Curven durch die Function ihrer Abscisse, ere jedoch direct in Rechnung gebracht, so dass zwischen der Ordinate der Curve und derjenigen Function der gemeinschaftlichen Abscisse, durch welche linate der anderen Curve repräsentirt wird, eine bestimmte Relation besteht, hiedurch das Charakteristicon einer solchen Differentialgleichung gegeben. In derartigen Form ist also wohl die Beziehung zweier Ordinaten zur Dar-g gebracht, jedoch mangelt es an einer näheren Präcisirung der Beschaffenheit gen Curven oder Curvensysteme, denen diese Ordinaten entsprechen. Eine ein-isher bekannte Ausnahme hievon bilden diejenigen Differentialgleichungen Ordnung, denen die präcise Bedingung einer quadratischen Form derjenigen on, durch welche die eine der beiden Ordinaten zur Darstellung gelangt t, und welche die Eigenthümlichkeit in sich schliesst, zugleich die allgemeine ffenheit der einen der beiden Curven zum Ausdrucke zu bringen, weshalb auch füllung derselben eine Lösung ohneweiters möglich wird. Die Lösung dieser len Formen wurde bereits von Euler in seinem Cap. X. „De constructione ionum differentio differentialium per quadraturas curvarum" zur Durchführung t, sowie auch durch Laplace die diesbezügliche Ausnahme constatirt.

oll daher eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen ermöglicht , so ist es nöthig, das Abhängigkeitsverhältniss der beiden Ordinaten zur schaftlichen Abscisse allgemein zu ermitteln und näher zu präcisiren. Zur ung dessen mögen nachfolgende Auseinandersetzungen dienen.

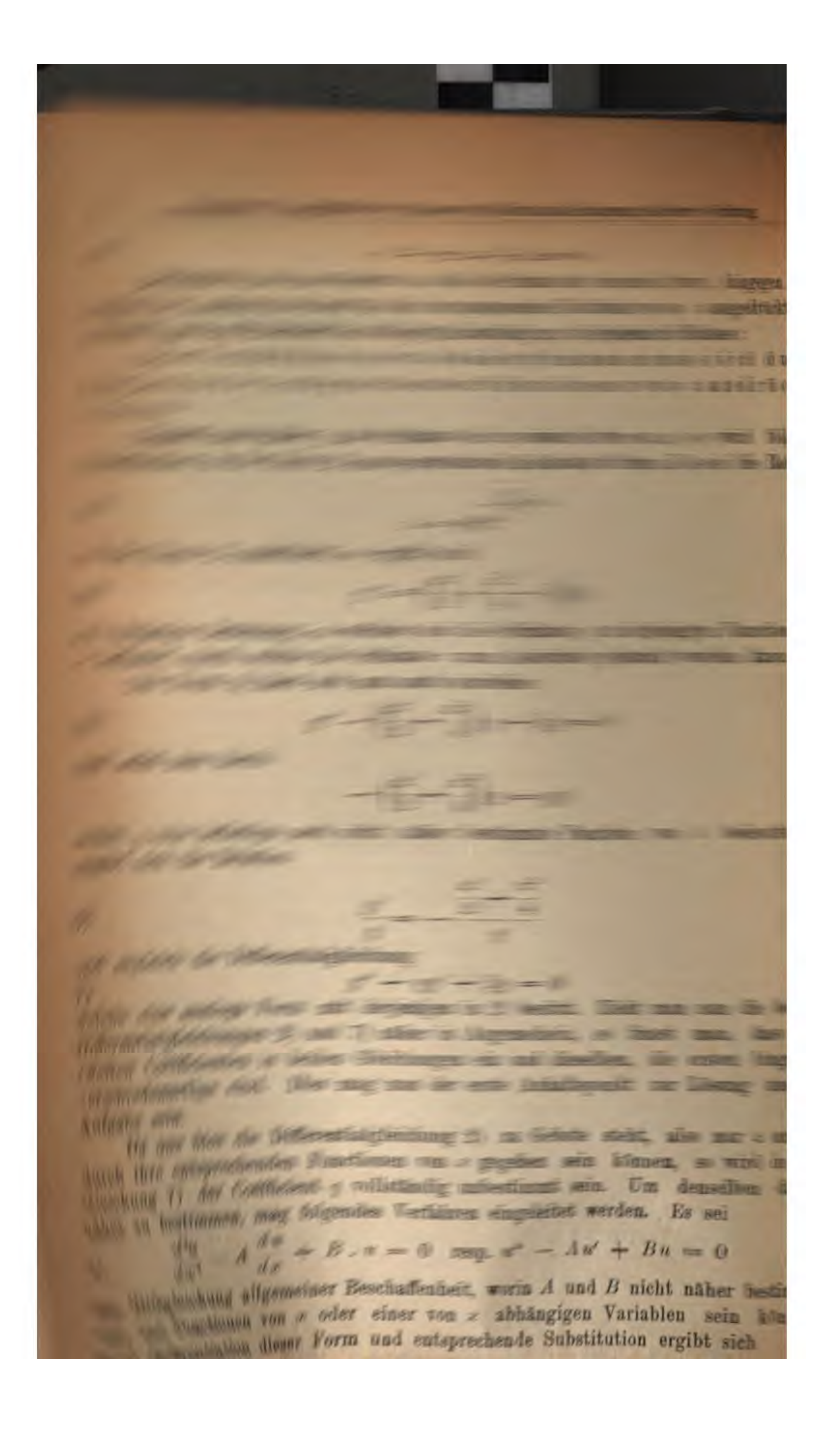
s sei die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \alpha \frac{dz}{dx} + \beta z = 0$$

her α und β beliebige Functionen von x sind, einer diesbezüglichen Unter-g unterzogen. Der Kürze halber bedienen wir uns der üblichen Bezeich-ir

$$\frac{d^2z}{dx^2} = z'' \text{ und } \frac{dz}{dx} = z'$$

llen eine solche auch überall dort beibehalten, wo eine Derivation nach x Demgemäss können wir die Form 1) auch schreiben



[illegible]

[illegible] Um denselben [illegible] mag folgendes Verfahren eingeleitet werden. Es sei

$$\frac{d^2u}{dx^2} - A\frac{du}{dx} + B \cdot u = 0 \quad \text{resp.} \quad u'' - Au' + Bu = 0$$

[illegible] allgemeiner Beschaffenheit, worin A und B nicht näher bestim[illegible] [illegible] von x oder einer von x abhängigen Variablen sein kön[illegible] [illegible] dieser Form und entsprechende Substitution ergibt sich

$$u''' - \left(A + \frac{B'}{B}\right) u'' + \left(A \frac{B'}{B} - A' + B\right) u' = 0 \qquad 9)$$

ls Resultat. Setzt man nun hierin

$$u' = y$$

$$-\left(A + \frac{B'}{B}\right) = q \qquad 0)$$

$$\text{und} \quad A \frac{B'}{B} - A' + B = \beta$$

erhält man offenbar die Form 7)

$$y'' + qy' + \beta y = 0$$

d somit sind die Coëfficienten q und β durch diejenigen der Gleichung 8) zum sdrucke gebracht.

Es handelt sich nun darum, auch die Coëfficienten der Gleichung 2) durch A B auszudrücken; zu diesem Behufe sei in

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

erste Coëfficient α als Summe von q und einer zweiten noch unbestimmten nction von x oder einer von x abhängigen Variablen zur Darstellung gebracht, lche wir mit ς bezeichnen wollen; also

$$\alpha = q + \varsigma$$

d da der zweite Coëfficient β ohnehin schon durch A und B zum Ausdrucke gebracht so ergibt sich gemäss den Relationen 10) der Ausdruck

$$z'' + \left(\varsigma - A - \frac{B'}{B}\right) z' + \left(A \frac{B'}{B} - A' + B\right) z$$

lcher auch geschrieben werden kann

$$\frac{z''}{z'} + \varsigma - A - \frac{A'}{A} - \frac{d\,l\dfrac{B}{A}}{dx} + A.\left(\frac{d\,l\dfrac{B}{A}}{dx} + \frac{B}{A}\right)\frac{z}{z'}$$

Setzt man hierin

$$\varsigma = -\frac{B}{A} \quad \text{und} \quad A = \frac{z'}{z}$$

wird derselbe unter allen Umständen Null werden; wobei der Allgemeinheit der t demselben übereinstimmenden Form 2) nicht im Mindesten Abbruch gethan ist, il A und B ganz willkürliche Functionen von x oder einer von x abhängigen riablen sein können. Somit ist

$$\alpha = -A - \frac{B'}{B} - \frac{B}{A}$$

d da bekanntlich

$$\beta = A \frac{B'}{B} - A' + B$$

so wird die Form 2) lauten

$$z'' - \left(A + \frac{B'}{B} + \frac{B}{A}\right) z' + \left(A \frac{B'}{B} - A' + B\right) z = 0$$

Die Relationen 15) können nun auch geschrieben werden

$$[illegible] = -A - \frac{A'}{A} - \frac{dl-\varsigma}{dx} + \varsigma$$

und

$$[illegible] = \ldots\left(\frac{dl-\varsigma}{dx} - \varsigma\right)$$

[illegible]

$$\varsigma - \frac{dl-\varsigma}{dx} = [illegible]$$

[illegible] $A = \frac{z'}{z}$ ist, durch Verbindung

[illegible] die zu lösende Differentialgleichung

$$[illegible] = 0$$

[illegible] Integrale

$$[illegible]$$

[illegible] Gleichung

$$[illegible] - \left(\varsigma - \frac{dl-\varsigma}{dx}\right) [illegible] + \beta = 0$$

[illegible] Wurzeln $z''_2 \cdot z'_1 = z''_1 \cdot z'_2$ entspr[illegible]

[illegible]

$$[illegible] = \varsigma$$

[illegible] Coëfficienten α und β zum Ausdrucke zu bringen, um die [illegible] der Gleichung 2) vollends durchzuführen.

[illegible] diesem Behufe mögen die Formen 3), 4) und 6) die nöthige Hand[illegible] Es ist nämlich in Folge des Umstandes, dass $\alpha = \eta + \varsigma$ ist, die For[illegible] [illegible]

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}}{\eta} = -\frac{\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}}{\alpha - \varsigma}$$

[illegible] Form 3) entsprechend

$$\frac{z'}{z} - \frac{y'}{y} = -\frac{\alpha}{2}$$

[illegible] den Formen 18) und 19) gemäss

$$\frac{z'}{z} = -\frac{\beta}{\varsigma - \frac{dl-\varsigma}{dx}}$$

[illegible] infolge der Formen 21), 22) und 23) sich die Relation

$$\frac{\beta}{\varsigma - \frac{dl-\varsigma}{dx}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}}{\alpha - \varsigma}$$

Weiter liefert die Form 4)

$$y'' = \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) y$$

auch geschrieben werden kann

$$\frac{d\left(\frac{y'}{y}\right)}{dx} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta$$

Substitution der Form 21) die Relation

$$-\frac{d\left(\dfrac{\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}}{\alpha - \varsigma}\right)}{dx} + \left(\frac{\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}}{\alpha - \varsigma}\right)^2 = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \beta$$

die Formen 24) und 26) die Eliminirung des sich ergebenden Differentialten $\frac{d\varsigma}{dx}$ zulassen; und zu einer rein algebraischen Gleichung dritten Grades worin ς die Unbekannte und die entsprechenden Coëfficienten Functionen von β sind. Diese Rechnung zur Durchführung zu bringen, sowie auch die Beng der einzelnen Wurzeln dieser Gleichung, soll nun unsere Aufgabe sein.

Setzen wir der Kürze halber in den Formen 24) und 26)

$$\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4} = t$$

alten wir, da der Differentialquotient des Logarithmus nat. von $-\varsigma$ durch Ausdrucke gelangt

$$\frac{\beta}{\varsigma - \frac{\varsigma'}{\varsigma}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{t}{\alpha - \varsigma}$$

e Relation und hieraus

$$\varsigma\varsigma'\frac{\alpha}{2} - \varsigma'\left(\frac{\alpha^2}{2} + t\right) - \varsigma^3\frac{\alpha}{2} + \varsigma^2\left(\frac{\alpha^2}{2} + \beta + t\right) - \varsigma\alpha\beta = 0$$

iefert

$$\frac{d\left(\frac{t}{\varsigma - \alpha}\right)}{dx} + \left(\frac{t}{\varsigma - \alpha}\right)^2 = t - \beta$$

ite Relation die Gleichung 29)

$$\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) - \varsigma\left[2\alpha\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{t'}{t}\right] + \alpha^2\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{t'}{t}\alpha - \alpha' - t = 0$$

ieht man daher die Relation 28) und 29) zusammen, indem man den Diffeuotienten ς' eliminirt, so erhält man die Gleichung dritten Grades rein alger Beschaffenheit in Bezug auf ς

$$\varsigma^3 \cdot \frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{\beta}{t}\right) - \varsigma^2\left[\frac{\alpha^2}{2} + 2t + \frac{3}{2}\alpha^2\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{t'}{t}\right]$$

$$+ \varsigma\left[\alpha^2\frac{t'}{t} + \frac{3}{2}t\alpha + \frac{3}{2}\alpha^3\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + t' - \frac{\alpha\alpha'}{2} - \beta\alpha\right]$$

$$\frac{\alpha^4}{2}\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{\alpha^2 t}{2} - \alpha^2\beta + \frac{\alpha^3}{2}\frac{t'}{t} + \alpha t' - \frac{\alpha'\alpha^2}{2} - \alpha' t - t^2\Big) -$$

rin nach Form 27)

$$t = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{4}$$

deutet und α wie auch β beliebige Functionen von x sein können.

Dividirt man nun diese Gleichung durch $\varsigma - \alpha$, so erhält man als Quoti
ne Form zweiten Grades nebst einem Reste, und zwar

$$\varsigma^2 \frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{\beta}{t}\right) - \varsigma\left[2t + \alpha^2\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{t'}{t}\right]$$
$$+ \left[\frac{\alpha^3}{2}\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + t' - \alpha\beta - \frac{\alpha\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{t'}{t} - \frac{\alpha}{2}t\right] + r = 0$$

bei

$$r = \frac{t^2 - t\alpha^2 + t\alpha'}{\varsigma - \alpha}$$

Ist daher entweder $t = 0$ oder $t - \alpha^2 + \alpha' = 0$, so wird in der Forn
r Rest r ebenfalls Null, und ist somit bei Erfüllung einer dieser Beding
$- \alpha$ die erste Wurzel der Gleichung 30) und folglich auch

$$\varsigma^2 \frac{\alpha}{2}\left(2 - \frac{\beta}{t}\right) - \varsigma\left[2t + \alpha^2\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{t'}{t}\right]$$
$$+ \frac{\alpha^3}{2}\left(1 - \frac{\beta}{t}\right) + t' - \alpha\beta - \frac{\alpha\alpha'}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{t'}{t} - \frac{\alpha}{2}t = 0$$

in eine der Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} \quad t = 0 & \text{oder auch } \alpha' = -\frac{\alpha^2}{2} \\ \text{II.} \quad t - \alpha^2 + \alpha' = 0 & \text{oder auch } \alpha' = +\frac{\alpha^2}{2} = t \end{array}\right\} \text{III.} \quad \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

llt werden muss.

Für die Bedingung I. nimmt nun die Gleichung 32), nachdem wir die
t multiplicirt, also dieses als Nenner entfernt haben, die Form

$$\varsigma^2 \frac{\alpha\beta}{2} - \varsigma\alpha^2\beta + \frac{\alpha^3}{2}\beta = 0$$

welche auch geschrieben werden kann

$$\alpha\beta\,(\varsigma - \alpha)^2 = 0$$

heisst, entweder

$$\alpha = 0$$
$$\text{oder} \quad \beta = 0$$
$$\text{oder} \quad \varsigma - \alpha = 0$$

muss, durch welche Wurzeln den Anforderungen der Lösung vollends
chen wird.

Für die Bedingung II., welche in der Relation

$$t = \alpha' = \frac{\alpha^2}{2}$$

Substitution gelangt, erreicht die Gleichung 32) die Form

$$\varsigma^2\alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) - 2\varsigma\alpha^2\left[\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\right] - \alpha^3\left[1 - 2\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\right] = 0$$

che auch geschrieben werden kann

$$(\alpha^2 - \beta)\left[\varsigma^2 - 2\varsigma\alpha\left(\frac{1}{4\left[1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right]}+1\right)+\alpha^2\left(2-\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha^2}}\right)\right]=0$$

Es ist demnach entweder

$$\beta = \alpha^2 \quad \text{oder}$$

$$\varsigma = \alpha\left[1+\frac{1}{4\left(1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{16\left(1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^2}+\frac{6}{4\left(1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)}-1}\right]$$

Bedingung, unter welcher der Form 37) entsprochen wird.

Die Form 39) ist nun die einzige Wurzel, in welcher β vollständig unabhängig und somit eine beliebige Function von x sein kann. Bezeichnen wir nun den erhalb der Klammer sich befindlichen Ausdruck der letzten Form der Kürze halber t ω so ergibt sich

$$\varsigma = \alpha\,\omega$$

bei also ω eine bestimmte Function von α und β bedeutet.

Ziehen wir daher die Form 18)

$$R = \varsigma - \frac{dl - \varsigma}{dx}$$

Betracht und substituiren hierin den Werth von ς, so ergibt sich die Form

$$R = \alpha\,.\,\omega - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{dl - \omega}{dx}$$

welcher mit Rücksicht auf die bedingungsweise Beschaffenheit des Werthes von α wohl die Bedingung I als auch II und III zur Geltung gelangen kann; somit falls n ersten zweien entsprochen werden soll, die Relation

$$\alpha' = \mp \frac{\alpha^2}{2}$$

ssgebend ist und demgemäss

$$R = \alpha\,\omega \pm \frac{\alpha}{2} - \frac{dl - \omega}{dx}$$

endgiltige Relation, welche in die für die Gleichung

$$z'' \pm \alpha z' + \beta z = 0$$

gen Integrale 19)

$$z_1 = \int e^{\int (R \mp \alpha)\,dx}\,dx \qquad z_2 = e^{-\int \frac{\beta}{R}\,dx}$$

tituirt, diejenigen von der Form

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= -\int \frac{e^{\int \alpha.\omega.dx}}{\omega}\,.\,e^{\mp\int\frac{\alpha}{2}dx}\,.\,dx \\ z_2 &= e^{-\int \frac{\beta\,dx^2}{dl\left(-\frac{e^{\int\alpha.\omega.dx}}{\omega}\,.\,e^{\pm\int\frac{\alpha}{2}dx}\right)}} \end{aligned}\right.$$

rt.

Setzt man in diesen Integralen der Kürze halber den Ausdruck

44) $$-\frac{e^{\int \alpha . \omega . dx}}{x} = \tau$$

so übergehen dieselben in folgende

45) $$z_1 = \int \tau . e^{\mp \int \frac{\alpha}{2} . dx} . dx \qquad z_2 = e^{-\int \frac{\beta . dx}{\frac{\tau'}{\tau} \pm \frac{\alpha}{2}}}$$

welche durch Elimination von τ die Differentialgleichung 2) ergeben. Som
τ derjenige Factor, welcher jenes Abhängigkeits-Verhä
der beiden Ordinaten z und y zur gemeinschaftlichen Ab
näher präcisirt, jedoch in der gegebenen Differentialglei
mangelt, was schon daraus hervorgeht, dass die der Ordinate y entsp
Differentialgleichung

46) $$y'' + (1 - \omega)\, \alpha . y' + \beta y = 0$$

lautet. [Siehe Form 7) und 11).]

Substituirt man nämlich die Form 3) in dieselbe, indem man y durc
drückt; d. h.

$$y = z\, e^{\int \frac{\alpha}{2} dx}$$

so erhält man (s. Bed. II.)

47) $$z'' + z'\, \alpha (2 - \omega) + z \left(\frac{\alpha^2}{2} (2 - \omega) + \beta \right) = 0$$

welche der Gleichung 2)

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

vollständig entspricht u. zw. aus dem Grunde, weil den Formen 21) und 22)
z auch folgendermassen zum Ausdrucke gelangen kann

48) $$z = e^{-\int \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\omega - 2}{\omega - 1} . dx} \quad \text{indem} \quad y = e^{\int \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{dx}{\omega - 1}}$$

somit ist $$z' (1 - \omega) + z \frac{\alpha}{2} (2 - \omega) = 0$$

wodurch derjenige Factor aus der Gleichung 47) verschwindet, welcher beruf
das Abhängigkeitsverhältniss der Ordinate z zur Abscisse x festzustellen.

Mithin ist es gelungen, die Integration derjenigen Differentialgleichung
zuführen, in welcher der absolute Werth von α durch den Ausdruck

49) $$\alpha = \frac{2}{x + 2C}$$

dargestellt ist, der Coëfficient β hingegen eine beliebige Function von x bed

Das Integrale der Gleichung

50) $$z'' \pm \frac{2}{x + 2C} z' + \beta z = 0$$

liefert nun die Handhabe zur endgiltigen Lösung derselben, sowie auch d
Differentialgleichungen, in denen der Coëfficient α ebenfalls eine beliebige
von x ist.

Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

II.

Wir übergingen im ersten Theile dieser Arbeit nach vollzogener Entwicklung allgemein giltigen Form 30) auf einen speciellen Fall und zerlegten unter Suppo- on je einer der Bedingungen I, II und III diese Gleichung dritten Grades in ihre rzeln, was uns aus dem Grunde angezeigt schien, weil wir den Conclusionen der durch erhaltenen Resultate gemäss, den Gang der Rechnung prüfend, deren Rich- eit nachweisen zu müssen glaubten, welcher Anforderung wohl in vollem Maasse üge geleistet wurde.

Kehren wir nun wieder zum allgemeinen Gesichtspunkte dieser Frage zurück. In Folge der bisherigen Auseinandersetzungen ergaben sich für die Gleichung 2) Allgemeinen zwei verschiedene Integrationsformen z_1 und z_2, zwischen denen die ehung $z''_2 . z'_1 = z''_1 . z'_2$ zur Geltung gelangte. Ziehen wir dieselben h näher in Betracht, so finden wir, dass durch jene Beziehung den Anforde- en nur zum Theile genügt wird. Es liefern nämlich die für die Gleichung 2) $+ \alpha z' + \beta z = 0$ allgemein giltigen Integrationsformen 19)

$$z_1 = \int e^{\int (R - \alpha)\, dx} dx \qquad z_2 = e^{-\int \frac{\beta}{R} dx}$$

Elimination der Hilfsvariablen R ein blos einerseits entsprechendes Resultat, die sich hiedurch ergebende Form

$$\frac{z''_1}{z'_1} \cdot z'_2 + \alpha z'_2 + \beta z_2 = 0$$

Zugrundelegung obiger Beziehung wohl in diejenige von

$$z''_2 + \alpha z'_2 + \beta z_2 = 0$$

geht, jedoch eine diesbezügliche Form für z_1 völlig in Frage stellt.

Nun lässt sich aber die Gleichung 51) auch folgendermaassen schreiben

$$z''_1 + \alpha z'_1 + \beta z'_1 \cdot \frac{z_2}{z'_2} = 0$$

aus dieser ergibt sich die gesuchte Form für z_1, das ist

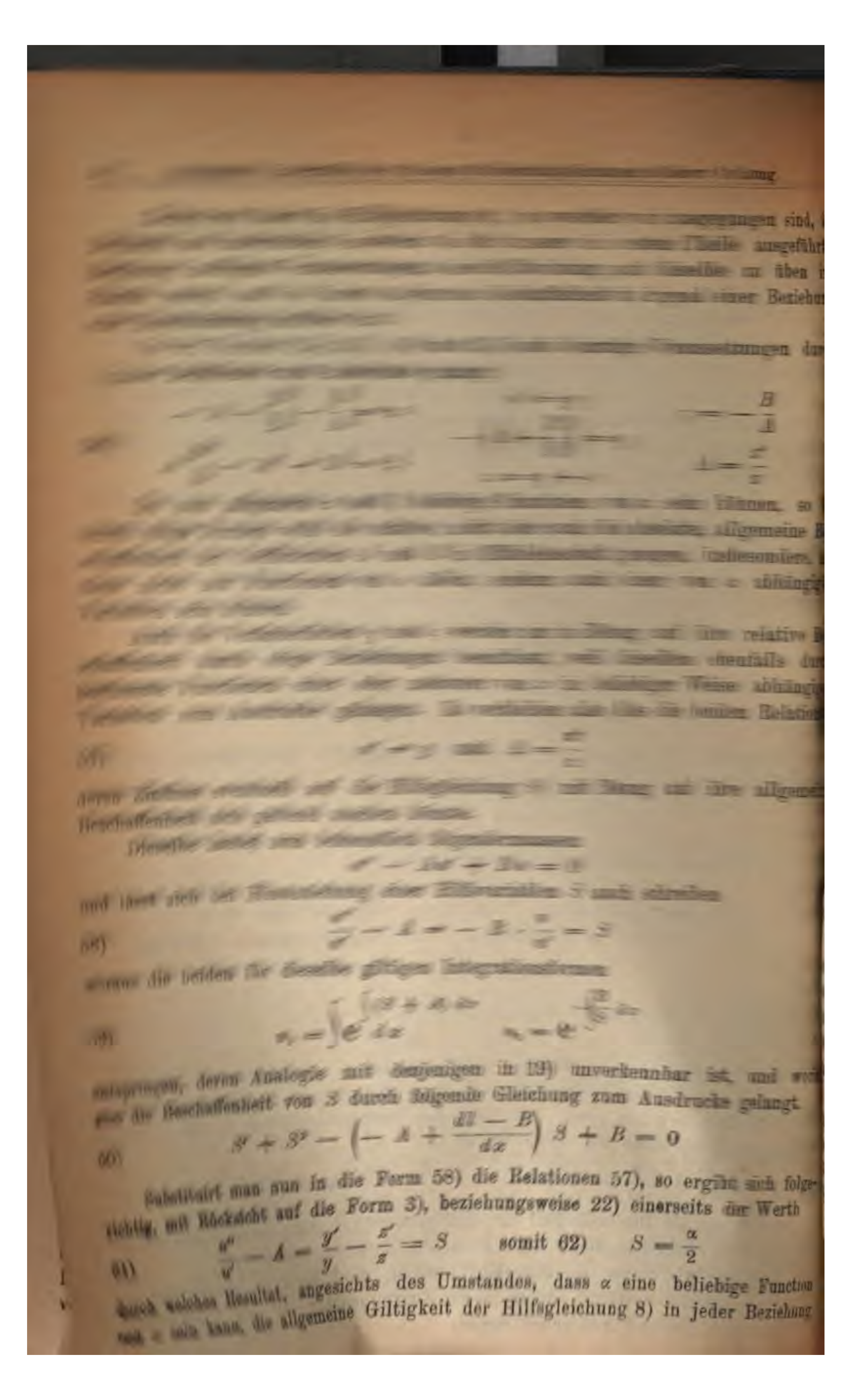
$$z''_1 + \alpha z'_1 + \beta z_1 = 0$$

der Bedingung, dass in derselben die Beziehung $z'_1 . z_2 = z'_2 . z_1$ zur Geltung gt. Die vollständige Lösung der Gleichung 2) kann also nur dann als durchge- betrachtet werden, wenn zwischen den Integrationsformen z_1 und z_2 zweien hungen entsprochen ist, welche lauten

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} \cdot \frac{d z_2}{dx} = \frac{d^2 z_2}{dx^2} \cdot \frac{d z_1}{dx} \qquad \frac{d z_1}{dx} \cdot z_2 = \frac{d z_2}{dx} \cdot z_1$$

wird daher die Beschaffenheit der Hilfsvariablen R eine derartige sein müssen, mit Hilfe derselben dieser Anforderung entsprochen werden kann.

Nachdem wir dieses vorausgeschickt haben, wird der Sinn nachfolgender Er- ngen leichter fasslich, indem deren Zusammenhang mit den früheren Aus- ngen sich hiedurch von *selbst ergibt.*



entspringen, deren Analogie mit denjenigen in 19) unverkennbar ist, und wo die Beschaffenheit von S durch folgende Gleichung zum Ausdrucke gelangt.

$$60)\qquad S' + S^2 - \left(-A + \frac{dl\,B}{dx}\right) S + B = 0$$

Substituirt man nun in die Form 58) die Relationen 57), so ergibt sich folgerichtig, mit Rücksicht auf die Form 3), beziehungsweise 22) einerseits der Werth

$$61)\qquad \frac{u''}{u'} - A - \frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} = S \qquad \text{somit } 62)\qquad S = \frac{\alpha}{2}$$

durch welches Resultat, angesichts des Umstandes, dass α eine beliebige Function von x sein kann, die allgemeine Giltigkeit der Hilfsgleichung 8) in jeder Beziehung

wahrt bleibt, indem α als gleichzeitige Function von A und B, die jeweilige Be- hung zwischen diesen beiden den Anforderungen der Lösbarkeit entsprechend elt. Anderseits erhält man

$$S = -B \cdot \frac{u}{u'} = -\frac{B}{A} \cdot A \cdot \frac{u}{u'} = \varsigma \cdot \frac{z'}{z} \cdot \frac{u}{u'} = \frac{\alpha}{2}$$

aus die Formeln

$$\frac{u'}{u} = 2 \cdot \frac{\varsigma}{\alpha} \cdot \frac{z'}{z} \qquad \text{und 65)} \qquad A = \frac{u'}{u} \cdot \frac{\alpha}{2\varsigma}, \qquad B = -\frac{u'}{u} \cdot \frac{\alpha}{2}$$

springen, welch' letztere durch Substitution in die Hilfsgleichung 8) zu folgender m derselben führen

$$\frac{d\,\frac{u'}{u}}{dx} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2\varsigma}\right) - \frac{u'}{u} \cdot \frac{\alpha}{2} = 0$$

he mit derjenigen, die durch gleiche Substitution aus der Form 60) sich ergibt, tisch ist und als Differentialgleichung erster Ordnung folgende endgiltige Inte- onsformel liefert

$$u = e^{\int \frac{dx}{e^{-\int \frac{\alpha}{2} dx} \int \left(1 - \frac{\alpha}{2\varsigma}\right) e^{\int \frac{\alpha}{2} dx} . dx}}$$

lst welcher den entsprechend angewandten Beziehungen 55) zwischen u_1 und u_2 mein Genüge geleistet wird. Drückt man nun hierin α und ς durch deren hungsweise Functionen von A und B aus, so müsste sich naturgemäss die directe ng für die Hilfsgleichung 8) ergeben, falls in derselben die beiden Coëfficienten eliebige Functionen von x gegeben wären. Ebenso müsste sich in Folge des andes, dass bekanntlich $B = -\varsigma A$, auch die Gleichung

$$u'' - A u' - A \varsigma u = 0$$

lst obiger Integrationsform direct lösen lassen, wenn in jener der Coëfficient α den Ausdruck

$$\alpha = \varsigma - \frac{\varsigma'}{\varsigma} - A - \frac{A'}{A}$$

zt werden würde. Nun hängt aber nicht nur A und B, sondern auch ς als tion der Beiden, von der jeweiligen Beschaffenheit der Coëfficienten α und β der hung 2) ab, und involvirt also diese eine gewisse Abhängigkeit zwischen den icienten A und B, wenn eine unbedingte Lösung der Hilfsgleichung 8) möglich soll.

In Folge dessen kann es nicht allein genügen, wenn diese Beiden durch beliebige tionen von x gegeben sind, da hiedurch wohl jener zur Integration zwischen ssen Grenzen, nicht aber auch der zur unbeschränkten Löslichkeit in bestimmter e beitragenden Beziehung Genüge geleistet wird, welche sich nur aus den beiden und β giltigen Functionen von A und B ergibt.

Dies beweist schon der Umstand, dass sich wohl α und β durch bestimmte tionen von A und B, nicht aber auch umgekehrt diese durch bestimmte Func- n von α und β ausdrücken lassen, insolange nicht ς jeweilig aus der Form 30) ttelt wurde; wie dies auch aus den Relationen 17) unschwer zu entnehmen ist, h deren Zusammenziehung sich die Form

69) $$A' + A^2 + \alpha A + \beta = 0$$

ergibt, welche offenbar in die Differentialgleichung 2) übergeht. Daraus geht her dass in jener, der Hilfsgleichung 8) entsprechenden Form 68) eine den Anforderun der unbeschränkten Lösbarkeit Genüge leistende Beziehung zwischen den Coëfficie A und B, welche im Factor ς zum Ausdrucke kommt, erfüllt werden muss, wenn Integration nicht blos zwischen bestimmten Grenzen durchführbar sein soll.

Die Lösung unserer Aufgabe besitzt daher folgende Grundlage: In der Diffe tialgleichung 2) $$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

sind die Coëfficienten α und β durch beliebige Functionen von x gegeben. Da je die zur Integration derselben nöthige Hilfsvariable R unbestimmt ist, so wäre allgemeine Lösung dieser Gleichung einfach nicht durchführbar, wenn nicht Hilfsgleichung 8)

$$u'' - A u' + B u = 0$$

zu diesem Zwecke herangezogen, und die für die Lösung derselben nöthige H variable S durch den ersten Coëfficienten der gegebenen Gleichung 2), das i bestimmt werden würde, und zwar in Folge der zwischen den Gleichungen 2) u abgeleiteten Beziehung. Nun ist aber diese Beziehung eine derartige, dass so α als auch β durch bestimmte Functionen von A und B zum Ausdrucke gel können, so dass die Coëfficienten α und β schon an und für sich eine besti Beziehung zwischen A und B ohne Rücksicht auf deren sonstige Beschaffenheit i viren, deren Einfluss jedoch im Sinne der Abhängigkeit auf jene blos indirect r wirkend ist. Die Beschaffenheit jener abgeleiteten Beziehung schliesst aber auc Eigenart in sich, die sich aus α und β entwickelnde Beziehung zwischen A u auf jene der Gleichung 2) entsprechende Unbekannte z und Hilfsvariable R übertragen, indem z als Function von A, hingegen R als solche von A und B Ausdrucke kommt. In Folge dessen lässt sich die Variable z durch Vermittlun u durch die Coëfficienten α und β, und umgekehrt die Variable u durch Vermit von z durch A und B ausdrücken. Zu diesem Resultate konnten wir jedoch gelangen, indem wir die in der Gleichung 2) zum Ausdrucke gelangende Rel zwischen den beiden Ordinaten z und y, von denen die letztere durch die Fun der für beide gemeinschaftlichen Abscisse x in Rechnung gebracht ist, derart mo cirten, dass in derselben im Gegensatze zur ersteren die Ordinate y direct, z je als Function der gemeinschaftlichen Abscisse zur Geltung kommt. Auf diese W kamen wir in die Lage, die jeweilige Beziehung der Ordinaten z und y zur gem schaftlichen Abscisse näher zu präcisiren, wodurch eine wichtige Bedingung für Lösbarkeit dieser Differentialgleichungen erfüllt wurde. Die besagte abgele Beziehung hat sich demnach als eine naturgemässe Folge der innerhalb dieser R nung obwaltenden Umstände ergeben, so dass die zu lösenden Formen in B ihrer allgemeinen Beschaffenheit vollständig intact blieben. Die einzige bestehe Schwierigkeit der allgemeinen Lösung dieser Formen liegt daher blos in der jeweili Ermittlung der entsprechenden Wurzeln für die Variable ς aus jener in der Form dargestellten Gleichung dritten Grades, deren Coëfficienten bestimmte Functionen *α und β sind.*

Den ermittelten Ergebnissen gemäss, lassen sich also auch mit Hilfe der ungen

$$y = u' \quad \text{und} \quad z = y\,e^{-\int \frac{\alpha}{2} dx}$$

tsprechenden Integrationsformen für die Differentialgleichungen 2) und 7) her-, welche in beziehungsweisen Sinne den Relationen 55) theils unbedingt, theils wischen gewissen Grenzen Genüge leisten. Lässt sich also eine gegebene ntialgleichung diesen Beziehungen nicht unterordnen, so wird diese blos en gewissen Grenzen löslich, also unter Umständen auch particulärer Beschaffen-ein können.

Zur Ermittlung der jeweiligen Grenzwerthe werden nun folgende Beziehungen enfalls die Handhabe bieten. Durch Substitution der Formen 65) in diejenigen) für α und β, erhält man nach Elimination der Grösse A und des Differenzial-ten des Logarithmus nat. von u, die Relationen

$$= \int\left(\frac{\beta}{B} - 1\right) dx \quad \text{und 72)} \quad \frac{1}{B} = -\,e^{-\int(\varsigma - \alpha)\,dx} \int \frac{1}{\varsigma}\, e^{\int(\varsigma - \alpha)\,dx} \,.\, dx$$

lchen mit Hinzuziehung der aus der Form 60) durch Substitution des Werthes sich ergebenden Beziehung zwischen A und B, diejenigen eventuellen Grenz-ermittelt werden können, zwischen welchen die speciell in Betracht kommende tialgleichung den Anforderungen der Rechnung Genüge leistet.

iese Beziehung liefert nämlich, falls man den durch A und B ausgedrückten von ς berücksichtigt, die Relation

$$\frac{1}{B} = -\frac{e^{-\int\frac{\alpha}{2} dx}}{\frac{\alpha}{2}} \int\left(1 - \frac{\alpha}{2\varsigma}\right) e^{\int \frac{\alpha}{2} dx}\, dx$$

im Vereine mit den obigen beiden Formen zum gewünschten Resultate führt. ls charakteristisch für diese Lösungsart wollen wir zum Schlusse der allge-Erörterungen, die aus den Formen 64) und 70) entspringenden Relationen

$$\frac{\alpha}{2\varsigma} \cdot \frac{u''}{u} = \left(\frac{u''}{u'}\right)^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{u''}{u'} = \left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{z'}{z} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{y'}{y}$$

n, welche die Art der Wechselbeziehung zwischen den Differentialgleichungen und 7) am besten kennzeichnen.

achdem wir uns nunmehr der allgemeinen Beleuchtung dieser Frage entledigt wollen wir daran gehen, hieraus die weiteren Conclusionen für unseren en Fall zu ziehen.

nfolge des Umstandes, dass hier die Variable ς in dem Ausdrucke $\varsigma = \alpha \,.\, \omega$ tung kommt, werden die allgemeinen Formen 64) und 65) eine entsprechende ation erleiden und für die Hilfsgleichung 8) die Integrationsform

$$u = e^{\int \frac{dx}{e^{-\int\frac{\alpha}{2} dx} \int\left(1 - \frac{1}{2\omega}\right) e^{\int\frac{\alpha}{2} dx} .\, dx}}$$

tieform, in welcher also α entsprechend den Bedingungen 37) ...
in dem Ausdrucke

$$\alpha = \pm \frac{2}{x+2C}$$

zur Geltung kommt, und worin C eine willkürliche Constante ... entsprechend wird auch S gemäss der Form 62) in den Wurzeln

76) $$S_1 = + \frac{1}{x+2C} \quad , \quad S_2 = - \frac{1}{x+2C}$$

zur Geltung kommen, so dass durch Substitution je einer derselben in ... sich auch die correspondirende Beziehung zwischen A und B ergibt: ...

77) $$-A = -\frac{dl-B}{dx} + B(x+2C)$$

und für S_2

78) $$A = \frac{dl-B}{dx} + B(x+2C) + \frac{2}{x+2C}$$

durch deren jeweilige Substitution in die Integrationsformen 59) ... weisen beiden Bedingungen 55) entsprochen wird: demnach für die ... und 78) die Integrationsformen

79) $$u = e^{-\int B(x+2C)\,dx}$$ respective 80) $$u = e^{+\int B(x+ \ldots}$$

Giltigkeit besitzen, wodurch der Hilfsgleichung 8) sowohl für ein pos... negatives A vollends Genüge geleistet wird; und zwar kann diesbez... Bedarf entweder S_1 oder S_2 zur Geltung gelangen. Da nun $\xi = -$ ...
so ergibt sich einerseits

81) $$\xi = + \frac{B}{B(x+2C) - \frac{dl-B}{dx}} = + \frac{2\,\omega}{x+2C}$$

und andererseits

82) $$\xi = - \frac{B}{B(x+2C) + \frac{dl-B}{dx} + \frac{2}{x+2C}} = - \frac{2 \ldots}{x+ \ldots}$$

und hieraus für die Formen 79) und 80)

83) $$\frac{1}{B} = -\int\left(1-\frac{1}{2.\omega}\right)(x+2C)\,dx$$ resp. 84) $$\frac{1}{B} = (x+2C)^{\ldots}$$

somit durch Substitution, die für alle diesbezüglichen Fälle giltige Int...

85) $$u = e^{\mp\int \frac{(x+2C)^{\pm 1}\,.\,dx}{\int\left(1-\frac{1}{2\omega}\right)(x+2C)^{\pm 1}dx}}$$

welche offenbar mit derjenigen in 75) vollständig übereinstimmt, falls ... Werthe für α substituirt werden. In dieser Form gelangt nun ω durch ...

86) $$\omega = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{3^2 + 2(x+2C)^2.\beta - (x+2C)^4.\ldots}}{2^2 - (x+2C)^2.\beta}$$

ieltung, in welchem der Factor β durch eine beliebige Function von x dar-
lt sein kann, deren Beschaffenheit jedoch durch die hieraus sich ergebende Form

$$\beta = \frac{4}{(x + 2\,C)^2} \cdot \frac{(\infty - 2)\,(\infty - \frac{1}{2})}{(\infty - 1)^2 + 1}$$

ativem Sinne begrenzt ist.

Mithin ist mit Rücksicht auf die Formen 70) und 85) dieser specielle Fall der
entialgleichungen 2) und 7)

$$z'' \pm \frac{2}{x + 2\,C}\, z' + \frac{4}{(x + 2\,C)^2}\,\frac{(\infty - 2)\,(\infty - \frac{1}{2})}{(\infty - 1)^2 + 1} \cdot z = 0$$

$$y'' \pm \frac{2}{x + 2\,C}\,(1 - \infty)\, y' + \frac{4}{(x + 2\,C)^2}\,\frac{(\infty - 2)\,(\infty - \frac{1}{2})}{(\infty - 1)^2 + 1}\, y = 0$$

lein gelöst, und zwar ist die Lösung eine unbedingte, wenn ∞ entweder als
rliche Constante zur Geltung kommt, oder wenn die für ∞ einzusetzende belie-
'unction von x eine derartige ist, dass sich diese Gleichungen denjenigen in
er Anderen den gleichen Anforderungen ensprechenden unterordnen lassen. In
onstigen Fällen ist die Lösung blos zwischen Grenzen durchführbar; weil das
tniss der beiden Ordinaten y und z nur in gewissen correspondirenden Curven-
den Anforderungen entspricht. Hingegen ist die Hilfsgleichung 8) bei Er-
einer der Beziehungen 77) und 78) in unbeschränktem Sinne löslich.

Der geometrische Sinn dieser Gleichungen entspricht dem speciellen Falle, wo
otient der Ordinaten der in Beziehung stehenden Curven multiplicirt mit einer
ite gleich ist der Ordinate einer Geraden.

Dieser Quotient lässt sich aber durch einen einfachen Process in die Ordinate
eliebigen Curve transformiren; und zwar ergibt sich durch Verbindung der Formen

$$z = y\, e^{\mp\int \frac{dx}{x + 2\,C}} \qquad v = y\, e^{-\int \frac{a}{2}\,dx}$$

lation

$$v = z\,.\,(x + 2\,C)^{\pm 1} e^{-\int \frac{a}{2}\,dx}$$

a als Coëfficient einer neuen Differenzialgleichung eine beliebige Function von
tellt und somit der genannten Anforderung entspricht, wenn v und z als die
ten der in Beziehung stehenden Curven betrachtet werden.

Hier schliesslich noch Einiges über die geometrische Beschaffenheit dieser
ingen im weiteren Sinne.

Durch Verbindung der Integrationsformen 45), beziehungsweise Substitution
der der anderen in die Gleichung 2) ergibt sich die Form

$$\frac{d\left(\frac{\tau'}{\tau} \pm \frac{\alpha}{2}\right)}{dx} + \left(\frac{\tau'}{\tau} \pm \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tau'}{\tau} \pm \frac{\alpha}{2}\right)\left(\pm\alpha - \frac{d\,l - \beta}{dx}\right) + \beta = 0$$

also α blos in seinem absoluten Werthe erscheint, nachdem dessen Zeichen
in Rechnung gebracht sind. Diese Form entspricht nun mit Rücksicht auf
erth der Hilfsvariablen R, derjenigen in 20) und übergeht durch Trans-
on offenbar in folgende

$$93)\qquad \tau'' - \frac{d\,l-\beta}{d\,x}\tau' + \left(\pm\frac{\alpha'}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \mp \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d\,l-\beta}{d\,x} + \beta\right)\tau = 0$$

Hierin nun unter Berücksichtigung einer der Bedingungen I und II die Re

$$94)\qquad \tau = \sigma . e^{-\int\frac{\alpha}{2}d\,x}$$

substituirt, ergibt für das positive, also obere Zeichen von α die Gleichung

$$95)\qquad \sigma'' - \left(\alpha + \frac{d\,l-\beta}{d\,x}\right)\sigma' + \beta\,\sigma = 0$$

und für das negative, also untere Zeichen

$$96)\qquad \sigma'' - \left(\alpha + \frac{d\,l-\beta}{d\,x}\right)\sigma' + \left(-\alpha' + \alpha\,\frac{d\,l-\beta}{d\,x} + \beta\right)\sigma = 0$$

Da nun der Gleichung 92) gemäss, mit Rücksicht auf diejenige i $R = \frac{\tau'}{\tau} \pm \frac{\alpha}{2}$ ist, so muss offenbar auch $R = \frac{\sigma'}{\sigma}$ sein; demnach stehen σ und Ordinaten zweier Curven zu einander in einer gleichen Beziehung, wie z und

Substituirt man nun ferner in die Gleichung 95) einerseits, und in die Gleich andererseits für α und β die Werthe 17) und berücksichtigt hiebei die Relatio so ergeben sich die Formen 97) und 98)

$$\sigma'' + \left[A - \left(R + \frac{R'}{R}\right)\right]\sigma' - A\,R\,.\,\sigma = 0 \qquad\qquad z'' + \left[R - \left(A + \frac{A'}{A}\right)\right]z' - A\,R\,.\,z$$

aus denen auf eine Wechselbeziehung zwischen den Grössen R und A ge werden kann; und es ergibt sich somit nach näherer Untersuchung dieses Ums eine vollständig analoge Beschaffenheit von A mit Bezug auf die Form 95) wie selbe der Grösse R mit Bezug auf die Gleichung 2) anhaftet. Demgemäss sind die Relationen

$$99)\qquad A = \lambda - \frac{d\,l-\lambda}{d\,x} \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{B}{R}$$

in analoger Weise, wie diejenigen in 14) und 18) hier massgebend, wobei λ in der Art der Beschaffenheit übereinstimmt, was auch eine weitere Analogi Betreff der Lösung voraussetzen lässt.

Daraus geht hervor, dass die Hilfsgleichung 8) mit einer zweiten, ähnl Provenienz correspondirt, aus welcher die Gleichungen 93) und 95) abgeleitet so dass zwischen den beiden Differenzial-Gleichungen

$$100)\qquad u'' - A\,u' + B\,u = 0 \quad \text{und} \quad w'' - R\,w' + B\,w = 0$$

eine ähnliche Beziehung, wie zwischen denjenigen in 2) und 7) oder 95) und besteht. Es repräsentiren demnach die Variablen u und w ebenfalls die Ordi zweier zu einander in Beziehung stehender Curven. Mithin haben wir es hier zweien zu einander in Correlation stehenden Curvensystemen zu thun, denen gemeinschaftliche Abscisse zugrundeliegt, und in welchen je zwei mit einander respondirende Curven eine gewisse Beziehung zu einander involviren. Das Abhä keitsverhältniss der jeweiligen Ordinaten zur gemeinschaftlichen Abscisse ist wo diesen Beziehungen allgemein enthalten, äussert sich jedoch in einem speciellen erst durch Zuhilfenahme der jeweilig präcisirten Wechselbeziehung der in d Systemen enthaltenen Curvenpaare.

llgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

III.

Die bisherigen Auseinandersetzungen über dieses Thema behandelten haupt-
ch die grundlegenden Begriffe bezüglich der Beschaffenheit und Lösung der
ntialgleichungen höherer Ordnung. Wir wollen nun versuchen, aus den er-
ten Resultaten die weiteren Conclusionen zu ziehen, wie auch die Umstände
tellen, unter welchen die Integration dieser Gleichungen im allgemeinen Sinne
ollzieht. In Folge der bereits gemachten diesbezüglichen Reflexionen mussten
r Ueberzeugung gelangen, dass jede Differentialgleichung als Beziehung zweier
ganzen Curvensysteme angehöriger, und mit demselben in Correlation stehen-
nien anzusehen ist, weshalb auch die Beziehungen der einzelnen diesem Systeme
rigen Curvenpaare unter einander einer Wechselbeziehung unterworfen sind.
esultat einer solchen ist daher auch der Umstand, dass die der Differential-
ng 8) angehörige Hilfsvariable S durch den Coëfficienten α der Gleichung 2)
usdrucke gelangt, respective mit demselben identisch ist. Versuchen wir nun
Umstand unseren Zwecken dienstbar zu machen und ziehen zu diesem Behufe
sbezüglichen Formen 60) und 62) näher in Betracht. Diese lauten bekannt-
lgendermaassen:

$$S' + S^2 - \left(-A + \frac{dl - B}{dx}\right) S + B = 0 \quad \text{und} \quad S = \frac{\alpha}{2}$$

nd denselben zufolge die als beliebige Functionen von x in Betracht kommen-
ctoren α, A und B von einander im Sinne dieser Formen abhängig. Durch-
rmation der Form 60) gelangt man nun zu folgender Relation:

$$\frac{\dfrac{d\left(-\dfrac{\alpha}{2B}\right)}{dx} + \dfrac{\alpha}{2}\left(-\dfrac{\alpha}{2B}\right) - 1}{\left(-\dfrac{\alpha}{2B}\right)} = -A$$

falls wir in derselben der Kürze halber $-\frac{\alpha}{2B} = \xi$ setzen, in die Form

$$A = \frac{1 - \xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2}$$

it. Der Relation 101) gemäss ist aber auch

$$-\frac{B}{A} = \varsigma = \frac{-\dfrac{\alpha}{2}}{\xi' + \dfrac{\alpha}{2}\xi - 1}$$

nn daher die der Gleichung 2) angehörige Hilfsvariable R aus der Form

$$R = \varsigma - \frac{dl - \varsigma}{dx} \tag{104}$$

durch Substitution ermittelt werden. Mittelst Anwendung dieser Formen lass
nun die den Differentialgleichungen 2) und 7) angehörigen Coëfficienten α
durch ξ allgemein ausdrücken und gelangt man mit Hinweis auf die Relation

$$\alpha = R - A - \frac{A'}{A} \quad \text{und} \quad \beta = -R \,.\, A$$

zu folgenden Beziehungen:

$$2(\xi' - 1)^2 + (\xi' - 1)(1 + \xi\, t_1) - \xi^2 t = 0 \tag{105}$$

$$\xi'' + (\xi' - 1)\, t_1 - \beta\, \xi = 0 \tag{106}$$

in welchen der Kürze halber $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha'}{2} = t$ und $\left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha'}{2}\right)\frac{2}{\alpha} = t_1$ gesetzt

Eliminirt man schliesslich aus den beiden Gleichungen den Coëfficienten t_1, so
sich die Form

$$\frac{d\left(\frac{1 - \xi'}{\xi}\right)}{dx} + \left(\frac{1 - \xi'}{\xi}\right)^2 = t - \beta \tag{107}$$

welche mit denjenigen in 25), respective 4) vollständig übereinstimmt. Da
jedoch auch geschrieben werden kann

$$\frac{d\left(\frac{1 - \xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2}\right)}{dx} + \left(\frac{1 - \xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{1 - \xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2}\right) + \beta = \tag{108}$$

so ist laut den Formen 102) und 69) und mit Rücksicht auf die Relation
und 22)

$$\frac{z'}{z} = \frac{1 - \xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1 - \xi'}{\xi} \quad \text{respective} \quad y = \frac{e^{\int \frac{dx}{\xi}}}{\xi} \tag{109}$$

Betrachten wir nun die beiden Gleichungen 105) und 106), so finden wi
nur jene Wurzeln, welche denselben gemeinschaftlich sind, auch den Gleic
107) und 108) Genüge leisten. Denken wir uns daher aus jeder einzelnen der
Formen 105) und 106) die Werthe von ξ allgemein ermittelt und dieselbe
deren Gemeinschaftlichkeit zu statuiren, einander gleichgesetzt, so wird zw
t, t_1 und β eine gewisse Beziehung sich ergeben, welche erfüllt werden muss,
die allgemeine Lösung der Formen 107) und 108) möglich sein soll. Die
ziehung wird jedoch die Allgemeinheit der Werthe von α und β nur insoferne
flussen, als deren Verhältniss zu einander für diesen Fall näher präcisirt wir
Art eines solchen zwischen α und β ist nun in den Formen 15)

$$\alpha = -A - \frac{B'}{B} - \frac{B}{A} \quad \text{und} \quad \beta = -A' + A\frac{B'}{B} + B$$

welche bekanntlich mit den Formen 17) übereinstimmen, und der Differ
gleichung 2) Genüge leisten, durch Vermittlung der Coëfficienten A und
Ausdrucke gebracht und liefert, im Falle B aus beiden eliminirt wird, die Fo

ıe mit derjenigen in 108) identisch ist. Aber auch durch Elimination von A t sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, so dass wir mit Hilfe dieser ıhung nur zu einer gleichen, beziehungsweise ähnlichen Form gelangen, wie die sende ist. Daraus geht hervor, dass dieses Verhältniss, welches durch diese n Relationen zwischen α und β statuirt wird, nur hinreicht, um dieselben als cienten einer Differentialgleichung zweiter Ordnung überhaupt zu kennzeichnen; äheren Bestimmung ihrer Beschaffenheit im Allgemeinen jedoch nicht im Minn beiträgt. Erst durch Zuhilfenahme der Relationen 102) und 103) wird dieser derung theilweise Genüge geleistet. Dies geht schon aus dem Umstande hervor, sowohl α als auch β Functionen zweier in der gleichen Weise von einander unabhängiger Variablen A und B sind, deren einziges gemeinsames Merkmal besteht, dass beide beliebige Functionen von x sind und sich zu einander in lben Verhältniss befinden, wie α und β. Wenn also zu den obigen Formen eine e Relation zwischen α und B, wie dieselbe durch ξ repräsentirt wird, noch ommt, so gelangt man hiedurch wohl zu einer näheren Beziehung zwischen A; im Uebrigen wird jedoch β nur insoferne tangirt, als dasselbe wohl eine on zweier Variablen wie zuvor bleibt, welche jedoch beide vom Coëfficienten α, ur einer beliebigen Function von x abhängen. Wenn wir also durch Gleichg der aus den Gleichungen 105) und 106) sich ergebenden allgemeinen Werthe als Functionen von β, t und t_1, eine weitere Beziehung zwischen β und zweien mten Functionen von α erhalten, so ist hiedurch noch immer kein klares Vers zwischen α und β hergestellt, sondern blos eine gewisse Beschränkung in schaffenheit derjenigen Function bedingt, welche durch einen dieser beiden ienten repräsentirt wird, wohingegen der andere vollständig unbeeinflusst bleibt. ge dessen wird in der Differentialgleichung von der Form

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

r der beiden Coëfficienten durch eine Function bestimmter allgemeiner Benheit ausgedrückt sein müssen, wenn der andere beliebig sein soll. Oder es ieser Anforderung durch eine beziehungsweise Beschränkung der allgemeinen ffenheit beider Coëfficienten Genüge geleistet, u. zw. in jenem Sinne, dass die ben entsprechenden Functionen von x einem bestimmten Gesetze in ihrer allıen Beschaffenheit unterworfen werden. Das einfachste diesbezüglich zum Auskommende Gesetz ist in den Relationen *)

$$F(x, a) = \underset{m = F(x\ a)}{\mathrm{E}}\left(e^{-\int m\,dx}\right) \quad \text{oder} \quad F(x, a) = \underset{m = F(x,\ a)}{\mathrm{E}}\left(-\frac{dl\ m}{dx}\right)$$

ellt, welche sich auch durch die Doppelgleichung

$$e^{-\int F(x,\ a)\,dx} = -\frac{dl\,F(x, a)}{dx} = F\,(x, a)$$

ken lassen Wird einem derartigen Gesetze durch einen der beiden Coëfficienten geleistet, so ist der andere in seiner allgemeinen Beschaffenheit von dem

*) Siehe: „Grossmann, Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen."

hen Gesetze abhängig. Diesen Auseinandersetzungen zufolge, lässt sich atiren, dass die Gemeinschaftlichkeit der allgemein ermittelten Werthe len Formen 105) und 106) als einzige allgemeine Bedingung für die Lösb Formen 107) und 108) angesehen werden muss. Dass dies wirklich der Fa sich auch aus folgendem Umstande entnehmen. Die allgemeinen Wurzel hungen 105) und 106) können auch mit Hinblick auf die Entstehung derselb Relationen 17), durch die beiden Formen 19) zur Darstellung gebracht werde n diese daher einander gleich sein, um eine den beiden genannten Gleich nschaftliche Wurzel zu liefern. Dies ist jedoch nur dann möglich, wen Bedingungen 55) bei den Formen 19) erfüllt werden, was aber es bedeutet, als der Gleichung 2), resp. 108) Genüge leisten. Nun finde auf den ersten Blick, dass die Gleichungen 105) und 106) blos unter Su gewisser Beziehungen zwischen den Coëfficienten t, t_1 und β oder α werden können, wodurch die Allgemeinheit dieser Frage beeinträchtigt Wenn wir nun auf anderem Wege zu einem erspriesslichen diesbezüg tate gelangt sind, so haben wir dies nur derjenigen Methode zu verd wir in unseren früheren Abhandlungen zur Anwendung brachten. Die treff der gemeinschaftlichen Wurzeln der Variablen ξ in den Gleichungen 06) wurde nämlich bereits mittelst der bekannten Gleichung dritten Grad ein beantwortet und wollen wir in Nachfolgendem hiefür den Nachweis li Da bekanntlich

$$\xi = -\frac{\alpha}{2B} \quad \text{und} \quad A = \frac{1-\xi'}{\xi} - \frac{\alpha}{2}$$

erhalten wir mit Hilfe der bekannten Relation 14), d. i.

$$\varsigma = -\frac{B}{A} \quad \text{die Form} \quad \xi = \frac{\alpha}{2A\varsigma}$$

mit nach Substitution des Werthes von A in dieselbe, die bereits in 73) zum Ausdruck gebrachte Beziehung

$$\xi = e^{-\int\frac{\alpha}{2}dx}\int\left(1-\frac{\alpha}{2\varsigma}\right)e^{\int\frac{\alpha}{2}dx}dx$$

Durch Ermittlung des Werthes von ς aus der Gleichung 30) lässt sich beliebigen Fall auch ξ bestimmen, wobei die allgemeine Beschaffenheit als beliebige Functionen von x in jener Weise aufrecht erhalten bleibt, den Anforderungen der Lösbarkeit der Differentialgleichungen von 2) entspricht. Die Beschränkung der den Coëfficienten α repräsentire on von x in ihrer allgemeinen Beschaffenheit, deren Wesen auch au n Coëfficienten ausgedehnt werden kann, gelangt daher in der algebrai der Gleichung 30) zum Ausdrucke, indem diese dritten Grades ist und ienten durch Functionen zweier von x beliebig abhängiger Variablen r werden. Jeder Fall, in welchem diese Gleichung nach ς löslich wird, ist eine Bedingung für die Lösbarkeit der Differentialgleichungen zweiter

g von der Form 2). Gäbe es eine Methode, mittelst welcher die Lösung ähn-
er Gleichungen dritten Grades allgemein durchgeführt werden könnte, so wären
die Differentialgleichungen zweiter Ordnung ohne Beschränkung der allgemeinen
haffenheit eines ihrer Coëfficienten löslich. Da wir jedoch Gleichungen solcher
allgemein blos dann lösen können, wenn dieselben zweiten Grades sind, oder
solche sich zurückführen lassen, so geht daraus hervor, dass die Differential-
hungen zweiter Ordnung, welche die Form 2) besitzen, nur unter der Bedingung
mein löslich sind, wenn die Gleichung dritten Grades 30) unter gewissen Sup-
ionen in eine solche zweiten Grades transformirt werden kann oder wenn der
arkeit jener Gleichung dritten Grades auf andere Weise Rechnung getragen wird.
Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist daher der Natur derselben gemäss
derjenigen einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit zweien Unbekannten
hzustellen, u. zw. mit zweien Unbekannten deshalb, weil sowohl α als auch β
tionen einer Variablen x sind. Soweit über die Integration der Differential-
hungen zweiter Ordnung im unbeschränktem Sinne. Handelt es sich dagegen um
solche im bestimmten Sinne, so wird jene Beschränkung, welche für einen,
hungsweise beide Coëfficienten bezüglich der allgemeinen Beschaffenheit der
lben repräsentirenden Functionen von x für den Fall der Lösbarkeit bedingt ist,
das Integrale der betreffenden Differentialgleichung übertragen, indem dasselbe
zwischen bestimmten, der Beschaffenheit von α und β als Functionen von x
prechenden Grenzen, den Anforderungen Genüge leistet. Dies bedeutet aber nichts
res, als dass jener Beziehung zwischen den Ordinaten zweier Curven, welche
h eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zum Ausdrucke gelangt, je nach
speciellen Beschaffenheit derjenigen Functionen von x, durch welche die Coëffi-
ten α und β repräsentirt werden, entweder unbeschränkt oder blos zwischen ge-
en Grenzen Rechnung getragen wird, d. h. die Beschaffenheit der beiden Cur-
einerseits und die Art der Beziehung zwischen ihren Ordinaten andererseits,
gen von der Eigenthümlichkeit der Coëfficienten α und β ab und sind daher
sgebend, ob diese Beziehung für die beiden Curven überhaupt oder blos zwischen
ssen correspondirenden Theilen derselben Giltigkeit besitzt.

Mithin haben wir den Nachweis geliefert, dass die Gleichung 30) allen Anfor-
ngen in Bezug auf die Allgemeinheit der Lösung der Differentialgleichungen
ter Ordnung gerecht zu werden vermag. Was nun die geometrische Beschaffenheit
ξ anbelangt, so liefert uns dessen Beziehung zu y und z eine Handhabe für einen
rlichen Beweis unserer Behauptung in Bezug auf die geometrische Beschaffenheit
Differentialgleichungen höherer Ordnung. Zum Zwecke der diesbezüglichen Er-
ung wollen wir folgendes Beispiel vorausschicken.

Denken wir uns in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme zwei Curven,
he zu einander insoferne in Beziehung stehen, als die erstere den Verlauf der
ren wahrscheinlichen Lebensdauer und die zweite jenen von einer bestimmten
hl Neugeborener in den einzelnen Altersstadien noch lebenden Personen dar-
, und zwar derart, dass die gemeinschaftliche Abscisse die jeweiligen Alters-

Abscisse und die Ordinate die entsprechende fernere wahrscheinliche Lebensdauer beziehungsweise die Anzahl der Ueberlebenden repräsentirt. Da nun die beiden Curven das Alter als Abscisse gemeinschaftlich haben, so werden ihre Ordinaten zu einander eine gewisse Beziehung involviren, deren Wesen wir nachstehend darlegen wollen.

Zu diesem Behufe greifen wir diesbezüglich zu deren ursprünglichen Form, um dieselbe sodann der weiteren Entwickelung zu unterziehen.

Die wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x wird allgemein durch folgenden Ausdruck zur Darstellung gebracht

$$w_x = \sum_{n=99-x}^{n=1} \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

d. h. diese ist die Summe der Lebenden L in den einzelnen dem Alter x nachfolgenden Jahren, dividirt durch die Anzahl derselben im Alter x, was gleichbedeutend ist mit

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{L_{x+2}}{L_x} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \ldots\ldots = \frac{L_{x+1}}{L_x}\left(1 + \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} \ldots\ldots\right)$$

Analog zu diesem ist auch

$$w_{x+1} = \frac{L_{x+2}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+3}}{L_{x+1}} + \frac{L_{x+4}}{L_{x+1}} \ldots\ldots$$

somit nach vollzogener Zusammenziehung dieser Formen sich der Ausdruck

$$w_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot (1 + w_{x+1})$$

ergibt. Diese Formen entsprechen offenbar, ebenso wie ihre Bezeichnungen, Jahresintervallen, weshalb zum Zwecke der Continuität derselben, d. h. zur Einführung unendlich kurzer Intervalle, anstatt L_{x+1}, $L_{x+2} \ldots\ldots$ die Bezeichnungen L_x … $L_{x+2\triangle x} \ldots\ldots$ eingeführt werden müssen

Die ursprüngliche Form übergeht sodann mit Rücksicht auf das Intervall … in den Ausdruck

$$w_x = \sum_{n=n}^{n=1} \frac{L_{x+n\triangle x}}{L_x} \cdot \triangle x$$

somit gleichbedeutend mit

$$w_x = \triangle x\left(\frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} + \frac{L_{x+2\triangle x}}{L_x} + \frac{L_{x+3.\triangle x}}{L_x} \ldots\right) = \triangle x . \frac{L_{x+\triangle x}}{L_x}\left(1 + \frac{L_{x+2.\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} \ldots\right.$$

und man erhält demgemäss auch

$$w_{x+\triangle x} = \triangle x\left(\frac{L_{x+2\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+3\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} + \frac{L_{x+4\triangle x}}{L_{x+\triangle x}} \ldots\right)$$

schliesslich analog zu Obigem der Ausdruck

$$w_x = \frac{L_{x+\triangle x}}{L_x} (\triangle x + w_{x+\triangle x})$$

t, welcher nach durchgeführter Rechnung der Form

$$L_x \cdot w_x - L_{x+\triangle x} \cdot w_{x+\triangle x} = L_{x+\triangle x} \cdot \triangle x$$

ht. Lässt man nun hierin $\triangle x$ gegen 0 verschwinden, so ergibt sich

$$L_x \cdot w_x - (L_x + d\, L_x)\,(w_x + d\, w_x) = L_x \cdot d\, x + d\, L_x \cdot d\, x$$

$d\, L_x \cdot d\, x$ und $d\, L_x \cdot d\, w_x$ ob ihrer Kleinheit verschwinden, liefert dies nach eführter Rechnung den Ausdruck

$$w_x \cdot \frac{d L_x}{d\, x} + L_x \cdot \frac{d\, w_x}{d\, x} + L_x = 0$$

ive

$$\frac{dl\, L_x}{d\, x} + \frac{dl\, w_x}{d\, x} = -\frac{1}{w_x}$$

sich die Relation zwischen den Lebenden L_x und der beziehungsweisen wahr- ichen ferneren Lebensdauer w_x in der Form

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{d\, x}{w_x}}}{w_x}$$

bei welcher das Alter x als vermittelnde Veränderliche fungirt. Setzt man lich daselbst $w_x = -\xi$ und $L_x = -y$, so wird diese Form mit derjenigen) identisch.*)

s besteht daher zwischen den Variablen y und ξ eine gleiche Beziehung, wie en L_x und w_x. Da nun gemäss der Form 109) zwischen z und ξ eine ähnliche ung stattfindet, so geht daraus hervor, dass dies auch zwischen y und z der ein muss, indem ξ blos als vermittelnd zwischen beiden anzusehen ist.

Um nun den geometrischen Sinn der Formen 105) und 106) zu erklären, be- en wir vorderhand denselben bezüglich der Gleichungen 107) und 108).

Die Beziehung dieser beiden Gleichungen besteht mit Rücksicht auf ihre tät mit den Differentialgleichungen 7) und 2) darin, dass der jeweilige Quo- ler Ordinaten y und z der beiden in Relation zu einander stehenden Curven $\varphi\,(x)$ und $z = \psi\,(x)$, multiplicirt mit einer Constante, gleich ist der Ordinate enen Curve, welche wir Verhältnisscurve nennen wollen.

*) Die weiteren diesbezüglichen Ausführungen siehe „Untersuchungen über das Wesen der tät vom Standpunkte des Absterbegesetzes“. „Die Mathematik im Dienste der National- ie“, IV. Lieferung.

Es ist also der Form 3) gemäss

112) $$\frac{z}{y} = e^{-\int\frac{\alpha}{2}dx} = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = e^{\int\frac{\alpha}{2}dx} = \eta$$

und somit sind $\zeta = f(x)$ und $\eta = \mathrm{f}(x)$ die Verhältnisscurven der in kommenden Linien $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$.

Differenziren wir nun diese Formen, so ergibt sich einerseits

113) $$\zeta' = -\frac{\alpha}{2}e^{-\int\frac{\alpha}{2}dx} \quad \text{und} \quad \zeta'' = -\left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha'}{2}\right)\frac{2}{\alpha}\cdot\zeta' \text{ resp. } \zeta'' = -$$

und andererseits

114) $$\eta' = e^{\int\frac{\alpha}{2}dx}\cdot\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \eta'' = \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha'}{2}\right)\eta \quad \text{resp.} \quad \eta'' = t\,\eta$$

In Folge dessen erhalten wir als Relationen für die Tangenten der ge Verhältnisscurven

115) $$\zeta'' = -t_1\zeta' \quad \text{und} \quad \eta'' = t\,\eta$$

aus denen hervorgeht, dass, falls nicht α sondern blos t_1 und t gegeben si der letzteren entsprechende Tangente eliptischer Natur ist. Nachdem wir nun vorausgeschickt haben, können wir darangehen, dasselbe auf die Formen 10 106) anzuwenden. Wir wissen, dass durch Elimination von t_1 aus densel Formen 107) und 108) entstehen. Hiedurch wird die Identität zweier versch Curven statuirt. Da nun die Form 105) die zwischen den Versältnisscurven ζ = und $\eta = \mathrm{f}(x)$ nothwendigerweise bestehende Beziehung darstellt, hingeg Form 106) eine solche zwischen zwei anderen Curven repräsentirt, von der hältnisscurven blos die eine mit $\zeta = f(x)$ identisch ist, so wird durch Elim von t_1 aus den Formen 105) und 106) der in der letzteren ausgedrückt ziehung auch die Verhältnisscurve $\eta = \mathrm{f}(x)$ eigen, wodurch den Gleichunge und 108) entsprochen wird. Auf diese Weise werden nun die Ordinaten de Curven, Functionen derjenigen der ursprünglichen werden müssen, welcher U in den Relationen 109) zum Ausdrucke gelangt.

In der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades 105) i diejenige Beziehung zwischen den Verhältnisscurven $\zeta = f(x)$ und η = f Darstellung gebracht, welche aus der, in der Reciprocität ihrer Ordinaten best Verwandtschaft entspringt. Dagegen repräsentirt die Differentialgleichung Ordnung 106) die Beziehung zweier anderer Linien, welche mit den in den 107) und 108) dargestellten Beziehungen der Curven $y = \varphi(x)$ und z = die eine der beiden Verhältnisscurven gemeinschaftlich hat.

lgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

IV.

Nachdem wir das Wesen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren trische Beschaffenheit in ausführlicher Weise beleuchtet haben, greifen wir nun seren speciellen Fall wieder zurück. Bereits in der ersten Abhandlung über dieses haben wir zum Schlusse darauf hingewiesen, dass die Lösung jenes speciellen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei welchen der Bedingung 33) II ochen wird, mit Bezug auf die Integration dieser Gleichungen im Allgemeinen esonderer Wichtigkeit ist. Untersuchen wir daher, inwiefern die, jenen speciellen charakterisirenden Ergebnisse geeignet sind, diese unsere Voraussetzung zu ertigen.

Die in den Formen 39) und 40) ausgedrückte Relation $\varsigma = \alpha \,.\, \omega$ entspricht edingung 33) II, welche in der Gleichung $t = \alpha' = \frac{\alpha^2}{2}$ zum Ausdrucke gelangt. Bedingung äussert sich daher in dem Umstande, dass der Coëfficient α in einer nmten Function von x von der Beschaffenheit

$$\alpha = -\frac{2}{x + 2\,C}$$

Ausdrucke kommt, während jene Function von x, welche den Coëfficienten β reprä- t, eine beliebige bleibt. Infolge dessen besitzen jene dieser Bedingung ent- henden Differentialgleichungen die Form

$$z'' - \frac{2}{x + 2\,C}\,z' + \beta\,z = 0$$

hungsweise

$$y'' = \left[\frac{2}{(x + 2\,C)^2} - \beta\right] \cdot y$$

Wird also in der letzteren dieser beiden Gleichungen der Werth von β durch unction

$$\beta = \frac{2}{(x + 2\,C)^2} - f(x)$$

mein zum Ausdrucke gebracht, worin $f(x)$ eine beliebige Function von x chnet, so gelangt man mit Hilfe der speciellen Gleichung 118) zu der allge- n Form

$$y'' = y \cdot f(x)$$

Auf diese Weise wird der specielle Fall, in welchem α jene in 116) dar- llte, bestimmte Function von x repräsentirt, den Anforderungen der Allgemein- unterordnet, so dass die Lösung der speciellen in 118) ausgedrückten Form die g der allgemeinen Form 120) in sich schliesst.

Substituirt man nämlich den in 116) ausgedrückten Werth von α, sowie den- n von $\varsigma = \alpha \,.\, \omega$ in die Form 21), so erhält man die Relation

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{(x + 2\,C)\,(1\tfrac{1}{2} - \omega)}$$

welche bereits in den Formen 48) zum Ausdrucke gelangt ist und die Lös
Gleichungen 118), beziehungsweise 120) vermittelt.

Berücksichtigt man ferner den in 87) dargestellten Ausdruck

$$\beta = \frac{4}{(x+2C)^2} \cdot \frac{(\omega - 2)(\omega - \frac{1}{2})}{(\omega - 1)^2 + 1}$$

so gelangt man auf dem Wege der Substitution der beiden letzteren Forme
Gleichung 118) zu dem Ausdrucke

$$122)\qquad \frac{dx}{x+2C} = -\frac{(\omega-1)^2+1}{2(\omega-1)^3 - 3(\omega-1)^2+1} \cdot \frac{d\omega}{\omega}$$

Infolge dessen lässt sich nun sowohl x als auch y durch ω allein vol
ausdrücken, so dass also ω als vermittelnde Variable zwischen diesen beid
sehen werden muss.

Es ist nämlich

$$123)\qquad x + 2C = e^{-\int \frac{(\omega-1)^2+1}{2(\omega-1)^3 - 3(\omega-1)^2+1} \cdot \frac{d\omega}{\omega}}$$

beziehungsweise

$$124)\qquad y = e^{\int \frac{(\omega-1)^2+1}{2(\omega-1)^3 - 3(\omega-1)^2+1} \cdot \frac{d\omega}{\omega(\omega-1)}}$$

wobei selbstverständlich der Beschaffenheit von ω entsprechend, x und y e
in unbeschränktem Sinne oder blos zwischen bestimmten Grenzen den Anford
genügen werden. Es handelt sich also nur noch darum, jene Relation festz
welche die Ermittlung dieses Umstandes ermöglicht, bezw. die Handhabe z
stellung der entsprechenden Grenzen liefert.

Zu diesem Behufe mögen die beiden Werthe von β, welche in den Au
87) und 119) dargestellt sind, herangezogen werden Durch Gleichstellung d
ergibt sich für ω der Werth

$$125)\qquad \omega = 1 + \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}[(x+2C)^2 \cdot f(x) - 1]^2}}{1 + \frac{1}{2}(x+2C)^2 \cdot f(x)}$$

welcher mit Bezug auf die Relation 122) zum gesuchten Resultate führt.

Gemäss diesen Ausführungen ist nach Form 122) die Relation

$$126)\qquad \int_b^a \frac{dx}{x+2C} = -\int_k^h \frac{(\omega-1)^2+1}{2(\omega-1)^3 - 3(\omega-1)^2+1} \cdot \frac{d\omega}{\omega}$$

als Bedingung für die Lösung der Form 120) maassgebend, wobei die der Va
entsprechenden Grenzen a und b mit den für ω sich ergebenden h und k
correspondiren müssen, als der Gleichung 125) unter allen Umständen Ge
leisten ist. Substituirt man daher in obige Relation anstatt ω den in der Fo
dargestellten Werth desselben, so erhält man unter dem rechtsseitigen I
ebenfalls eine reine Function von x, so dass auch bei diesem die Integration

Grenzen a und b sich vollzieht. Da nun aber die Function $f(x)$ beliebiger
chaffenheit sein kann, so wird es von dieser abhängen, welcher Art die Grenzen
nd b sich gestalten.

Man gelangt jedoch auch auf anderem Wege zu einem ähnlichen Resultate,
hes schon deshalb von Interesse ist, weil in demselben eine andere Curve zum
schein kommt, welche mit der in 120) ausgedrückten in einer bestimmten Be-
ung steht und in Folge dessen mit derselben ein Curvenpaar bildet.

Setzt man in den Gleichungen 105) und 106) der vorigen Abhandlung den
th

$$t_1 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha'}{2}\right)\frac{2}{\alpha} = 0$$

wird hiedurch dem in 116) ausgedrückten Werthe von α entsprochen und man
ält aus jenen beiden Gleichungen, zwei neue von der Form

$$2\,(\xi' - 1)^2 + (\xi' - 1) - \xi^2\, t = 0$$

$$\xi'' - \beta\,\xi = 0$$

ch' letztere Gleichung derjenigen Curve entspricht, welche mit der in 120) aus-
rückten ein Curvenpaar bildet. Bemerkenswerth ist, dass sich dieselbe mit Rück-
t auf den in 110) ausgedrückten Werth von ξ auch folgendermassen schreiben lässt.

$$\left(\frac{1}{B}\right)'' - \frac{2}{x + 2\,C}\left(\frac{1}{B}\right)' + \left(\frac{2}{(x + 2\,C)^2} - \beta\right)\frac{1}{B} = 0$$

Da nun unter diesen Umständen $t = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha'}{2} = \frac{2}{(x + 2\,C)^2}$ ist, so ergibt sich
r einerseits

$$\xi'^2 - \frac{3}{2}\,\xi' + \frac{1}{2} = \left(\frac{\xi}{x + 2\,C}\right)^2$$

ective mit Zuhilfenahme der Form 129)

$$\int \beta\,(x + 2\,C)\,dx = \int \frac{d\,\xi'}{\sqrt{(\xi' - 1)\,(\xi' - \frac{1}{2})}}$$

andererseits durch Differentiation der Form 131)

$$\frac{\xi''}{\xi} = \frac{\xi'\,(x + 2\,C) - \xi}{(\xi' - \frac{3}{4})\,(x + 2\,C)^3}$$

Nimmt man nun abermals die Form 129) zu Hilfe, so ergibt sich

$$\xi'\,(x + 2\,C)\left(1 - \beta\,(x + 2\,C)^2\right) - \xi + \frac{3}{4}\,\beta\,(x + 2\,C)^3 = 0$$

h weitere Differentiation erhält man ferner, falls der Abkürzung halber
$+ 2\,C)^3 = \mu$ gesetzt und ξ'' eliminirt wird,

$$\xi' - \frac{3}{4} + \xi\,\frac{\mu^2 - (x + 2\,C).\mu}{\mu'\,(x + 2\,C)^3} = 0$$

da der Form 131) zufolge auch

$$\xi' - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{\xi}{x + 2\,C}\right)^2}$$

ist, so ergibt sich, falls man der Kürze halber

$$\frac{\mu^2-(x+2C).\mu}{\mu'(x+2C)^3} = -\frac{\Phi}{x+2C}$$

setzt, die Relation

$$136) \quad \xi = \frac{x+2C}{4\sqrt{\Phi^2-1}} \quad \text{resp. } 137) \quad \xi' = \frac{1}{4}\left(\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2-1}}+3\right)$$

und zwar infolge der Substitution der Form für ξ in eine der beiden Gleichun 134) und 135).

Die beiden Formen 136) und 137) sollten nun mit einander insofern über stimmen, als der Differentialquotient der ersteren identisch sein müsste mit zweiten, was jedoch nur zwischen gewissen Grenzen der Fall ist, und zwar er sich durch Differentiation der ersteren Form und Gleichstellung mit der zweiten Relation

$$138) \quad \int_b^a \frac{dx}{x+2C} = -\int_m^l \frac{\Phi\, d\Phi}{(\Phi^2-1)\left[\Phi-1+3\sqrt{\Phi^2-1}\right]}$$

welche, mit Rücksicht auf die Grenzen, als Bedingung für die Lösung der Gleich

$$139) \quad \xi'' = \beta\,\xi = \left[\frac{2}{(x+2C)^2} - f(x)\right]\xi$$

gilt, wobei also der Werth von Φ durch die Relation

$$\Phi = \frac{\beta - \beta^2(x+2C)^2}{\beta'(x+2C)+3\beta}$$

repräsentirt wird, während $f(x)$ eine beliebige Function von x darstellt. (Siehe Form 1

Die Formen 120) und 139) stellen nun Gleichungen zweier Curven dar, de Ordinaten in einer durch die Form 109) zum Ausdrucke gebrachten Beziehung zu ander stehen, welche sich darin äussert, dass die durch zwei verschiedene Ordinaten Curve $y'' = y\,.f(x)$ begrenzte Fläche derselben gleich ist der Differenz der Prod dieser Ordinaten mit den entsprechenden Ordinaten der anderen Curve $\xi'' = \beta\,.\,\xi$; d

$$140) \quad \xi_2\,y_2 - \xi_1\,y_1 = \int_{x_2}^a y\,dx - \int_{x_1}^a y\,dx$$

Diese Relation besitzt jedoch blos Giltigkeit zwischen den jeweiligen, bei Curven gemeinsamen Abscissen-Grenzen a und b, welchen also auch die Formen 1 und 124) sowie auch diejenige in 132) im beziehungsweisen Sinne unterordnet st

Auf Grund dieser Normen lassen sich unter Zuhilfenah der Formen 3) und 4) sämmtliche Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form 2), in denen nicht nur β, sond auch α eine beliebige Function von x ist, zwischen Gren lösen.

DIE MATHEMATIK

im

ienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

tische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

Dr. LUDWIG GROSSMANN

ber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

Fünfte Lieferung.

WIEN 1890.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sophienbrückengasse Nr. 5.

Druck von *Josef* Bayer & Comp., I., Wollzeile 25.

VORREDE.

Die Errungenschaften der Nationalökonomie und ihrer praktischen Disciplinen
ben im Laufe der letzten Decennien dem Wesen des socialen Getriebes ein voll-
ndig verändertes Gepräge verliehen. Hauptsächlich die Institutionen des Bank-
d Assecuranzwesens sind es, welche die Entwicklung und Erhaltung des Volks-
rmögens unterstützend, die wirthschaftliche Kräftigung der Staaten zum grossen
eile bewirkten und auf diese Weise jene Metamorphose herbeiführten. Die fort-
reitende Erkenntniss von der eminenten Bedeutung dieser auf dem culturellen
rtschritte beruhenden wirthschaftlichen Schöpfungen, musste dazu beitragen, auf
en Gebieten des socialen Strebens neue Gesichtspunkte zu schaffen und den Spar-
n des Volkes anzuregen. Und so sehen wir die auf wissenschaftlicher Basis auf-
auten wirthschaftlichen Principien in die Arterien des socialen Körpers immer
hr eindringen und jene Postulate desselben fördern, welche die Nationalökonomie
m menschlichen Streben vorgezeichnet.

Von der Absicht beseelt, hiezu nach besten Kräften beizutragen, ist es in
inem Bestreben gelegen, die Ergebnisse der diesbezüglichen Theorien der populären
stellung zu unterwerfen, also nicht nur Neues auf jenen Gebieten zu schaffen,
dern auch dasselbe der praktischen Anwendung zuzuführen.

Wenn ich mir daher die Aufgabe stelle, in diesem Theile meines Werkes haupt-
hlich die praktische Seite der finanz- und versicherungstechnischen Disciplinen
cultiviren, so ist dennoch manche theoretische Auseinandersetzung nicht zu ver-
iden, indem sich immer wieder die Nothwendigkeit weiterer diesbezüglicher For-
ungen ergibt. Hiedurch wird jedoch die Richtung einer in's Praktische ein-
lagenden Methode nicht beeinflusst. Und so hoffe ich, dem mir gesteckten Ziele,
en neuen Anforderungen auf den verschiedenen wirthschaftlichen Gebieten Rech-
ng zu tragen, immer näher zu kommen.

Wien, im Juni 1890.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler:

Auf Seite 57, Zeile 11, nach „gekürzt anzunehmen" ist einzuschalten: „wobei jedoch ei Semester als durchschnittliche Verstreichungsfrist zwischen dem Zeitpunkte des D abschlusses und dessen vollständiger Begebung bei der Verzinsungsdauer in An bringen ist."
Auf Seite 46 soll es lauten anstatt:
$K_0' = 25000 \times 0{\cdot}45286777 = 11{,}321{\cdot}69$, richtig: $K_0' = 25000 \times 0{\cdot}45289042 = 11{,}3$

Zur Lösung der Kriegsversicherungsfrage.

Bereits im Jahre 1886 als die Frage der allgemeinen Kriegsversicherung auf-
orfen wurde, habe ich in zwei aufeinanderfolgenden Abhandlungen die Grundlagen
elben zur Erörterung gebracht und diejenigen Momente festzustellen versucht,
elst deren es möglich wäre, diese Frage in rationeller Weise einer Lösung zuzu-
en. In erster Linie handelte es sich darum, für die erhöhte Sterblichkeit im
ege gewisse empirische Anhaltspunkte zu schaffen, welche geeignet wären, einen
Kriegsgefahr entsprechenden Zuschlag zur normalen Lebensversicherungsprämie
bieten. Angesichts der mangelnden statistischen Daten, musste ich mich nur dar-
beschränken, die Bedingungen festzuhalten, welche nach dem Alter und der
stigen Sterbenswahrscheinlichkeit der für den Kriegsfall zu Versichernden, das
eigerte Risico vorläufig vergleichsweise zu präcisiren im Stande wären. Ferner
ich bestrebt, diejenigen Factoren hervorzuheben, welche die Ermittelung eines
tigen Resultates zu begünstigen geeignet schienen und kam schliesslich in die
e, einen hinreichend praktikablen Weg einzuschlagen, um dasselbe in entsprechende
hemathische Formen zu bringen. In Folge der bei jüngeren, der Kriegspflicht
erworfenen Personen, mit deren Eignung sich ergebenden höheren Sterbensgefahr
Kriege, musste sich dieselbe mit dem zunehmenden Alter in ein umgekehrtes
hältniss zu diesem stellen. Hingegen gestaltete sich die mit dem Alter zu-
nende allgemeine Sterbensgefahr zu einem das Kriegsrisico entlastendem Factor
her mit dem Alter des Versicherten im geraden Verhältnisse zunehmend, schliess-
den immer geringer werdenden Einfluss des Kriegsrisicos paralisiren musste.
diese Weise ereignete es sich, dass der, die normale Lebensversicherungsprämie
hende Kriegsprämienzuschlag eine mit dem Alter abnehmende Beschaffenheit
ächte, so dass mit Hinzuziehung desselben zu der gewöhnlichen Lebensversiche-
gsprämie, welche bekanntlich im höheren Beitrittsalter immer grösser wird, sich
Rahmen der kriegspflichtigen Dauer eine gewisse Gleichheit der für verschiedene
rittsalter giltigen Prämienbeträge hätte ergeben müssen.

Dieser Umstand war jedoch geeignet, vom geschäftlichen Standpunkte die nach-
ligsten Folgen heraufzubeschwören, da es Jeder für zweckmässig gehalten hätte,
en Beitritt solange als möglich hinauszuschieben, insbesondere als die zu zahlenden
resprämien in diesem Falle bis zur äussersten Grenze des kriegspflichtigen Alters
e derart unbedeutende Steigerung erfahren haben würden, dass hiedurch die Vor-
ile einer in jüngeren Jahren abgeschlossenen Versicherung illusorisch geworden
en. Es musste daher eine derartige Combination, durch welche die Kriegsprämie
zum integrirenden Bestandtheil der Lebensversicherungsprämie gestaltet hätte,
lständig fallen gelassen werden, insbesondere, als auch andere Gründe massgebend
ren, um die Unzulässigkeit derselben zu documentiren. Es kann nämlich für die
iegsversicherung nicht gleichgiltig sein, ob die zu zahlenden Beträge in Jahres-
mien oder in Form einer einmaligen Prämie im Vorhinein geleistet werden, da
Dotirung der nöthigen Reserven Fonds nothwendig sind, welche im Falle eines

Krieges, resp. nach Beendigung desselben sofort in Anspruch genommen werden müssten. Die Ansammlung dieser Fonds könnte daher im äussersten Falle bis knapp vor dem Kriegsausbruch verschoben werden, d. h. die als einmalige Kriegsprämien fixirten Beträge könnten insolange in Jahresraten zur Einzahlung gelangen, als die Eventualität der Kriegsgefahr nicht in Aussicht stünde. Im Falle einer allgemeinen Mobilisirung jedoch müssten sämmtliche gestundeten Kriegsprämien-Beträge ohne Ausnahme voll eingezahlt werden, und zwar innerhalb einer von Fall zu Fall zu bestimmenden Frist.

Nun handelt es sich aber darum, ob jeder Versicherte im Stande wäre, einen nach Maassgabe der für den Kriegsfall versicherten Summe angemessenen Betrag innerhalb der festgesetzten Frist zu beschaffen, und dies ist ein weiterer Factor, welcher die Kriegsversicherung als einen integrirenden Bestandtheil der Lebensversicherung in Frage stellt. Würde nämlich die Kriegsprämie als Theil der Lebensversicherungsprämie betrachtet werden, so wären die Raten, welche jährlich dem Kriegsreservefonds zufliessen würden, viel zu geringe, weil dieselben auf die gesammte fernere Lebensdauer vertheilt werden müssten. Abgesehen aber davon, dass hiedurch den Anforderungen der nöthigen Prämienleistung nicht einmal im Principe entsprochen wäre, weil mit Rücksicht auf die zeitliche Kriegsgefahr die Gegenleistung auf eine viel zu lange Dauer hinausgeschoben wäre, könnte ein solcher Modus schon deshalb nicht acceptirt werden, weil die Schaffung eines Kriegsreservefonds auf diese Weise sich als unmöglich gestalten würde. Im Falle jedoch zu diesem Zwecke die restliche Einzahlung der ferneren Kriegsprämienbeträge vor Ausbruch des Krieges auf einmal zu leisten wäre, dann würde die Leistungsfähigkeit der Versicherten viel zu sehr in Anspruch genommen werden müssen, weil die bereits bezahlten, in diesem Falle geringfügigen jährlichen Beträge die Gesammtsumme nur um wenig vermindern würden, abgesehen davon, dass bei etwaiger momentaner Zahlungsunfähigkeit des Versicherten, eine bedeutende Schmälerung seiner etwaigen Ansprüche gar nicht zu vermeiden wäre.

Soll daher den gestellten Anforderungen Genüge geleistet werden, so muss die Kriegsgefahr ganz abgesondert von der gewöhnlichen Sterbensgefahr behandelt werden, weil sich die Kriegsversicherung nicht wie die Lebensversicherung für die jährliche Prämienzahlung eignet. Wenn auch eine jährliche Zahlung der Kriegsprämie nach Maassgabe der Umstände zulässig ist, so kann man in derselben blos die ratenweise Deckung einer im Vorhinein fälligen einmaligen Prämie erblicken, deren Stundung blos bis zum Eintritte des Kriegsfalles stipulirt werden kann. Um nun bei plötzlichem Eintritte eines solchen Falles die Versicherten nicht allzusehr in Mitleidenschaft zu ziehen, ist es die Sorge der Versicherungsinstitute die Zahlung der Kriegsprämie derart einzurichten, dass hiedurch einerseits keine allzugrosse jährliche Mehrbelastung hervorgebracht wird, und andererseits der Kriegsreservefond schon vorzeitig die nöthige Kräftigung erfährt.

Zu diesem Behufe müsste mindestens der dritte Theil der angemessenen einmaligen Kriegsprämie mit der ersten jährlichen Lebensversicherungsprämie entrichtet werden, welcher Betrag unter allen Umständen dem Kriegsreservefond anheimfallen

e. Die nächsten zwei Dritttheile müssten in Jahresraten derart zur Einzahlung gen, dass im Laufe von sieben Jahren die volle Einzahlung der Kriegsprämie t Zinsen vollzogen wäre, und zwar in sieben Jahren aus dem Grunde, weil man mangelung anderer Anhaltspunkte, die Karup'sche Berechnung, laut welcher schnittlich jedes siebente Jahr ein Kriegsjahr ist, acceptiren muss.

Im Mobilisirungsfalle jedoch müssten sämmtliche noch rückständigen Jahres- auf einmal entrichtet werden, weil mit dem Eintritte der Kriegsgefahr auch Dauer der Stundung derselben ablauft.

Diese Maassnahmen wären zugleich geeignet, wenigstens zum Theile jene ierigkeiten zu beheben, welche sich bei der Aufstellung der Bedingungen für Versicherung gegen Kriegsgefahr im Allgemeinen ergeben und welche haupt- lich darin bestehen, dass

1. der Zeitpunkt, in welchem die zu übernehmenden Verpflichtungen fällig len, vorher unbestimmbar ist und unmittelbar nach Eingang der Verpflichtungen eten kann;

2. die Höhe des Risicos nicht mit derjenigen Wahrscheinlichkeit zu ermessen die allen übrigen Geschäftszweigen der Lebensversicherung zu Grunde liegt und Berechnungen derselben eine so grosse Sicherheit und Zuverlässigkeit verleiht;

3. der einzelne Versicherte, im Frieden die Wahrscheinlichkeit zum Kriegs- ste berufen zu werden, gering anschlagend, nicht gerne zur Sicherstellung gegen ihm ferne liegende Risico erhebliche Opfer bringt, vielmehr erst dann sich ent- esst, wenn die Gefahr nahegerückt ist und nach ihrem Umfange besser bemessen en kann;

4. aus dem vorhergehenden Grunde den Versicherungs-Gesellschaften die An- mlung eines Kriegsreservefonds in Friedenszeiten fast unmöglich gemacht ist.

Aus diesen Gründen könnte die Kriegsversicherung blos auf bereits für den esfall Versicherte ausgedehnt werden, und auch hier könnte, um der in Punkt 3 esprochenen Eventualität vorzubeugen, die Bedingung festgestellt werden, dass r Versicherte, der sich die Versicherung gegen Kriegsgefahr für später oder für geeigneten Moment vorzubehalten beabsichtigt, eine einmalige Extraprämie von m gewissen Percent desjenigen Betrages, auf den die Versicherung gegen Kriegs- hr ausgedehnt werden soll, zu zahlen hätte, und zwar müsste dieselbe mindestens dritten Theil der entsprechenden einmaligen Kriegsprämie betragen. Nur solchen icherten, welche dieser Bedingung nachkommen, mag es gestattet sein, die im len eingegangene einfache Versicherung für den Todesfall auch für die Kriegs- hr auszudehnen.

Natürlich müsste auch hier eine äusserste Frist, bis zu welcher im Falle einer gsgefahr die Kriegsversicherung angemeldet werden müsste, festgesetzt werden, zwar von Fall zu Fall. Eine solche im Momente der Kriegsgefahr angemeldete icherung würde auch dementsprechend mit einer zu zahlenden Ergänzungs- mie bemessen werden müssen, welche der abgelaufenen Versicherungsdauer gemäss capitalisirten, vom Zeitpunkte der eingegangenen Versicherung unbezahlten jähr- en Kriegsprämien gleichkommen würde.

Es ist nun ferner ein weiterer Umstand von Belang, welcher geeignet ist,
minder die Lösung der Kriegsversicherungsfrage zu beeinflussen. Ist nämlich ei
den Kriegsfall Versicherter nicht in der Lage, im Momente der eingetretenen Kr
gefahr seine Kriegsprämie bis zur vollen Höhe zu ergänzen, so tritt an die Ar
die Nothwendigkeit heran, den Baarwerth der Polizze zu diesem Zwecke her
ziehen, und zwar in derselben Weise, als ob der Versicherte ein Darlehen au
Polizze contrahirt hätte, um von demselben die noch restlichen Raten der Kr
prämie zu begleichen. Dies ist jedoch nur bei Versicherungen möglich, welche
längere als dreijährige Bestandesdauer besitzen. Bei Versicherungen mit kürzere
dreijähriger Bestandesdauer ist, im Falle der Versicherte die Ergänzung der Kr
prämie bis zur vollen Höhe nicht leisten kann, eine Capitalsreduction unausw
lich. Es ist nur die Frage, in welcher Weise eine solche zu geschehen hat,
hiedurch nicht die Rechte des Versicherten geschmälert werden sollen. Es ist
lich ein grosser Unterschied, ob die Reduction in Folge unterbrochener Zahlung
weiteren Lebensversicherungsprämien, oder in Folge einer anderen vom Versich
eingegangenen besonderen Verpflichtung nothwendig wird, welche ebensogut
schadet der Lebensversicherung hätte vermieden werden können. Diesbezü
müssen wir also zwei verschiedene Fälle von Capitalsreduction unterscheiden,
denen der erste durch unterbrochene Prämienzahlung überhaupt und der
durch nicht erfolgte Ergänzung der Kriegsprämie bis zur vollen Höhe bei
tretenem Kriegsfalle verursacht wird. Im ersteren Falle wird also die Capitalsredu
falls die gezahlte Kriegsprämien-Quote es zulässt, derart durchgeführt, dass ein
der bezahlten Kriegsprämie zur Deckung der fälligen Lebensversicherungsp
herangezogen und der Rest zur Schaffung der verminderten Kriegsprämie ver
wird. Im letzteren Falle hingegen wird entweder die Capitalsreduction mit
sicht auf die bereits gezahlte Kriegsprämien-Quote vollzogen, indem der Le
versicherungsbetrag für den Fall der glücklich überstandenen Kriegsgefahr au
bleibt, oder es wird die Gesammtleistung der gezahlten Lebens- und Kriegsver
rungsprämien im aliquoten Sinne in Rechnung gebracht. Demnach wird also fol
Norm gelten:

Im Falle einer durch Unterbrechung der Prämienzahlung überhaupt
gewordenen Capitalsreduction ist vor allem anderen dasjenige Verhältniss zu erm
in welchem die dem reducirten Capital entsprechende einmalige Kriegsprämie
ursprünglichen sich befindet. Die bereits bezahlten Kriegsprämienbeträge sind
von der neu ermittelten einmaligen Kriegsprämie unverkürzt in Abzug zu br
und der Rest auf die weiteren, auf das siebente Bestandesjahr der Versicherung
fehlenden Jahre zu vertheilen. Geschieht die Capitalsreduction bei Eintritt
Kriegsfalles, so ist die Reduction des Versicherungsbetrages derart vorzunehmen,
durch die bereits eingezahlten Prämien, sowohl die dem reducirten Capital
sprechende volle Kriegsprämie als auch alle bisher fälligen Jahresprämien im
cirten Sinne gedeckt sind. Die Methode dieses Vorganges soll noch später
näheren Erörterung unterzogen werden.

Zur Lösung der Kriegsversicherungsfrage.

Die selbstständige Prämienleistung eines jeden gegen die Kriegsgefahr zu Ver-
nden als Grundlage unserer Auseinandersetzungen annehmend, behandelten wir
vorigen Abhandlung die Kriegsversicherungsfrage vom rein technischen Stand-
e Hiedurch traten jene Factoren von selbst hervor, welche der rationellen
führung der Versicherung gegen Kriegsgefahr in diesem Sinne im Wege stehen
ieselbe zu compliciren geeignet sind. Es ist daher einleuchtend, dass wir nicht
besonderen Grund daran gingen, unter den genannten Voraussetzungen die
sversicherungsfrage zu behandeln. Die Schwierigkeiten, welchen die Lösung der-
in jenem Falle unterworfen ist, sollten auf diese Art in den Vordergrund
t werden, und die zu deren Behebung nöthigen Maassregeln den Weg kenn-
en, der eingeschlagen werden müsste, um einem mehr als schwerfälligen Systeme
geeignete Basis zu bieten.

Abgesehen davon, das unter den gegebenen Auspicien das Bestreben, die Kriegs-
herung zum integrirenden Bestandtheil der Lebensversicherung zu machen,
ich den Zweck verfehlen müsste, weil der mit dem Alter abnehmende Kriegs-
enzuschlag die diesfalls steigende Tendenz der Lebensversicherungsprämie nahezu
sirt hätte, konnte bei strenger Auffassung der technischen Seite dieser Frage
über der unbefriedigten Leistung des Versicherten die vorhergehende Gegen-
ng des Versicherers nicht als gerechtfertigt betrachtet werden. Wäre nämlich
ebensversicherungsprämie einfach um den Kriegsprämienzuschlag erhöht worden,
re die Leistung für die Versicherung gegen Kriegsgefahr auf die ganze Lebens-
des Versicherten vertheilt worden, welcher Umstand unter Beibehaltung obiger
ssetzungen, mit dem Versicherungsprincipe insofern in Collision gerathen wäre,
e Kriegsgefahr nicht nur eine zeitlich eintretende, sondern auch eine zeitlich
ergehende ist, und sich daher für eine Versicherung mit periodischer Prämien-
ng auch aus anderen naheliegenden Gründen nur in dem Falle eignet, wenn
intretenden Kriegsgefahr die Befriedigung der ferneren noch unbeglichenen
ien vorangeht, da sonst die entsprechende Ansammlung der nöthigen Fonds zur
ng von Reserven illusorisch wird. — Anders verhält sich diese Frage nun in dem-
n Falle, wo die Kriegsversicherung als integrirender Bestandtheil der Lebens-
herung in der Weise aufgefasst wird, dass ein allgemeiner Zuschlag zur Lebens-
herungsprämie die Gegenleistung für das aus der Kriegsgefahr erwachsende
deckt und blos der Berufssoldat durch einen entsprechenden Kriegsprämien-
lag dem Superrisico Genüge leistet. In diesem Falle muss sich offenbar die
g viel einfacher gestalten, da hiedurch jenen Bedingungen, welche unter anderen
ssetzungen einen störenden Einfluss geltend machten, hier von selbst entsprochen
Während die früheren Suppositionen zu einem Resultate führten, welches den
s eines jährlichen Kriegsprämienzuschlages zur Lebensversicherungsprämie nach
gabe der dem Versicherten entsprechenden Eignung zum Kriegsdienste als
chführbar erscheinen liessen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil die
ge, welche jährlich dem Kriegsreservefonds zugeflossen wären, sich im Verhält-

zur Berechnung der Kriegsversicherungsprämie* in dieser Schrift erschienenen
handlung diese Relation mathematisch zum Ausdrucke, indem wir zur Eruirung
jeweiligen vom Lebensalter abhängigen Riskenbewerthung einen Coëfficienten C
führten, welcher als ein für die verschiedenen Altersclassen jeweilig ermittelter,
stanter Factor in der Formel für die Kriegsprämie jene diesbezüglichen Beziehu
zur Darstellung bringen sollte, während die Kriegsprämie selbst in ein vorder
noch unbestimmtes percentuales Verhältniss zur Normalprämie gebracht wurde.
diese Weise gelangten wir zu der einfachen jedoch umfassenden Form

$$K = \frac{P \cdot q \cdot C}{100}$$

in welcher K die Kriegsprämie, P die Normalprämie (Nettoprämie) und q den
centsatz darstellt. Für den Coëfficienten C kamen nun folgende den Ausführu
im obigen Sinne entsprechenden Relationen in Betracht:

1. Die Coëfficienten der zu zahlenden Kriegsprämien
halten sich zu einander, im umgekehrten Verhältnisse der
selben entsprechenden Altersclassen.

2. Die Coëfficienten der zu zahlenden Kriegsprämien
halten sich zu einander, wie die Erlebenswahrscheinl
keiten der denselben entsprechenden Altersclassen.

Diese nun in mathematische Formen gebracht führten zu folgendem Resul

$$C_m : C_{m+k} = \frac{W_m}{m} : \frac{W_{m+k}}{m+k}$$

worin m das Alter und W die Erlebenswahrscheinlichkeit darstellt. Auf Grund d
Form lässt sich nun eine tabellarische Zusammenstellung jener Coëfficienten fü
verschiedenen Alter zur Veranschaulichung bringen.

Alter m	Erlebens-wahrschein-lichkeit W_m	Coëfficient C_m	Alter m	Erlebens-wahrschein-lichkeit W_m	Coëfficient C_m
19	41·67567	2·19345	31	33·21115	1·07133
20	40·97818	2·04891	32	32·49850	1·01558
21	40·27914	1·91804	33	31·78526	0·96319
22	39·57848	1·79902	34	31·07131	0·91386
23	38·87612	1·69027	35	30·35651	0·86733
24	38·17244	1·59052	36	29·64332	0·82343
25	37·46732	1·49869	37	28·93116	0·78192
26	36·76072	1·41387	38	28·21733	0·74256
27	36·05294	1·33529	39	27·50168	0·70517
29	35·34390	1·26228	40	26·78417	0·66960
29	34·63394	1·19427	41	26·06461	0·63572
30	33·92291	1·13076	42	25·34417	0·60343

Bezüglich der weiteren Ausführungen ist es nothwendig vorher die rechnu
mässige Ermittelung des Percentsatzes q nach den jeweiligen Kriegsgefahr-K
gorien zur Durchführung zu bringen.

Die Versicherung für den Fall der Invalidität in Folge Kräfteverfalles.

An die Reflexionen, welche das Wesen der durch Kräfteverfall hervorgebrachten alidität des Menschen mit Bezug auf das Absterbegesetz behandelten, knüpften die weiteren diesbezüglichen Untersuchungen und wurde es uns mit Hilfe der raus entwickelten Conclusionen möglich, die grundlegenden Gedanken weiter zu olgen, so dass wir in den letzten Abhandlungen schliesslich daran gehen konnten, der Basis der erzielten Resultate das geeignete Materiale für die Invaliditäts- Altersversicherung technisch zu verwerthen. Es ist uns dies insoferne gelungen, wir in den Stand gesetzt wurden, die „wahrscheinliche Lebensdauer des Menschen rüstigen Zustande" einem Gesetze zu unterordnen, und dieses in Verbindung mit Absterbegesetze unseren Zwecken dienstbar zu machen. Weit davon entfernt, praktische Bedeutung und den Werth dieser Erfolge zu überschätzen, können dennoch nicht umhin darauf hinzuweisen, dass, wenn auch unsere Berechnungen jener Invalidität, welche durch Unfall hervorgebracht wird, gänzlich Abstand men, dieselben immerhin über den thatsächlichen Verlauf der Leistungsfähigkeit Menschen in seinen einzelnen Lebensstadien Aufschluss geben. Jene durch Unfall orgebrachte Invalidität des Menschen, deren wahrscheinliche Opferzahl blos auf Wege der statistischen Ermittelungen rechnungsmässig festgestellt werden kann, et wohl einen wichtigen Bestandtheil jener Wahrscheinlichkeitslehre, welche das n der Invalidität des Menschen umfasst, jedoch ist dieselbe ohne Berücksichti- der auf natürlichem Wege sich vollziehenden Invalidität eine Anomalie, welche sich allein nur die Grundlage der Unfallversicherung, nie aber der Invaliditäts- Altersversicherung bilden kann. Erst durch Verbindung beider, die Invalidität Menschen bewirkender Ursachen, ist es möglich jener Aufgabe gerecht zu werden, he an die Invaliditäts-Versicherung im Allgemeinen gestellt wird. Es lässt sich nicht leugnen, dass bisher noch verlässliche Anhaltspunkte zur Constatirung Vorhandenseins einer durch Kräfteverfall erfolgten Invalidität fehlen, wohin- n eine solche, durch Unfall hervorgebrachte ihrem Grade nach sich annäherungs- e beurtheilen lässt. Verfehlt wäre es aber, die Vortheile einer auf synthetischem Wege ebauten Grundlage deshalb aufzugeben, weil nicht auch gleichzeitig allen Bedin- gen der praktischen Anwendung derselben entsprochen werden kann. Die Argu- te für diejenigen Anhaltspunkte, an welche sich die geschaffene Basis des Rüstig- gesetzes anlehnt, sind von solch' überzeugender Art, dass es schwer wird, den bezüglich entspringenden Folgerungen irgendwelche Zweifel entgegenzusetzen, und noch mehr, es stimmen die erzielten Rechnungsresultate mit den bisherigen hrungen in merkwürdiger Weise überein, wodurch der praktische Werth derselben mentirt erscheint.

Bezüglich der technischen Beschaffenheit der erzielten Ergebnisse mag Folgen- erwogen werden. Wenn man in Betracht zieht, dass die Betreff der Invalidität

in Folge Kräfteverfalles sich ergebenden Resultate und deren tabellarische Zusammen-
stellungen sich auf das gesammte Menschenmateriale ohne Rücksicht auf Geschlecht
und Beschäftigung beziehen, so wirft sich unwillkürlich die Frage auf, welche Ver-
wendung dieselben vom versicherungstechnischen Standpunkte bei den Berechnungen
für Pensionscassen bestimmter abgeschlossener Berufszweige finden können. Abgesehen
davon, dass sich diese Resultate je nach den diesbezüglich zugrundeliegenden Sterb-
lichkeitsverhältnissen der jeweiligen Berufszweige ändern, sind auch noch diejenigen
Umstände maassgebend, welche ihren Einfluss in Bezug auf die jeweilige mittlere
Dauer der Arbeitsfähigkeit geltend machen. Hier besitzt die Statistik ein reiches
Gebiet, auf welchem sie Gelegenheit hat, diejenigen Behelfe zu sammeln, welche zur
rationellen Handhabung dieses Versicherungszweiges dienen könnten. Während manche
Berufsarten mit einer besonderen Langlebigkeit einerseits und einer auffallend kurzen
Rüstigkeitsdauer andererseits verbunden sind, gibt es wieder solche, bei welchen fast
während der ganzen Lebensdauer eine sozusagen unverwüstliche Rüstigkeit sich kund
gibt, wobei wieder die mittlere Lebensdauer, gemäss der Beschaffenheit der jeweiligen
Einflüsse, welche nach der Art des Berufes auf die Gesundheit des Menschen ein-
wirken, eine längere oder kürzere sein kann. Der mehr oder weniger aufreibenden
physischen Thätigkeit entsprechend, welche ein Beruf erfordert, ist also nicht nur
die beziehungsweise Lebensdauer, sondern auch die Rüstigkeitsdauer eine verschieden-
artige. Aber auch die fortschreitenden Errungenschaften auf den verschiedenen Ge-
bieten der Production sind mit Hinblick auf das erfolgreiche Bestreben der Arbeits-
vereinfachung und Erleichterung geeignet, die zahlreichen schädlichen Einflüsse auf
das Leben und die Gesundheit des Menschen mit der Zeit wenigstens zum Theil
zu beheben und hiedurch eine Aenderung des Verhältnisses zwischen der Lebens-
und Rüstigkeitsdauer bei manchen Berufszweigen hervorzurufen. Durch diese Er-
wägungen beantwortet sich jene zuvor aufgeworfene Frage von selbst, indem man zu
dem Ergebnisse gelangt, dass die mit Bezug auf das gesammte Menschenmateriale
erzielten Resultate, mit Hilfe gewisser, verschiedenen Berufsarten entsprechender, auf
statistischer Basis ermittelter Coëfficienten, den bezüglichen Anforderungen gemäss
modificirt werden können, und sich hiedurch zu einer allgemeinen Grundlage der
Versicherung für den Fall der Invalidität in Folge Kräfteverfalles qualificiren.

Nachdem wir nunmehr den praktischen Werth unserer bisherigen Resultate
näher begründet haben, wollen wir fortfahren, dieselben einer weiteren Erörterung
insofern zu unterziehen, als wir die Prämienrechnung für die Alters- und Invaliden-
[illegible] für jenen Fall in's Auge fassen, in welchem die Prämienzahlung mit dem
Eintritte der Invalidität aufhört. Die Untersuchungen, welche wir der Frage der
Prämienberechnung bisher gewidmet haben, liessen uns zu einem Resultate gelangen,
nach welchem unter vorausgesetzter jährlicher Prämienzahlung bis zum 70. Lebens-
[illegible] die Invaliditätsrente um den Prämienbetrag gekürzt erscheint und erst nach
[illegible] dieses Alters die volle Rente als sogenannte Altersrente zur Nutz-
[illegible] gelangt. Geschieht die Zahlung in Form einer einmaligen Prämie, muss
[illegible] auch die Kürzung der Invalidenrente entfallen, weil der Verpflichtung
[illegible] bereits ein für allemal Genüge geleistet wurde, und wird dem-

uch in diesem Falle die Invaliditätsrente dieselbe Höhe besitzen, wie die Alters-
nte, also voll zur Auszahlung gelangen müssen. In der Tabelle V der vorigen
bhandlung über dieses Thema ist einerseits die einmalige Prämie P_x und anderer-
its die bis zum 70. Lebensjahre zahlbare jährliche Prämie p_x für die Beitrittsalter
m 18. bis zum 60. Lebensjahre zur Darstellung gebracht, welch' letztere also eine
ürzung der Invaliditätsrente involvirt. Soll jedoch die Höhe der Invaliditätsrente
ch bei jährlicher Prämienzahlung, der vom 70. Lebensjahre an flüssig werdenden
tersrente entsprechen, so ist es nothwendig die jährliche Prämienzahlung blos bis
m jeweiligen Eintritte der Invalidität zu stipuliren. Zu diesem Zwecke wird eine
benslänglich zu zahlende Prämie zur Grundlage der Berechnung angenommen, und
se von der jeweiligen Rente, welche gleichmässig vom Eintritte der Invalidität
zum Ableben an den Versicherten zu zahlen ist, jährlich in Abzug gebracht.
f diese Weise wird die jährliche bis zum Eintritte der Invalidität zahlbare Prämie
reichen, um dem Versicherten eine gleichmässige um den Prämienbetrag gekürzte
nslängliche Invaliditätsrente zu sichern. Um nun die Höhe der ursprünglichen
te wieder zu erreichen, wird eine Erhöhung der Prämie in demjenigen Verhält-
e vorgenommen, in welchem sich die gekürzte Rente zur ursprünglichen befindet.
auf diese Weise ermittelte bis zum Eintritte der jeweiligen Invalidität zahlbare
mie reicht hin, um dem Versicherten eine gleichmässige vom Zeitpunkte seiner
lidität beginnende und bis zu dessen Ableben fortlaufende jährliche Rente
ähren zu können, welche der ursprünglichen, erst vom 70. Lebensjahre flüssig
denden gleichkommt. Die rechnungsmässige Ermittelung geschieht nun in folgen-
Weise:

Da die einmalige Prämie P_x einer gleichmässigen Invaliditäts- und Altersrente
spricht, so wird die jährliche lebenslänglich zu zahlende Prämie sich ergeben,
n wir die einmalige Prämie P_x durch die Mise R_x dividiren. Somit ist

$$p'_x = \frac{P_x}{R_x}$$

Bezeichnen wir nun die ursprüngliche volle Rente mit A und die um p'_x ge-
rzte mit A', so wird, da die jährliche lebenslänglich zu zahlende Prämie p'_x der
kürzten Rente A' entspricht, die Relation

$$\mathfrak{p}_x = \frac{A \cdot p'_x}{A - p'_x} = \frac{A}{A'} \cdot p'_x$$

n Werth jener gesuchten, die volle Rente A involvirenden Jahresprämie darstellen,
lche bis zum jeweiligen Eintritte der Invalidität zu entrichten ist. Im Nach-
lgenden ist die tabellarische Zusammenstellung derselben für die einzelnen Beitritts-
ter durchgeführt.

Tabelle VI

der Prämien für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung bei gleichbleibender Invaliden- und Alters-Rente.

Alter x	R_x	Einmalige Prämie in Percenten der Rente P_x	Jährliche Prämie p'_x, zahlbar bis zum Tode für eine gekürzte Rente	Entsprechende um die Prämie gekürzte Rente A'	Jährliche Prämi p_x in Percenten der Rente zahlba bis zum Eintritt der Invaliditä
18	19·68073	87·513	4·447	95·553	4·654
19	19·56754	104·872	5·036	94·964	5·303
20	19·45040	110·811	5·697	94·303	6·041
21	19·32935	122·285	6·326	93·674	6·754
22	19·20418	134·424	7·000	93·000	7·527
23	19·07473	145·574	7·632	92·368	8·262
24	18·94099	157·561	8·032	91·978	8·732
25	18·80277	170·164	9·050	90·950	9·950
26	18·66049	182·523	9·781	90·219	10·841
27	18·51225	194·965	10·532	89·468	11·772
28	18·35974	207·134	11·282	88·718	12·717
29	18·20227	220·322	12·104	87·896	13·771
30	18·03963	233·003	12·916	87·084	14·832
31	17·87178	246·728	13·805	86·195	16·016
32	17·69847	260·152	14·699	85·301	17·232
33	17·51965	274·563	15·672	84·328	18·560
34	17·33505	290·054	16·732	83·268	20·094
35	17·14439	298·273	17·399	82·601	21·064
36	16·94756	308·169	18·184	81·816	22·225
37	16·74428	329·691	19·689	80·311	24·516
38	16·53422	350·262	21·184	78·816	26·877
39	16·31723	372·352	22·820	77·180	29·567
40	16·09295	395·880	24·600	75·400	32·624
41	15·86102	416·331	26·248	73·752	35·591
42	15·62123	437·211	27·988	72·012	38·866
43	15·37356	456·236	29·677	70·323	42·201
44	15·11860	472·988	31·272	68·728	45·501
45	14·85713	485·945	32·708	67·292	48·606
46	14·58959	501·763	34·392	65·608	52·420
47	14·31699	513·937	35·800	64·100	55·850
48	14·03942	526·599	37·508	62·492	60·020
49	13·75717	540·716	39·304	60·696	64·755
50	13·47033	552·443	41·012	58·988	69·526
51	13·17920	561·644	42·616	57·384	74·264
52	12·88409	578·102	44·869	55·131	81·386
53	12·58533	589·967	46·877	53·123	88·242
54	12·28326	603·685	49·147	50·853	96·645
55	11·97790	619·188	51·694	48·306	107·013
56	11·66983	629·869	53·972	46·028	117·260
57	11·35932	647·315	56·985	43·015	132·479
58	11·04631	665·613	60·256	39·744	151·610
59	10·73131	680·694	63·430	36·570	173·448
60	10·41474	687·090	65·973	34·027	193·866

Combinationen der Lebens- und Invaliditäts-Versicherung.

Die grossen Erfolge, welche die Lebensversicherung seit ihrer Einführung zu
erzeichnen hat, verdankt dieselbe zum grössten Theile den verschiedenen Combi-
ationen der in ihr Gebiet einschlagenden Versicherungskategorien. Die Versicherung
r den Todesfall, sowie diejenige für den Erlebensfall bilden in Verbindung mit
nander einerseits und mit der Rentenversicherung andererseits ein reiches Material
dieser Beziehung. Aber auch die verschiedenen Zufälligkeiten und Möglichkeiten
n menschlichen Leben sind geeignet, zahlreiche Modificationen der jeweiligen Ver-
cherungsbedingungen zuzulassen und dem combinatorischen Geiste diesbezüglich
reichenden Stoff zur Schaffung neuer Lebensversicherungsarten zu liefern. Auf
ese Art wird die Lebensversicherung in den Stand gesetzt, sich den Bedürfnissen
r Versicherten anzupassen und den unterschiedlichsten Anforderungen derselben
nüge zu leisten. Eine derartige, mit dem menschlichen Leben verbundene Mög-
hkeit ist die Invalidität in Folge Kräfteverfalles, welche je nach der körperlichen
schaffenheit des Individuums und dessen mehr oder weniger aufreibenden Thätig-
it, früher oder später eintreten kann, wenn nicht schon vorher in Folge einer
rung der Lebensfunctionen der Tod diesem Zustande zuvorgekommen ist. Jedoch
ch in Betreff der Lebensdauer im Zustande der Invalidität gibt sich eine ebenso
deutende Unterschiedlichkeit kund, wie dieselbe bezüglich desjenigen Zeitpunktes
welchem der Eintritt der Invalidität erfolgt, zu verzeichnen ist. Wenn also eine
mbination der Lebensversicherung mit der Versicherung für den Fall der Invalidität
Folge Kräfteverfalles geschaffen werden soll, so muss auf diejenigen Umstände
cksicht genommen werden, welche aus der eventuell früher oder später eintreten-
n Invalidität und kürzer oder länger vorwaltenden Lebensdauer in diesem Zustande
tspringen. Ziehen wir den Modus in Betracht, wo die Combination dieser beiden
rsicherungskategorien in der Weise stipulirt wird, dass ein für den Todesfall Ver-
herter, im Falle seiner in Folge Kräfteverfalles eingetretenen Invalidität, von der
eiteren Einzahlung der Jahresprämien vollständig befreit ist, so werden folgende
actoren zu erwägen sein. Da im Allgemeinen bei der gewöhnlichen Versicherung
r den Todesfall die jährliche Prämie lebenslänglich zu zahlen ist, so werden die
ährend der Lebensdauer im invaliden Zustande für diesen Fall unbezahlten Jahres-
rämien von der Versicherungsbank selbst bestritten werden müssen. Der Versicherte
ird daher vor dem Eintritte seiner Invalidität um soviel mehr einzuzahlen haben,
s der Bedarf zur Bestreitung der jährlichen Prämien während seiner Lebensdauer
n invaliden Zustande erfordert. Ist also der für den Todesfall Versicherte zugleich
uf eine Invalidenrente in der Höhe der Todesfall-Versicherungsprämie versichert
o setzt er die Versicherungsbank in die Lage, für ihn die während seiner Lebens-
auer im invaliden Zustande jährlich fälligen Prämien zur Versicherung für den
odesfall zu decken.

Tabelle VI

der Prämien für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung bei gleichb[...]
Invaliden- und Alters-Rente.

Alter x	R_x	Einmalige Prämie in Percenten der Rente P_x	Jährliche Prämie p'_x, zahlbar bis zum Tode für eine gekürzte Rente	Entsprechende um die Prämie gekürzte Rente A'	Jährli[...] p_x in [...] der Re[...] bis zu[...] der [...]
18	19·68073	87·513	4·447	95·553	[illegible]
19	19·56754	104·872	5·036	94·964	5[...]
20	19·45040	110·811	5·697	94·303	6[...]
21	19·32935	122·285	6·326	93·674	6[...]
22	19·20418	134·424	7·000	93·000	7[...]
23	19·07473	145·574	7·632	92·368	8[...]
24	18·94099	157·561	8·032	91·978	8[...]
25	18·80277	170·164	9·050	90·950	9[...]
26	18·66049	182·523	9·781	90·219	10[...]
27	18·51225	194·965	10·532	89·468	11[...]
28	18·35974	207·134	11·282	88·718	12[...]
29	18·20227	220·322	12·104	87·896	13[...]
30	18·03963	233·003	12·916	87·084	14[...]
31	17·87178	246·728	13·805	86·195	16[...]
32	17·69847	260·152	14·699	85·301	17[...]
33	17·51965	274·563	15·672	84·328	18[...]
34	17·33505	290·054	16·732	83·268	20[...]
35	17·14439	298·273	17·399	82·601	21[...]
36	16·94756	308·169	18·184	81·816	22[...]
37	16·74428	329·691	19·689	80·311	24[...]
38	16·53422	350·262	21·184	78·816	26[...]
39	16·31723	372·352	22·820	77·180	29[...]
40	16·09295	395·880	24·600	75·400	32[...]
41	15·86102	416·331	26·248	73·752	35[...]
42	15·62123	437·211	27·988	72·012	38[...]
43	15·37356	456·236	29·677	70·323	42[...]
44	15·11860	472·988	31·272	68·728	45[...]
45	14·85713	485·945	32·708	67·292	48[...]
46	14·58959	501·763	34·392	65·608	52[...]
47	14·31699	513·937	35·800	64·100	55[...]
48	14·03942	526·599	37·508	62·492	60[...]
49	13·75717	540·716	39·304	60·696	64[...]
50	13·47033	552·443	41·012	58·988	69[...]
51	13·17920	561·644	42·616	57·384	74[...]
52	12·88409	578·102	44·869	55·131	81[...]
53	12·58533	589·967	46·877	53·123	88·[...]
54	12·28326	603·685	49·147	50·853	96[...]
55	11·97790	619·188	51·694	48·306	107·[...]
56	11·66983	629·869	53·972	46·028	117·[...]
57	11·35932	647·315	56·985	43·015	132·[...]
58	11·04631	665·613	60·256	39·744	151·[...]
59	10·73131	680·694	63·430	36·570	173·[...]
60	10·41474	687·090	65·973	34·027	193·[...]

mbinationen der Lebens- und Invaliditäts-Versicherung.

ie grossen Erfolge, welche die Lebensversicherung seit ihrer Einführung zu
ınen hat, verdankt dieselbe zum grössten Theile den verschiedenen Combi-
n der in ihr Gebiet einschlagenden Versicherungskategorien. Die Versicherung
Todesfall, sowie diejenige für den Erlebensfall bilden in Verbindung mit
r einerseits und mit der Rentenversicherung andererseits ein reiches Material
er Beziehung. Aber auch die verschiedenen Zufälligkeiten und Möglichkeiten
ıschlichen Leben sind geeignet, zahlreiche Modificationen der jeweiligen Ver-
ngsbedingungen zuzulassen und dem combinatorischen Geiste diesbezüglich
ıenden Stoff zur Schaffung neuer Lebensversicherungsarten zu liefern. Auf
rt wird die Lebensversicherung in den Stand gesetzt, sich den Bedürfnissen
rsicherten anzupassen und den unterschiedlichsten Anforderungen derselben
zu leisten. Eine derartige, mit dem menschlichen Leben verbundene Mög-
ist die Invalidität in Folge Kräfteverfalles, welche je nach der körperlichen
fenheit des Individuums und dessen mehr oder weniger aufreibenden Thätig-
üher oder später eintreten kann, wenn nicht schon vorher in Folge einer
der Lebensfunctionen der Tod diesem Zustande zuvorgekommen ist. Jedoch
Betreff der Lebensdauer im Zustande der Invalidität gibt sich eine ebenso
nde Unterschiedlichkeit kund, wie dieselbe bezüglich desjenigen Zeitpunktes
hem der Eintritt der Invalidität erfolgt, zu verzeichnen ist. Wenn also eine
ation der Lebensversicherung mit der Versicherung für den Fall der Invalidität
e Kräfteverfalles geschaffen werden soll, so muss auf diejenigen Umstände
ht genommen werden, welche aus der eventuell früher oder später eintreten-
validität und kürzer oder länger vorwaltenden Lebensdauer in diesem Zustande
ıgen. Ziehen wir den Modus in Betracht, wo die Combination dieser beiden
erungskategorien in der Weise stipulirt wird, dass ein für den Todesfall Ver-
r, im Falle seiner in Folge Kräfteverfalles eingetretenen Invalidität, von der
n Einzahlung der Jahresprämien vollständig befreit ist, so werden folgende
n zu erwägen sein. Da im Allgemeinen bei der gewöhnlichen Versicherung
Todesfall die jährliche Prämie lebenslänglich zu zahlen ist, so werden die
d der Lebensdauer im invaliden Zustande für diesen Fall unbezahlten Jahres-
n von der Versicherungsbank selbst bestritten werden müssen. Der Versicherte
her vor dem Eintritte seiner Invalidität um soviel mehr einzuzahlen haben,
Bedarf zur Bestreitung der jährlichen Prämien während seiner Lebensdauer
liden Zustande erfordert. Ist also der für den Todesfall Versicherte zugleich
e Invalidenrente in der Höhe der Todesfall-Versicherungsprämie versichert
er die Versicherungsbank in die Lage, für ihn die während seiner Lebens-
n invaliden Zustande jährlich fälligen Prämien zur Versicherung für den
ll zu decken.

im Falle dessen früheren Ablebens an dessen Erben, und zwar sofort nach dem To des Versicherten auszubezahlen. Auch in diesem Falle wird die entsprechende Präm aus zwei Theilen bestehen, und zwar aus der Prämie der gewöhnlichen gemischt Versicherung und aus der Prämie zur Versicherung einer Invaliditätsrente in d Höhe derselben, jedoch mit der Beschränkung, dass diese Rente blos bis zum A laufe der stipulirten Frist fortläuft.

Zur Grundlage der Rechnung wird also die Versicherung einer Invaliditä rente mit beschränkter Bezugsdauer angenommen werden müssen, da der Versich rungsbank blos diejenigen Jahresprämien zu vergüten sind, welche dieselbe v Zeitpunkte der eingetretenen Invalidität der Versicherten bis zum Ablauf der sti lirten Frist für diesen leistet. Bezeichnet man daher die stipulirte Prämienzahlun frist mit dem Buchstaben n, so wird die Bezugsdauer der Invaliditätsrente Zeitpunkte der eingetretenen Invalidität des Versicherten bis zum $(x +$ Lebensjahre desselben den diesbezüglichen Anforderungen entsprechen. Zieht daher von der Prämie, welche eine vom Zeitpunkte der eingetretenen Invalidität zum Ableben des Versicherten fortlaufende Rente sichert, diejenige Prämie ab, w zur Versicherung einer vom $(x + n)$ten Lebensjahre beginnenden und bis zum leben des Versicherten fortlaufenden Jahresrente zu zahlen wäre, so erhält man Prämie zur Versicherung einer Invaliditätsrente mit beschränkter Bezugsdauer zum $(x + n)$ten Lebensjahre. Die Prämie für eine gemischte Versicherung entfallender Prämienzahlung im Invaliditätsfalle des Versicherten ergibt sich, man die Prämie für gewöhnliche gemischte Versicherung mit dem Factor

$$1 + \frac{p_x}{100}$$

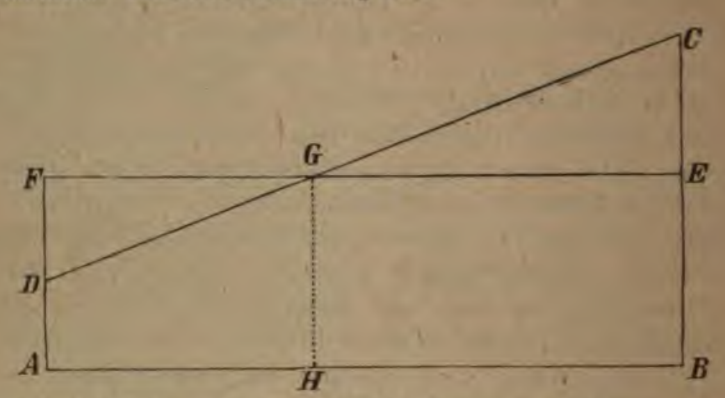
multiplicirt und von diesem Producte diejenige Prämie abzieht, welche zur sicherung einer vom $(x + n)$ten Lebensjahre beginnenden und bis zum Ab des Versicherten fortlaufenden Rente im Betrage der diesbezüglichen, gewöhnli gemischten Versicherungsprämie nöthig ist. Das Product allein repräsentirt die Prämie, welche nebst den Vortheilen der gemischten Versicherung mit entfall Prämienzahlung im Invaliditätsfalle, noch die Versicherung für den Fall der I lidität in sich schliesst, insoferne dieser vor Ablauf der Prämienzahlungsfrist tritt, so dass die Versicherungsbank während derselben die fälligen Prämien nach Ablauf derselben jedoch eine Rente im Betrage dieser Prämie an den sicherten bis zu dessen Ableben zur Auszahlung zu bringen hätte. Der Versic wäre daher mit einer Prämie in der Höhe jenes Productes, selbst dann für Fall der Invalidität versichert, wenn dieser auch ausserhalb der Prämienzahlu frist eintritt; vorausgesetzt, dass die Prämie für Invaliditätsversicherung w geleistet werden würde.

ur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämien-reserve eines Versicherungsstockes.

I.

Die Prämienreserve bildet in der Lebensversicherung den wichtigsten Factor für rationelle geschäftliche Gebahrung, weil in derselben das Guthaben sämmtlicher einer Versicherungsbank versicherter Personen zum Ausdrucke gelangt. Dieselbe äsentirt den rechnungsmässigen Ueberschuss, welcher von der Lebensversiche-sprämie nach vollzogener Deckung der dem übernommenen Risico entsprechen-Gegenleistung erübrigt wird und hat ihren Ursprung in dem aus Opportunitäts-den eingeführten Modus der gleichbleibenden Prämie. Das Risico, welches die icherungsbank mit dem Abschlusse einer Lebensversicherung übernimmt, ge-t nämlich in den erfahrungsgemäss ermittelten Tabellen der Sterblichkeit des schen zur Darstellung und muss sich naturgemäss mit dem zunehmenden Alter ern. Dementsprechend müsste eigentlich die jährlich zu entrichtende Prämie von r zu Jahr grösser werden, wenn dieselbe den Anforderungen des steigenden cos Genüge leisten soll. Der frühere Modus, nach welchem die Lebensversicherung hrer ursprünglichen Entwicklung vorging, war auch wirklich derjenige der steigen-Prämien, bis man zur Ueberzeugung gelangte, dass derselbe mit der abnehmen-Erwerbsfähigkeit des Menschen im Allgemeinen einen Gegensatz bildet, indem inkenden Leistungsfähigkeit eine steigende Belastung gegenübersteht. Die Ver-ungsinstitute fanden es daher für angemessen, diese Anomalie schon aus ge-lichen Rücksichten auszugleichen und stellten für jedes Beitrittsalter eine ent-ende, gleichmässig zu entrichtende Durchschnittsprämie fest, deren capitalisirter demjenigen der steigenden Prämien entspricht. In Folge dessen mussten die inn der Versicherungsdauer zu zahlenden Prämien in demselben Verhältnisse werden, als die in späteren Jahren zu entrichtenden herabgesetzt wurden, so r Versicherte derzeit zu Beginn der Versicherungsperiode mehr einzahlt, da-im späteren Alter geringere Prämien entrichtet, als selbe dem vorhandenen gemäss nothwendig sind. Daraus geht hervor, dass die in den früheren Jahren n Beträge herangezogen werden müssen, um die spätere unzulängliche Prämie tsprechenden Risico gemäss zu ergänzen. Diesen für die Ergänzung der Prämien angesammelten Beträgen, welche eine zur Befriedigung des steigen-sicos nöthige Reserve bilden, wird nun im Versicherungswesen der be-nde Name Prämienreserve beigelegt, deren Wesen also nichts anderes ist, als ticipirung der späteren Verbindlichkeiten des Versicherten und wir wollen ersuchen, auf dieser Grundlage in unseren weiteren Ausführungen fortzufahren. ie wir bereits constatirt haben, ist die steigende Prämie dem jeweilig nach be des vorgerückten Alters zu tragenden Risico angemessen. Handelt es sich um die gleichbleibende jährliche Prämie, so zahlt der Versicherte in der eriode seiner Versicherung mehr, als der Versicherungsbank nach Maassgabe tragenden Risicos zukommt, und ist daher der jeweilige Ueberschuss um des Versicherten, welcher im Falle der Auflösung des Versicherungs-

vertrages demselben rückerstattet werden muss. Die jeweilig angesammelte Prä
reserve bildet also das Guthaben, welches der Versicherte bei der Versicherungs
besitzt. Folgendes Bild stellt das Verhältniss der steigenden zur gleichmäs
Prämie bei einfacher Todesfallversicherung dar.



Es sei bei steigender Prämienzahlung, entsprechend dem wachsenden R
AD die erste und BC die letzte zu zahlende Prämie, so stellt die Fläche A
die Summe aller während der Versicherungsdauer geleisteten Prämien dar, wob
Steigerung derselben im Wachsthume des senkrechten Abstandes der beiden L
AB und CD zum Ausdrucke gelangt. Ferner sei bei gleichbleibender Prä
zahlung AF die erste und BE die letzte zu leistende Prämie, wobei AF g
gross ist mit BE. In diesem Falle wird nun in der Fläche $ABEF$ die Gesa
leistung aller während der Versicherungsdauer gezahlten diesbezüglichen Prä
zur Darstellung gelangen, wobei die gleichmässige Entfernung der Linien A
FE die gleichbleibende Prämie bildlich darstellt.

Das Dreieck FDG repräsentirt nun die zu Beginn der gleichmässigen Prä
zahlung sich ergebende Mehrleistung des Versicherten gegenüber derjenige
steigenden Sinne, indem während der Versicherungsfrist AH die Gesammtprä
leistung bei gleichmässiger Prämienzahlung durch $AHGF$, hingegen bei steig
Prämienleistung durch $AHGD$ zum Ausdrucke kommt. Nun ist aber im G
satze hiezu, während der restlichen Versicherungsdauer HB die der gleichmäs
Prämienzahlung entsprechende Gesammtleistung $HBEG$ um das Dreieck E
kleiner, als die der steigenden Prämienzahlung entsprechende Gesammtlei
$HBCG$, so dass in dem Dreieck EGC die Minderleistung der gleichmässigen g
über der steigenden Prämienzahlung sich äussert, welche aus der früheren M
leistung FDG bestritten werden muss, um den Anforderungen des steigenden R
Rechnung zu tragen. Dies ist aber nur möglich, wenn die Flächen der beiden
ecke FDG und EGC einander gleich sind, was ersichtlicherweise dem Bild
mäss eben nicht der Fall ist. Zieht man jedoch in Betracht, dass die Fläche F
eine Capitalsleistung darstellt, welche in jenem Verhältnisse früher geleistet wir
sie später zu Verwendung gelangt, so geht daraus hervor, dass dieselbe sammt
laufenden Zinsen und Zinseszinsen das spätere Erforderniss, welches in dem grö

EGC dargestellt ist, vollständig decken muss, so dass in der Fläche des
s FGD die Prämienreserve in ihrer Maximalhöhe zur Darstellung gelangt.
eser Umstand führt nun zu der interessanten Conclusion, dass der Zeitab-
ler Versicherungsdauer, bis zu welchem die Prämienreserve wächst, kleiner ist
nige, in welchem dieselbe zur Verwendung gelangt, d. h. AH ist kleiner
. Ferner, dass die Prämienreserve ein Guthaben des Versicherten insolange
ls die versicherte Summe nicht fällig wird, und zwar ist dasselbe bis zu
ewissen Zeitpunkte im Steigen begriffen, um sodann nach Maassgabe der
rfolgten Verwendung nach und nach zur Aufzehrung zu gelangen. Da nun
uthaben den jeweiligen Baarwerth der Polizze bildet, so geht daraus hervor,
 auch dieser entsprechend der anfangs zunehmenden und sodann abnehmen-
denz des Guthabens im gleichen Sinne ändern wird, um schliesslich mit dem
rden des versicherten Betrages zu verschwinden. Auf diese Art würde also
zze für eine Versicherung, welche im Stadium der zunehmenden Prämien-
sich befindet oder das Maximum derselben bereits erreicht hat, einen grösseren
th besitzen als eine solche, welche längst dieses Stadium überschritten hat,
eutend älter ist als jene. Nun tritt aber an die Stelle des aus der Prämien-
entspringenden Baarwerthes der Polizze derjenige, welcher aus der Wahr-
hkeit des baldigen Fälligwerdens der versicherten Summe hervorgeht, und
art, dass die Abnahme des ersteren die Zunahme des letzteren involvirt. Auf
t erklärt sich die continuirliche Steigerung des Polizzenbaarwerthes, welcher
eraden Verhältnisse mit der Bestandesdauer des Versicherungsvertrages wächst,
dem Fälligwerden der Versicherungssumme sein Maximum zu erreichen.

s Wesen der Prämienreserve kann jedoch auch in der Weise zum Ausdrucke
, das bei Beurtheilung derselben anstatt der Differenz zwischen steigender
chmässiger Prämie diejenige zwischen Leistung und Gegenleistung in Be-
ezogen wird. Die steigende Prämie ist nämlich bekanntermaassen derart
n, dass sie der jeweilig erforderlichen, dem wachsenden Risico gemäss ent-
den Leistung vollständig Rechnung trägt, indem die jährliche Prämien-
e den beziehungsweisen, aus der jeweiligen Sterblichkeit erwachsenden Fällig-
 Versicherungssummen angemessen ist. Hingegen bildet derzeit die gleich-
Prämie die Grundlage der jährlichen Gegenleistung des Versicherten. In
ssen ist in der Differenz zwischen der jährlichen Netto-Prämieneinnahme
Gesammtleistung der Versicherungsbank an fälligen Versicherungssummen
lige Gesammthöhe der Prämienreserven zu suchen. Es ist also zu Beginn
cherung, auf Grund gleichmässiger Prämie, die Gegenleistung des Versicherten
sere, als die Leistung der Versicherungsbank, hingegen äussert sich dies
erem Bestande der Versicherung im entgegengesetzten Sinne, so dass die
Mehrleistung des Versicherten herangezogen werden muss, um das spätere,
steigenden Risico sich ergebende Mehrerforderniss der Versicherungsbank
e Versicherungssummen zu decken. Das Wesen der Prämienreserve lässt
r in der Weise definiren, dass man dieselbe als Ueberschuss der Leistung
cherten gegenüber derjenigen der Versicherungsbank auffasst.

Nachdem wir nun unserer Aufgabe in Betreff der Feststellung der Besch der Prämienreserve Genüge geleistet haben, wollen wir dieselbe vom Star der Veränderlichkeit des Alters zur Zeit des Versicherungsabschlusses in fassen. Es ist bekannt, dass ein und dieselbe Person, welche sich in versch Altersperioden auf gleich grosse Beträge versichert, für jede einzelne Versi unterschiedliche Prämien wird entrichten müssen, um den Anforderungen d sicherungsprincipes Genüge zu leisten. Je älter diese Person wird, desto grös das Risico, welches die Versicherungsbank mit der Versicherung derselben und desto höher muss auch die entsprechende jährlich zu leistende Prämie frägt sich nun, in welchem Verhältnisse diejenigen Prämien sich zu einander b welche den in verschiedenen Lebensperioden ein und derselben Person abgesch Versicherungen entsprechen. Versichert sich eine Person in verschiedenen perioden, so wird dieselbe bei jeder einzelnen Versicherung mit ihrer je gleic zu entrichtenden Prämie jeweilig für das spätere, durch das höhere Risico b Mehrerforderniss aufkommen müssen, welches sich desto früher einstellen höher deren Lebensalter zur Zeit des Versicherungsabschlusses war. Da diese mit ihrer Prämie zu Beginn der Versicherung soviel an Reserven ansammel als in späteren Jahren zur Ergänzung derjenigen Erfordernisse nothwendig ist, aus der Unzulänglichkeit der gleichmässigen gegenüber den steigenden I resultiren, so wird in der capitalisirten Prämiendifferenz einer früher zum Abs gelangten, und jener im späteren Alter eingegangenen Versicherung diejenige P reserve sich bergen, welche vom Zeitpunkte des ersten Versicherungsabschlu zum Zeitpunkte des zweiten sich angesammelt hat und welche für die zwe schlossene Versicherung durch die höher zu leistende Prämie hereingebracht muss, um ein mit der ersteren gleiches, späteres Mehrerforderniss decken zu

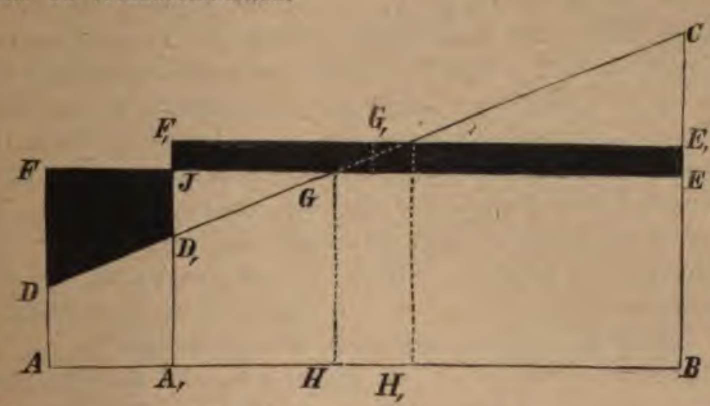
Versichert sich also zum Beispiel eine Person das erstemal im 30. I jahre und das zweitemal mit dem 35. auf den gleichen Betrag, so wird diese die letztabgeschlossene Versicherung eine höhere Prämie zu entrichten haben capitalisirte Differenz dieser beiden Prämien vom 35. Lebensjahre bis zum A gerechnet muss nun soviel betragen, als bei der ersten Versicherung vom 3 zum 35. Lebensjahre an Prämienreserve angesammelt wurde, wenn bei der z Versicherung das spätere, durch ein höheres Risico bedingte Mehrerforderniss gleichen Weise gedeckt sein soll, wie bei der ersteren. Es könnte also, da sich Erforderniss für ein und dasselbe Risico gleich bleiben muss, die zweite, im 35. L jahre abgeschlossene Versicherung ebenso auf Grund einer dem 30. Lebensjahr sprechenden jährlichen Prämie stipulirt werden, wenn der Versicherte zuglei zwischen dem 30. und 35. Lebensjahre angesammelte Prämienresere entrichten

Wir gelangen also zu einer weiteren Definition der Prämienreserve, inde dieselbe als das angesammelte Ersparniss einer früher versicherten Person über einer gleichalterigen später versicherten hinstellen.

Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes.

II.

der vorigen Abhandlung über dieses Thema haben wir constatirt, dass eine n)ten Lebensjahre abgeschlossene Versicherung ebenso auf Grund einer dem bensjahre entsprechenden Prämie stipulirt werden könnte, wenn der Ver- zugleich die zwischen dem $x$ten und $(x + n)$ten Lebensjahre angesammelte ireserve entrichten würde. Die Richtigkeit dieser Auffassung wird durch den d bestätigt, dass die Differenz zwischen den beiden jeweilig entsprechenden rämien p_{x+n} und p_x diejenige Annuität repräsentirt, welche der später Ver- während seiner ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer jährlich mehr leisten m die zwischen dem $x$ten und $(x + n)$ten Lebensjahre angesammelte Prämien- zu tilgen. Eine im $(x + n)$ten Lebensjahre versicherte Person muss also l ihrer gesammten Versicherungsdauer mit ihrer Jahresprämie um soviel mehr nienreserve aufbringen, als eine im $x$ten Lebensjahre versicherte bis zum on $(x + n)$ Jahren angesammelt hat. Nachstehendes Bild ist geeignet diesen l näher zu veranschaulichen.



e Person, welche sich in ihrem $x$ten Lebensjahre versichert, muss während ensdauer AB die gleichbleibende Prämie $AF = BE$ jährlich entrichten. n Fall wäre die dem wachsenden Risico entsprechende steigende Jahres- erart zur Darstellung gebracht, dass AD die erste und BC die letzte zu Prämie repräsentiren würde. Nehmen wir nun an, dass sich dieselbe Person $(x + n)$ten Lebensjahre, also nach AA_1 Jahren abermals versichern würde, sie während ihrer noch übrigen Lebensdauer A_1B die um JF_1 höhere bende Jahresprämie $A_1F_1 = BE_1$ entrichten, um die gleichen Rechte ler erstabgeschlossenen Versicherung zu erlangen. Da nun seit dem Ab- tpunkte der ersten Versicherung n Jahre verflossen sind, welche in dem AA_1 zum Ausdruke gelangen, so hat die dem wachsenden Risico ent- le steigende Prämie bereits die Höhe A_1D_1 erreicht, so dass bei der zweit- ssenen Versicherung die Höhe A_1D_1 die erste Jahresprämie im steigen

Sinne repräsentirt. In der Fläche $A A_1 D_1 D$ ist daher das zwischen dem ersten zweiten Versicherungsabschlusse von der Versicherungsbank getragene Risico die entsprechend angemessene Prämiengegenleistung des Versicherten dargestellt ist in Folge dessen in der Fläche $D F J D_1$ die bis zum zweiten Versicheru abschlusse angesammelte Prämienreserve aus der erstabgeschlossenen Versiche zur Darstellung gebracht. Mit dem zweiten Versicherungsabschlusse übernimmt aber die Versicherungsbank dasselbe Risico, welches sie für die erstabgeschlo Versicherung vom Zeitpunkte des zweiten Abschlusses weiterhin zu tragen hat, wel Umstand auch eine gleich grosse Gegenleistung des Versicherten involvirt. gemäss muss für die zweitabgeschlossene Versicherung die bis zu deren Absch zeitpunkte aus der erstabgeschlossenen Versicherung bereits angesammelte Präm reserve nachgetragen werden, was durch eine entsprechende Prämienerhöhung err wird. Für die zweitabgeschlossene Versicherung ist daher dieselbe gleichblei Jahresprämie zu leisten, wie für die erstabgeschlossene und überdies die zwi den beiden Abschlusszeitpunkten angesammelte Prämienreserve, was in der geschieht, dass ein Zuschlag in der Höhe derjenigen Annuität erfolgt, welche Tilgung dieser Prämienreserve während der wahrscheinlichen ferneren Lebens nöthig ist. Es ist also in der Fläche $F_1 J E E_1$ die während der ferneren Le dauer $A_1 B$ sammt Zinsen und Zinseszinsen abzutragende Prämienreserve darge und somit als Capitalsleistung der Fläche $DFJD_1$ gleich. Untersuchen wir nun, wie das Verhältniss der beziehungsweise angesammelten Prämienreserven dieser do versicherten Person nach einem Zeitraume von $A_1 H$ Jahren gestaltet. Dieselbe für die erstabgeschlossene Versicherung bereits das Maximum der Prämienre $D G F$ angesammelt haben, während sie für die zweitabgeschlossene Versich blos $D_1 G J$ und einen Theil der nachzutragenden Leistung $D F J D_1$ als Präm reserve entrichtet hat. Da nämlich $A_1 H = J G$ ist, so wurde von der nac tragenden Prämienreserve $F_1 J E E_1$ blos der Theil $J G \times F_1 J$ geleistet, als $E E_1 \times G E$ weniger als für die erstabgeschlossene Versicherung.

Das Guthaben des Versicherten zu dieser Zeit, wird also für die erst schlossene Versicherung ein grösseres als für die zweitabgeschlossene sein. Dies spricht nun vollends den Anforderungen, wenn man in Betracht zieht, dass die P für die zweite Versicherung eine höhere ist, als für die erste und in Folge d länger ausreicht, um das steigende Risico zu decken, daher auch die Heranzi der Prämienreserve zur Ergänzung derselben zu dem gleichen Zwecke, im Verhältnisse später erfolgt, als die Frist zwischen dem ersten und zweiten Vers rungsabschlusse eine längere ist. Jemehr aber der Versicherte der mittleren Le dauer seiner Altersclasse näher kommt, desto geringer wird die Differenz der haben aus den beiden Versicherungsabschlüssen. Das Risico, welches die Vers rungsbank für die erstabgeschlossene Versicherung vom Zeitpunkte des zweiten schlusses weiterhin zu tragen hat, ist jedoch das Gleiche, welches ihr aus der abgeschlossenen Versicherung erwächst und dennoch erreicht die beziehung Gegenleistung für die letztere erst mit dem Erleben eines mittleren Alters die g Höhe wie für die erstere.

Wir gelangen daher zu folgenden Reflexionen: Dem Umstande gemäss, dass später versicherte Person nebst der Jahresprämie einer gleichalterigen früher cherten auch die seither angesammelte Prämienreserve zu leisten hat, um der hen Rechte theilhaftig zu werden, kann man sämmtliche Versicherungen einer icherungsbank auf das jüngste Beitrittsalter in der Weise reduciren, dass alle cherten Personen die demselben entsprechende gleiche Jahresprämie zu leisten, überdies die jeweilig seit dem jüngsten Beitrittsalter aufgelaufene Prämienrve zu entrichten haben. Es könnte sich also eine Person auch in der Weise verern, dass dieselbe vom jüngsten Beitrittsalter angefangen, blos die jährlich entnde Prämienreserve leisten würde, um in einem späteren Zeitpunkte unter Vorlt eines günstigen Gesundheitsbefundes das Recht zu haben, die jenem jüngsten rittsalter entsprechende Jahresprämie zur Grundlage der thatsächlichen Verung zu machen; im Ablehnungsfalle jedoch auf die Rückerstattung der geleien Prämienreservenquoten Anspruch hätte. Würde sich hingegen eine Person in m späteren Alter spontan versichern, so müsste sie jene seit dem jüngsten Beisalter nachzuleistende Prämienreserve nicht wie bisher während ihrer gesammten eren Lebensdauer, sondern in einer entsprechend kürzeren Frist tilgen, um die tung ihrer Mitversicherten nachzuholen. Dies wäre eigentlich der richtige Standkt, nach welchem eine Versicherungsbank dem Principe der Lebensversicherung nächsten käme, weil hiedurch das Risico für sämmtliche Versicherte von ein und selben Beitrittsalter abhängig gemacht und in Folge dessen jener Anomalie, che sich bisher in der Leistung kurzlebiger Versicherter geäussert hat, vorgebeugt . Man könnte wohl einwenden, dass der Einfluss der Auswahl (Selection) bei einer r abgeschlossenen Versicherung noch fortbesteht, während derselbe bei einer r abgeschlossenen, also schon länger bestehenden, bereits seiner Actualität verlustig e. Dies kommt jedoch bei kurzlebigen Versicherten nicht zur Berücksichtigung. Zieht man nämlich die Eventualität eines vorzeitigen Ablebens in Betracht, gibt sich der Umstand, dass bei Voraussetzung gleich grosser Versicherungsnen zwei gleichen Gegenleistungen, ungleich grosse Leistungen gegenüberstehen; ler Mehrleistung ganz abgesehen, welche das vor dem zweiten Abschlusse gene Risico in Anspruch nahm Wir können uns daher nicht verhehlen, dass bei ommener Richtigkeit der versicherungstechnischen Grundlagen, auch wenn wir Principe der Lebensversicherung, nach welchem die langlebigen Versicherten nigen Ausfall decken müssen, welcher durch die Kurzlebigen verursacht wird, und ganz Rechnung tragen, eine Anomalie in den relativen Leistungen besteht, e mit dem Principe der Lebensversicherung gar nichts zu thun hat und blos Systeme der Prämienleistung entspringt. Damit soll jedoch nicht gesagt sein, vielleicht eine später versicherte Person für das während ihrer Versicherungsr von der Versicherungsbank zu tragende Risico nicht vollkommen mit ihrer esprämie aufkommt, denn eine solche Behauptung wäre eine vollständig unbeigte, sondern es mag nur jenes Missverhältniss hervorgehoben werden, welches r Art der Entrichtung jener vorschussweisen Leistung besteht, die mit dem iffe der Prämienreserve identisch ist. Eine Person, welche nach einer kurz

Versicherungsdauer stirbt, ist nämlich nicht nur im absoluten, sondern auc relativen Sinne gegenüber einer im gleichen Alter verstorbenen länger versich im Vortheile, und zwar im absolnten, weil eine länger versicherte Person auch l für das Risico der Versicherungsbank aufgekommen ist, was eigentlich als vollko gerechtfertigt betrachtet werden muss, im relativen Sinne ferner, weil sich die s versicherte Person der successiven Nachtragung derjenigen Prämienreserve, w durch eine früher erfolgte Versicherung angesammelt wurde, mit dem Eintritte Todes entzieht.

Die jährliche Mehrleistung einer später versicherten Person besteht aber i Annuität zur Tilgung der angesammelten Prämienreserve einer gleichalterigen frühe sicherten. Nun ist bei gleichbleibender jährlicher Annuität der Umstand massgebend Anfangs der grösste Theil derselben auf die Zinsen- und nur ein kleiner Theil a Tilgungsquote entfällt, und erst in späteren Jahren, wenn die Zinsen in Folg theilweise vollzogenen Tilgung bereits abgenommen haben, die weitere Tilgung ra vor sich geht. Daraus ergibt sich, dass eine nach kurzer Versicherungsdauer storbene Person die nachzutragende Prämienreserve nicht viel mehr als verzins also der Anforderung einer Tilgung derselben nicht nachgekommen ist. Wir geh daher zu dem Schlusse, dass die Gesammtleistung der Versicherten wohl eine artige ist, um die Gegenleistung der Versicherungsbank im Allgemeinen zu de jedoch ein Missverhältniss in den Leistungen der einzelnen Versicherten be welches in der relativen Bevorzugung eines kurzlebigen später Versicherten, g über einem solchen früher Versicherten seinen Ausdruck findet. Dieser Anomalie sich nur dadurch abhelfen, dass die Tilgungsfrist der nachzutragenden Präm reserve, welche derzeit durch die wahrscheinliche fernere Lebensdauer repräs wird, in entsprechender Weise gekürzt wird, so dass auch im Falle eines früh eintretenden Todes des Versicherten, die Tilgung zum grossen Theile vollzogen kann. Zu diesem Zwecke mag allgemein ein im Verhältniss zum Beitrittsalter gressiv zunehmender Zuschlag zur Jahresprämie erfolgen, auf Grund dessen Versicherung mit Gewinnantheil zur Durchführung gelangen könnte. Dieser Gew antheil würde jedoch erst nach einer bestimmten Anzahl von Jahren, nachdem beziehungsweise nachzutragende Prämienreserve vollständig gedeckt wäre, fl werden, indem zur Bestreitung desselben ausser den sodann freiwerdenden bezüglichen Zuschlägen, auch diejenigen Annuitätenquoten heranzuziehen w mittelst welcher ursprünglich die Tilgung der nachzutragenden Prämienreserve l vollzogen werden sollen.

Auf diese Weise wäre nicht nur dieser Zweck erreicht, sondern es wäre hied eine natürliche Grundlage zur Schaffung einer Prämie für Langlebigkeit gefu indem jener Gewinnantheil im steigenden Sinne stipulirt würde. Je länger dann Person versichert wäre, einen desto grösseren Gewinnantheil könnte sie bezi wodurch offenbar ein günstiger Einfluss auf die Lebensversicherung erzielt we würde.

Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes.

III.

Nachdem bisher der allgemeine Begriff der Prämienreserve in der Lebensver-
ierung einer ausführlichen Erläuterung unterzogen worden war, und jene mit
zug auf dieselbe sich ergebenden Mängel, welche vom versicherungstechnischen
ndpunkte betrachtet, aus der gleichmässigen Prämienleistung hervorgehen, zur
rücksichtigung gelangten, wird es nunmehr nicht schwer sein, unseren weiteren
sbezüglichen Ausführungen zu folgen. Bevor wir jedoch auf die praktischen Schluss-
gerungen dieser Frage näher eingehen, mögen die allgemeinen versicherungstech-
chen Principien, auf welchen der Begriff der Prämienreserve beruht, vom rein
thematischen Standpunkte einer näheren Untersuchung unterworfen werden.

In der Abhandlung «Untersuchungen über das Wesen der Invalidität vom
ndpunkte des Absterbegesetzes», haben wir die Beziehung der in einem beliebigen
ter x lebenden Personen L_x zur entsprechenden wahrscheinlichen ferneren Lebens-
uer derselben w_x in der allgemeinen Relation

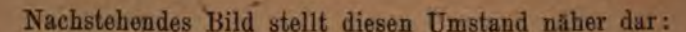
$$\frac{dl\,L_x}{dx} + \frac{dl\,w_x}{dx} = -\frac{1}{w_x}$$

Darstellung gebracht, worin das Alter x als vermittelnde Veränderliche zwischen
und w_x zur Anwendung kommt. Diese Relation lässt sich nun durch den Aus-
k

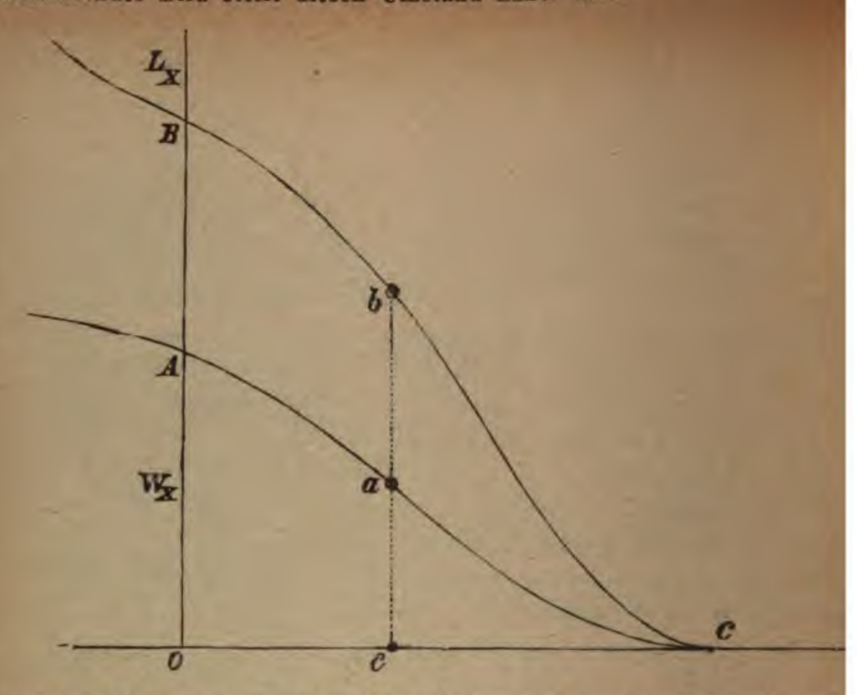
$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

schlossener Form darstellen, deren Wesen man folgendermaassen erklären und
ematisch zur Geltung bringen kann. Denken wir uns in einem rechtwinkeligen
dinatensysteme zwei Curven, welche zu einander insoferne in Beziehung stehen,
ie erstere den Verlauf der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer und die zweite
von einer bestimmten Anzahl Neugeborener in den einzelnen Altersstadien
lebenden Personen darstellt, und zwar derart, dass die gemeinschaftliche Abscisse
eweiligen Altersabschnitte x und die Ordinate die entsprechende fernere wahr-
nliche Lebensdauer w_x beziehungsweise die jeweilige Anzahl der Ueberlebenden
präsentirt. Da nun die beiden Curven das Alter x als Abscisse gemeinschaftlich
n, so werden deren Ordinaten L_x und w_x zu einander eine gewisse Beziehung
viren, welche in obiger Form zum Ausdrucke gelangt.

Hiedurch ist nun das Absterbegesetz in eine mathematische Form gebracht und
iese Weise eine theoretische Grundlage für dasselbe geschaffen.



Nachstehendes Bild stellt diesen Umstand näher dar:



Unter der Voraussetzung, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystem das zurückgelegte 18. Lebensjahr fallend, angenommen wird, würde der Cur AC den Verlauf der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer und der Cur BC denjenigen der Ueberlebenden in den nachfolgenden Altersstadien graphis stellen. Die Curve AC wird also durch die Gleichung

3) $$w_x = f(x)$$

und die Curve BC durch diejenige von der Form

4) $$L_x = \mathrm{f}(x)$$

repräsentirt. In Folge des Umstandes nun, dass diese beiden Curven die Ab gemeinschaftlich haben, werden die Ordinaten derselben w_x und L_x zu ein eine gewisse Abhängigkeit gebracht, welche in der Form 2) zum Ausdrucke Infolge dessen wird, falls die Beschaffenheit der Function $f(x)$ bekannt ist, l auch diejenige der Function $\mathrm{f}(x)$ bestimmt.

Der Beziehung der Ordinaten dieses Curvenpaares haftet jedoch eine thümlichkeit an, welche das Wesen derselben in besonderer Weise charak Der auf der rechten Seite der Form 2) stehende Ausdruck stellt als Bru Differentialquotienten seines eigenen Zählers dar, so dass man durch beid Integration zu nachfolgendem Resultate gelangt

5) $$\int L_x\,dx = -e^{-\int\frac{dx}{w_x}} + \text{Const.}$$ oder 6) $$\text{Const.} - \int L_x \cdot dx = e^{-}$$

in welchem sich bereits eine specielle Eigenschaft derselben birgt.

[N]un geht aber aus der Form 2) andererseits die Relation

$$e^{-\int \frac{dx}{w_x}} = L_x \cdot w_x$$

so dass durch Verbindung der Formen 6) und 7) die Beziehung

$$\text{Const.} - \int L_x \cdot dx = L_x \cdot w_x$$

[...]rt. Nimmt man schliesslich den Umstand wahr, dass in dem Integrale

$$\int L_x \, dx = F$$

[...]ächengleichung für die Curve BC zur Darstellung gelangt, und die Constante, [...] Werth sich bei Substitution von $L_x = 0$ ergibt, die von dieser Curve ein[...]ossene Gesammtfläche bezeichnet, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die [...]he jenes durch das Product der beiden Ordinaten L_x und w_x sich [...]enden Rechteckes gleich ist der Differenz zwischen der con[...]en Gesammtfläche und dem durch das Integrale F dargestellten [...]enabschnitte.

[I]st also beispielsweise in obigem Bilde $Oc = x$, $ca = w_x$ und $cb = L_x$, [...]räsentirt die Fläche $OBbc$ den entsprechenden durch das Integrale F dar[...]ten Werth, während die durch die Curve BC eingeschlossene constante Ge[...]fläche in der Fläche OCB sich präsentirt. In Folge dessen ist also die Diffe[...]wischen den Flächen OCB und $OBbc$, d. i. bcC dem Producte der Ordi[...] L_x und w_x gleich; daher

$$\text{Fläche } \overline{bcC} = \overline{ca} \cdot \overline{cb}.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieses Satzes lässt sich aber auch auf empy[...]n Wege nachweisen. Da die Fläche bcC die Summe der Lebenden vom $x$ten [...]jahre an darstellt und diese mittelst Division durch die im $x$ten Lebensjahre [...]en $L_x = cb$ die wahrscheinliche fernere Lebensdauer $w_x = ca$ ergibt, so [...]uch durch das Product $L_x \cdot w_x$ die Summe der Lebenden vom $x$ten Lebens[...]n zum Ausdrucke gelangen.

[E]in ähnliches Verhältniss besteht nun auch zwischen den discontirten Zahlen [...]benden D_x und der Mise M_x. Zieht man nämlich in Betracht, dass die all[...]e Form für die Mise in dem Ausdrucke

$$M_x = \frac{\Sigma \frac{L_x}{r^x}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$$

[...]rstellung gelangt, so lässt sich folgende Ableitung durchführen. Es ist füglich [...]m 11) gemäss

$$1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots\cdots = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x}\left(1 + \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+3}}{D_{x+1}} + \cdots\right)$$

[a]nalog zu diesem

$$M_{x+1} = 1 + \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+3}}{D_{x+1}} + \cdots$$

und ergibt sich also durch Substitution dieses letzteren Werthes in den erste[n] Relation

$$M_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot M_{x+1}$$

Diese Form entspricht offenbar ebenso wie die beziehungsweisen Bezeich[nungen] in derselben, Jahresintervallen, weshalb zum Zwecke der Continuität, d. h. zu[r Ein]führung unendlich kurzer Intervalle anstatt D_{x+1}, D_{x+2} .... die Bezeich[nungen] $D_{x+\triangle x}$, $D_{x+2\triangle x}$ .... zur Anwendung gelangen müssen, welcher Umstan[d auch] bei den anderen in Rechnung kommenden Grössen zur Geltung kommt. Dem[nach] erhalten wir also

$$M_x = \triangle x \left(1 + \frac{D_{x+\triangle x}}{D_x} + \frac{D_{x+2\triangle x}}{D_x} + \frac{D_{x+3\triangle x}}{D_x} + \cdots\right)$$

$$= \triangle x \left(1 + \frac{D_{x+\triangle x}}{D_x}\left[1 + \frac{D_{x+2\triangle x}}{D_{x+\triangle x}} + \frac{D_{x+3\triangle x}}{D_{x+\triangle x}} + \cdots\right]\right)$$

ferner

$$M_{x+\triangle x} = \triangle x \left(1 + \frac{D_{x+2\triangle x}}{D_{x+\triangle x}} + \frac{D_{x+3\triangle x}}{D_{x+\triangle x}} \cdots\right)$$

und schliesslich durch Substitution die Gleichung

$$M_x = \triangle x + \frac{D_{x+\triangle x}}{D_x} \cdot M_{x+\triangle x}$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$M_x \,.\, D_x = D_x \cdot \triangle x + D_{x+\triangle x} \cdot M_{x+\triangle x}$$

Lässt man nun hierin $\triangle x$ gegen 0 verschwinden, so ergibt sich folg[lich] die Gleichung

$$M_x \cdot D_x = D_x \cdot dx + (D_x + d\,D_x)\,(M_x + d\,M_x)$$

und da das Product $dM_x \cdot dD_x$ ob seiner Kleinheit verschwindet, so liefe[rt sie] nach durchgeführter Rechnung den Ausdruck

$$\text{12)} \qquad \frac{dl\;M_x}{dx} + \frac{dl\;D_x}{dx} = -\frac{1}{M_x}$$

welcher die Relation zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden D_x u[nd der] Mise M_x allgemein kennzeichnet, wobei das Alter x als vermittelnde Veränd[erliche] zwischen den beiden fungirt. Durch Transformation dieses Ausdruckes ergib[t sich] nun schliesslich derjenige von der Form

$$\text{13)} \qquad D_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}$$

welcher nicht nur eine auffallende Analogie mit der Form 2) aufweist, sonder[n] im Wesen die gleichen Eigenschaften wie jene besitzt.

Diese Form repräsentirt nämlich ebenfalls eine Relation zwischen den [Ordi]naten zweier Curven

$$\text{14)} \qquad M_x = \varphi(x) \qquad \text{und} \qquad D_x = \psi(x)$$

deren Beschaffenheit sich von den beiden vorigen in erster Reihe dadurch [unter]scheidet, dass ihre Krümmungsradien verhältnissmässig grössere sind.

..ur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes.

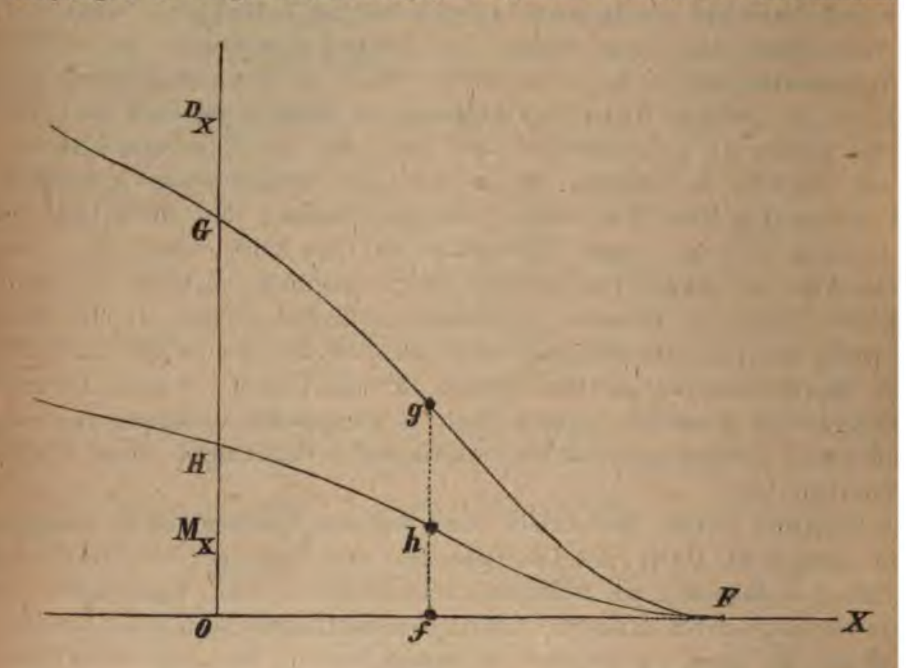
IV.

An die graphische Darstellung der Beziehung zwischen der Curve des Ueber-
..nden und derjenigen der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer, welche in der
..igen Abhandlung über dieses Thema zum besseren Verständniss der diesbezüg-
..en Auseinandersetzungen in entsprechender Weise zur Veranschaulichung gelangt,
..liesst sich in analogem Sinne auch diejenige der Relation zwischen der Curve der
..ontirten Zahlen der Ueberlebenden und jener der beziehungsweisen Misen an,
..em sich dieselbe in ähnlicher Weise wie jene entsprechenden geometrischen
..men unterordnen lässt. Der bereits erwähnte Umstand, dass wir es hier ebenso
.. im ersteren Falle mit einem Curvenpaare zu thun haben, dem eine gemein-
..aftliche Abscisse, nämlich das jeweilige Alter x zugrunde liegt und sich hiedurch
..schen den beiden in Betracht kommenden Ordinaten D_x und M_x eine Relation
..eben muss, die ihrer Beschaffenheit nach mit der aus dem ersten Falle hervor-
..enden übereinstimmend, in den Formen 12) und 13) der vorigen Abhandlung
..thematisch zum Ausdrucke gelangt, lässt es als geboten erscheinen, diese beiden
..e mit Bezug auf jene aus denselben entspringenden Beziehungen einem Vergleiche
..nterwerfen.

Rücksichtlich dessen lassen sich nun folgende Wahrnehmungen constatiren.
..rend nämlich die Curve der Ueberlebenden und diejenige der ferneren wahr-
..nlichen Lebensdauer reine Wahrscheinlichkeitscurven sind, repräsentirt sowohl
..Curve der discontirten Zahlen der Ueberlebenden als auch diejenige der beziehungs-
..en Misen, aus denen das letztere Curvenpaar besteht, bestimmte Functionen der
..dinaten der beiden ersten Curven, und zwar insofern, als die Abscisse derselben
.. unveränderte bleibt, die Ordinate hingegen durch Cumulirung dieser und der be-
..ungsweisen Ordinate einer der erstgenannten Curven gebildet ist. Hieraus ent-
..gt nun eine gewisse verwandte Gesetzmässigkeit im Wesen der jeweilig zu ein-
..r in Beziehung stehenden Linien der einzelnen Curvenpaare, und kann man aus
..em Umstande den Grund der homogenen Beschaffenheit derjenigen Beziehungen
..ten, welche denselben eigen sind.

Jener Gesetzmässigkeit lässt sich nun auch die Ursache der unwesentlichen
..nderung der allgemeinen Form der in Betracht kommenden Curven zuschreiben
..he in ihrer Art einem bestimmten Curvensysteme anzugehören scheinen. Die
..n Curvenpaare jeweilig angehörigen Linien verändern nämlich ihre Beziehung
..ange nicht, als deren functionelle Transformation auf gleichen Grundlagen ge-
..ht. Die Curven selbst sind jedoch einer gemeinschaftlichen Veränderung nur
..weit unterworfen, als hiedurch das eigenthümliche Wesen derselben nicht tangirt
.. So finden wir in unserem Falle die beiden in Betracht kommenden Curven-
.. nur in Betreff ihrer Krümmungsintensität einem unterschiedlichen Verlaufe
..rworfen. Die beiden dem letzteren Curvenpaare angehörigen Linien zeichnen

sich gewissermassen durch eine minder intensive Krümmung aus, deren Gru
der durch besagte functionelle Transformation hervorgebrachte Verlängerun
Krümmungsradien zu suchen ist. In nachstehendem Bilde ist nun der Verla
Curve der discontirten Zahlen der Ueberlebenden einerseits und der entsprech
Misen andererseits graphisch veranschaulicht und ist aus demselben durch Ve
mit demjenigen in voriger Abhandlung jener Umstand unschwer wahrzunehme



Hier repräsentirt also der Curventheil GF den Verlauf der discontirten
der Ueberlebenden und HF denjenigen der beziehungsweisen Misen, wobei ab
der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems in das zurückgelegte 18. Lebensja
genommen wird. Der homogenen Beschaffenheit der Beziehung zwischen diesen
Curven und derjenigen zwischen den früheren entspringt nun auch die Nothw
keit ähnlicher Bedingungen, so dass man auf dem gleichen mathematischen
wie zuvor, eine der Form 8) der vorigen Abhandlung entsprechende Bed
für diesen Fall erhält, welche in der Relation

$$15)\qquad \text{Const.} - \int D_x \cdot dx = D_x \cdot M_x$$

zum Ausdrucke gelangt. Ist also beispielsweise $x = Of$, so erhält man M_x
und $D_x = gf$. Infolge dessen ergibt sich der durch das Integrale

$$Fl. = \int D_x \cdot dx$$

ausgedrückte Flächentheil in $OfgG$. Subtrahirt man daher diesen von der g
durch den Curventheil GF eingeschlossenen constanten Gesammtfläche OG
verbleibt der Flächenrest gfF, welcher die Summe der discontirten Zahlen der
lebenden während aller dem Alter x nachfolgenden Jahre darstellt und glei

Fläche des aus den beiden Ordinaten hf und gf gebildeten Rechteckes, d. i. dem ducte der discontirten Zahl der Ueberlebenden im $x$ten Lebensjahre D_x und der iehungsweisen Mise M_x.

Wir gelangen nun zu folgendem interessanten Resultate. Durch Vergleich der den aus den vorliegenden Curvenpaaren entspringenden Relationen

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x} \quad \text{und} \quad D_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}$$

ibt sich in Folge des Umstandes, das $D_x = L_x : r^x$ die allgemeine Beziehung schen der Mise und der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer

$$\frac{1}{M_x} = - \frac{dl\left(\text{Const.} - \int \frac{1}{w_x r^x} \cdot e^{-\int \frac{dx}{w_x}} \cdot dx\right)}{dx}$$

Nachdem wir nun dieses vorausgeschickt haben, wollen wir daran gehen, die teren Conclusionen aus den bisher ermittelten Ergebnissen zu ziehen und den such machen, den Werth der jährlichen Prämien in ähnlicher Weise durch eine ge- lossene mathematische Form zum Ausdrucke zu bringen. Zu diesem Behufe ist geboten, vorerst die einmalige Prämie P_x durch ihren allgemeinen Werth dar- tellen, und zwar vorderhand für die gewöhnliche Versicherung für den Todesfall In diesem Falle ist nun

$$P_x = S \,.\, \frac{\Sigma \frac{T_x}{r^{x+1}}}{D_x}$$

n S die Versicherungssumme und T_x die Zahl der Todten nach Ablauf des $x$ten nsjahres bedeutet. Die einmalige Prämie ist also die Summe der discontirten en der Todten vom $x$ten Lebensjahre an, dividirt durch die discontirte Zahl der nden im $x$ten Lebensjahre, multiplicirt mit der Versicherungssumme.

Nachdem nun die Zahl der Todten nach Ablauf des $x$ten Lebensjahres sich die Differenz der Lebenden im $x$ten und derjenigen im $(x + 1)$ten Lebens- darstellen lässt, so gelangt man auf einfachem Wege zu der Form

$$D_{x+1}\left(\frac{L_x}{L_{x+1}} - 1\right) = \frac{T_x}{r^{x+1}}$$

falls man die Intervalle als unendlich klein annimmt, zu dem Ausdrucke

$$D_{x+\triangle x}\left(\frac{L_x}{L_{x+\triangle x}} - 1\right) = \frac{T_x}{r^{x+\triangle x}} \cdot \triangle x$$

ier gemäss der mathematischen Differenzirungs-Grundform zu der Relation

$$\frac{L_x - L_{x+\triangle x}}{\triangle x} = -\frac{\triangle L_x}{\triangle x} = T_x$$

, worin nunmehr T_x die Verstorbenen innerhalb des Zeitraumes zwischen dem und $(x + \triangle x)$ten Lebensjahre repräsentirt.

In Folge dessen ergibt sich nun

$$P_x = S \cdot \left[\frac{D_{x+\triangle x}}{D_x}\left(\frac{L_x}{L_{x+\triangle x}} - 1\right) + \frac{D_{x+2\triangle x}}{D_x}\left(\frac{L_{x+\triangle x}}{L_{x+2\triangle x}} - 1\right)\right.$$

also auch

$$P_{x+\triangle x} = S \cdot \left[\frac{D_{x+2\triangle x}}{D_{x+\triangle x}}\left(\frac{L_{x+\triangle x}}{L_{x+2\triangle x}} - 1\right) + \frac{D_{x+3\triangle x}}{D_{x+\triangle x}}\left(\frac{L_{x+2\triangle x}}{L_{x+3\triangle x}} - 1\right) + \right.$$

als Resultat.

Multiplicirt man nun den letzteren Ausdruck auf beiden Seiten mit

$$\frac{D_{x+\triangle x}}{D_x}$$

so erhält man durch Substitution desselben in den ersteren die Relation

$$22)\qquad P_x = \left(S \cdot \left(\frac{L_x}{L_{x+\triangle x}} - 1\right) + P_{x+\triangle x}\right)\frac{D_{x+\triangle x}}{D_x}$$

welche in dem Falle, als $\triangle x$ gegen Null verschwindet, in die Gleichung

$$23)\qquad P_x\, d D_x + D_x\, d P_x = S \cdot D_x \cdot dl\, L_x$$

übergeht und durch Integration derselben die Form

$$24)\qquad P_x \cdot D_x = S \cdot \int D_x \cdot dl\, L_x = S \cdot \int r^{-x}\, d L_x$$

liefert.

Da nun laut Form 16)

$$25)\qquad M_x \cdot D_x = e^{-\int \frac{dx}{M_x}}$$

ist, so ergibt sich durch Division dieser beiden letzten Gleichungen diejen der Beschaffenheit

$$26)\qquad \frac{P_x}{M_x} = p_x = S \cdot e^{\int \frac{dx}{M_x}} \cdot \int r^{-x}\, d L_x + \text{Const.}$$

welche schliesslich in Folge des Umstandes, dass $L_x = D_x \cdot r^x$ ist, und m sicht auf die Form 25) zu der Gleichung

$$27)\qquad p_x = S \cdot e^{\int \frac{dx}{M_x}} \int r^{-x} \cdot d\left(r^x \cdot \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}\right) + \text{Const.}$$

führt. Nach durchgeführter Differentiation unter dem Integralzeichen erg nun, wenn die auf diese Weise vereinfachte Integration vollzogen wird, für liche Prämie p_x der geschlossene mathematische Ausdruck

$$28)\qquad p_x = S \cdot \left[\frac{1}{M_x} - l\,r\right] + \text{Const.}$$

in welchem bei 4percentiger Verzinsungsgrundlage, also wenn $r = 1{\cdot}04$, d der Constante gleich ist $0{\cdot}00076 \cdot S$.

ur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes.

V.

Als Resultat unserer bisherigen Auseinandersetzungen hat sich die allgemeine m der jährlichen Prämie p_x für einfache Versicherung auf den Todesfall in dem drucke

$$p_x = S\left(\frac{1}{M_x} - l\,r\right) + \text{Const.}$$

ben, worin bei Zugrundelegung der Sterblichkeitstafeln der siebzehn englischen ellschaften und einer vierpercentigen Verzinsung, die Constante den Werth 0076 . S repräsentirt. In diesem Falle ist also der Aufzinsungsfactor $r = 1{\cdot}04$ dessen natürlicher Logarithmus $l\,r = 0{\cdot}039221$. Verändert sich jedoch die Verungsgrundlage, so erleidet auch die entsprechende Constante eine Veränderung hrem Werthe, so dass eine Abhängigkeit derselben vom Aufzinsungsfactor nahe. Untersuchen wir daher die Berechtigung dieser Annahme. Bei Zugrundelegung Sterblichkeitstafel der siebzehn englischen Gesellschaften und einer $3^1/_2$pergen Verzinsung ergibt sich als Werth jener Contante 0·00058 . S.

Wird jedoch eine andere Sterblichkeitstafel zugrunde gelegt und der Zinsfuss halten, so bleibt der Werth der Constante der gleiche. Unsere Annahme bet sich daher vollständig und besteht nun die Frage, in welcher Weise sich Constante als Function des Aufzinsungsfactors r darstellen lässt. Zur Beantung dessen mag nun folgende Erörterung dienen.

Vergleicht man den in Form 28) dargestellten Werth der jährlichen Prämie lem bei der bisherigen Rechnungsweise üblichen

$$p_x = \frac{P_x}{M_x} = S \cdot \frac{\Sigma \frac{T_x}{r^{x+1}}}{\Sigma \frac{L_x}{r^x}}$$

man hierin die entsprechenden Integrationsformen anstatt der Summen anet, so erhält man nach vollzogener Rechnung für die genannte Constante die

$$\text{Const.} = S\left(\frac{(l\,r)^2}{2\,!} - \frac{(l\,r)^3}{3\,!} + \frac{(l\,r)^4}{4\,!} - \frac{(l\,r)^5}{5\,!} + \ldots\ldots \frac{(l\,r)^n}{n\,!}\right)$$

Substituirt man nun in diese den Werth $r = 1{\cdot}04$, so ergibt sich als Summe ben das Product S . 0·00076 . . . . Ferner erhält man bei Substitution des es von $r = 1{\cdot}035$ in dieselbe S . 0·00058 . . . u. s. w. Demgemäss stellt Reihe die betreffende Constante als Function von r dar.

Nun lässt sich aber dieselbe auch folgendermaassen schreiben

$$\text{31)} \qquad \text{Const.} = S\left(\frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^2}{2\,!} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^3}{3\,!} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^4}{4\,!} + \cdots \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^n}{n\,!}\right)$$

und da bekanntlich die Reihensumme in der Gleichung

$$\text{32)} \qquad 1 + l\,\frac{1}{r} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^2}{2\,!} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^3}{3\,!} + \cdots + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^n}{n\,!} = \frac{1}{r}$$

zum Ausdrucke gelangt, so ergibt sich schliesslich

$$\text{33)} \qquad \text{Const.} = S\left(\frac{1}{r} - l\,\frac{1}{r} - 1\right) = S\left(\frac{1}{r} + l\,r - 1\right)$$

als Resultat und demnach der modificirte Werth für die jährliche Prämie

$$\text{34)} \qquad p_x = S\left(\frac{1}{M_x} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

Betrachten wir nun diese Form vom Standpunkte ihrer sonstigen Besch heit, so finden wir, dass hierin die Prämie durch eine einzige Variable, und die Mise M_x zum Ausdrucke gelangt, während die Grössen S und r constan von beliebiger Beschaffenheit sind.

Dieser Umstand ist angesichts der bisher bei der Prämienberechnung übl complicirten Formen für die Versicherungstechnik von weittragender Bedeutung werden wir späterhin Gelegenheit haben, die weiteren Conclusionen hieraus zu z Der Vortheil dieses Erfolges tritt jedoch noch deutlicher bei der Ermittelun Prämienreserve hervor. Integrirt man nämlich das in der Form 27) zum Ausd gelangende Integrale zwischen bestimmten Grenzen a und $a + m$, indem Alter zur Zeit des Versicherungsabschlusses und $a + m$ dasjenige zur Zeit Prämienreserve-Ermittelung darstellt, so ergibt sich als Resultat die Relation

$$\text{35)} \qquad \Big|_a^{a+m} p_x = S\left(\frac{1}{M_{a+m}} - \frac{1}{M_a}\right) = p_{a+m} - p_a$$

Nun gelangt aber die Prämienresere bei jährlicher Prämienleistung in der

$$\text{36)} \qquad {}^{a+m}\text{Res.}\,(p_a) = P_{a+m} - p_a \cdot M_{a+m} = (p_{a+m} - p_a)\,M_{a+m}$$

zum Ausdrucke und ergibt sich infolge dessen für dieselbe nachstehender ein Werth

$$\text{37)} \qquad {}^{a+m}\text{Res.}\,(p_a) = S\left(1 - \frac{M_{a+m}}{M_a}\right)$$

Die Prämienreserve bei einmaliger Prämienzahlung gelangt ferner in der

$$\text{38)} \qquad {}^{a+m}\text{Res.}\,(P_a) = P_{a+m}$$

zur Darstellung.

Da nun der Werth der einmaligen Prämie in der Gleichung

$$P_x = S\left[1 + M_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

kundgibt, so ist auch hier der entsprechende Werth der Prämienreserve von er einzigen Variablen abhängig, indem derselbe in der Form

$$^{a+m}\text{Res.}\,(P_a) = S\left[1 + M_{a+m}\cdot\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

Geltung kommt.

Wir wollen nun versuchen, diese Resultate auf andere Versicherungsarten in wendung zu bringen.

Nach der Form 15) der vorigen Abhandlung ist die Mise als vorschussweise nslängliche Leibrente im Werthe von 1, durch die Relation

$$M_x = \frac{\text{Const.} - \int D_x\,dx}{D_x}$$

Ausdrucke gebracht. Hieraus ergibt sich nun die entsprechende vorschussweise oräre Leibrente, wenn die Integration zwischen den bezüglichen Grenzen durch-rt ist. In Folge dessen ist

$$_bM_a = -\frac{1}{D_x}\int_b^a D_x\cdot dx$$

a das Alter im Zeitpunkte des Beginnes und b dasjenige bei Einstellung des entenbezuges bedeutet.

Bei Versicherung auf den Todesfall mit abgekürzter jährlicher Prämienzahlung nun die einmalige Prämie die gleiche sein wie bei gewöhnlicher Versicherung den Todesfall. wogegen die jährliche Prämie sich als Quotient zwischen dieser der entsprechenden temporären Leibrente ergibt. Infolge dessen wird die Form die jährliche Prämie bei abgekürzter Prämien-Zahlungsdauer folgendermaassen n

$$_bp_a = S\left[\frac{1}{_bM_a} + \frac{M_a}{_bM_a}\cdot\left(\frac{1}{r} - 1\right)\right]$$

Anders gestaltet sich dies bei der Versicherung auf den Todesfall mit be-nkter Versicherungsdauer. Hier wird auch die einmalige Prämie sich der ent-chenden Versicherungsdauer anpassen müssen, indem dieselbe den Baarwerth kürzeren jährlichen Prämienleistung repräsentirt.

Demgemäss gelangt die einmalige Prämie auf folgende Weise zur Darstellung. die Summe der discontirten Zahlen der Todten durch die Form

$$\Sigma\,\frac{T_x}{r^{x+1}} = \int r^{-x}\,dL_x$$

zum Ausdrucke gelangt, so wird die Summe der Todten zwischen den Grenzen und b durch das bestimmte Integrale

44) $$J = \int_b^a r^{-x} d L_x$$

ermittelt. Mittelst Division derselben durch die discontirte Zahl der Lebenden $a$ten Jahre ergibt sich als Werth für die einmalige Prämie

45) $${}_bP_a = \frac{S}{D_a}\int_b^a r^{-x} d L_x = S\left(1 + {}_bM_a\left(\frac{1}{r} - 1\right) - \frac{M_a}{M_b}\, e^{\int_a^b \frac{dx}{M_x}}\right)$$

in welchem wie ersichtlich ebenfalls blos die Mise als variable Grösse auftritt. jährliche Prämie wird sodann mit Hilfe der Form

46) $${}_bp_a = \frac{{}_bP_a}{{}_bM_a}$$

berechnet. Auf diesem Wege lassen sich sämmtliche Formen der Lebensversicherung dieser Methode unterwerfen, wobei stets sowohl die einmalige als auch die jährliche Prämie als Function der Mise sich darstellen lässt. In der gleichen Weise ist auch bei der Prämienreserve der Fall, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil mit Hilfe dieser Methode möglich ist, sämmtliche in Rechnung kommenden Factoren durch die Mise zum Ausdrucke zu bringen. Ueberhaupt gelangt man mittelst selben zu manchem interessanten Ergebnisse.

Zieht man den in der Form 39) dargestellten Werth der einmaligen Prämie für die Versicherung auf einfachen Todesfall in Betracht und multiplicirt die Gleichung auf beiden Seiten mit der discontirten Zahl der Lebenden im $x$ten Lebensjahre, so ergibt sich die Form

47) $$\frac{P_x D_x}{S} = D_x + M_x D_x\left(\frac{1}{r} - 1\right)$$

als Resultat. Da nun hierin laut Form 24) der vorigen Abhandlung

$$\frac{P_x D_x}{S} = \int r^{-x} d L_x$$

die Summe der discontirten Zahlen der Todten, und laut Form 15)

$$M_x \cdot D_x = \text{Const.} - \int D_x\, dx$$

die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden bedeutet, so geht hieraus folgende Regel hervor: Die Summe der discontirten Zahlen der Todten im $x$ten Lebensjahre ist gleich der discontirten Zahl der Lebenden mehr der Summe der discontirten Zahlen der Lebenden im gleichen Alter multiplicirt mit dem reciproken Werthe des Aufzinsungsfactors weniger 1.

Demnach lautet die Form

48) $$\Sigma\, \frac{T_x}{r^{x+1}} = \frac{L_x}{r^x} + \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot \Sigma\, \frac{L_x}{r^x}$$

welche für alle Sterblichkeitstafeln unter Zugrundelegung welchen Zinsfusses immer Giltigkeit besitzt.

inanzpolitische Reflexionen vom Standpunkte des Staats-socialismus.

Der sociale Kampf, welcher heute zwischen dem Capital und der Arbeit aus-hten wird, hat seine Ursache in dem naturgemässen Ausgleichsbedürfnisse des hnungsverhältnisses dieser beiden wirthschaftlichen Factoren. Jene Spannung, ie von Zeit zu Zeit im socialen Getriebe erzeugt wird, ist durch jene diesbe-ch collidirenden Interessen des Capitales und der Arbeit bedingt, indem ein ltsames Zurückdämmen der Anforderungen, welche die Arbeit für ihre Leistung tellen berechtigt ist, es dem Capitale ermöglicht, eine Zeitlang den Ausgleich Entlohnungsverhältnisses hinauszuschieben. Das Capital besitzt nämlich kraft er nach wirthschaftlich classischen Grundsätzen über die Production ausübenden alt die Handhabe, diesen Ausgleichungsprocess bis zu einer gewissen Grenze zu ögern und ist infolge dessen in der Lage, die Arbeitsentlohnung während einer eren Dauer auf einem tieferen Niveau zu erhalten, als dies den jeweiligen wirth-ftlichen Verhältnissen entspricht. Infolge dessen muss die Expansion derjenigen lerungen, welche die Arbeit an die Production zu stellen berechtigt ist, eine sse Intensität erreicht haben, bevor die Herstellung des Gleichgewichtes betreff der ohnung von Capital und Arbeit im Interesse der Letzteren zum Durchbruche ngen kann. Jenes Drängen nach Verbesserung der Arbeitsentlohnung ist in e dessen von einer Spannung der wirthschaftlichen Verhältnisse begleitet, he durch den Verschiebungsprocess der beiderseitigen Interessen erzeugt, von zu Zeit eine Stauung des socialen Getriebes hervorruft. Im Laufe der letzten zehnte haben sich nun die Gegensätze zwichen jenen beiden wirthschaftlichen oren in einer Weise verschärft, dass die Erscheinungen, welche sich auf dem iete der Production diesbezüglich geltend machten, in besorgnisserregender Weise die socialen Verhältnisse einzuwirken begannen. Die Arbeit ging daran, ihre lerungen energisch durchzusetzen und stellte dem wirthschaftlichen Uebergewichte Capitals, die Macht der Coalition entgegen. Dass ein mit derartiger Zähigkeit hrter wirthschaftlicher Kampf nicht ohne Einfluss auf die sonstigen socialen ichtungen bleiben konnte, versteht sich von selbst, und musste es daher geboten heinen, die staatliche Autorität in die Wagschale zu werfen, um einem derartigen ande ein Ende zu machen. — Der Staat ist der Deus ex machina, welcher den hschaftlichen Streit zwischen Capital und Arbeit zu schlichten berufen ist. Die ezug auf höhere Arbeitsentlohnung gestellten Ansprüche auf ihre Berechtigung rüfen, und dieselben nach Maassgabe ihrer Zulässigkeit einer entsprechenden rsuchung zu unterziehen, gilt als erste Bedingung für die Durchführung dieser cht und wollen wir daher versuchen diese Frage vom Standpunkte der wirth-ftlichen Opportunität näher in's Auge zu fassen.

Hinsichtlich dessen wirft sich unwillkürlich die Frage auf, wie es kommt, dass de die Arbeitsleistung das Recht, immer grössere Ansprüche an die Production

in Betreff ihrer Entlohnung zu stellen, für sich in Anspruch nimmt. Denn es mu
offenbar hiedurch die dem Capitale für dessen Leistung gebührende Entlohnu
geschmälert werden, falls der Werth des Arbeitszweckes ein unveränderter blei
soll. Die Erklärung für diesen Umstand ist nun in der stetigen Veränderung
wirthschaftlichen Verhältnisse und der mit denselben im engen Contacte stehen
Capitalsverwerthung zu suchen. Währenddem sich das Capital bereits seit geraum
Zeit in Folge seines stetigen unverhältnissmässigen Anwachsens im Stadium
relativen Entwerthung befindet, und dessen Angebot ein immer grösseres wird, so d
auch dessen Entlohnung einer relativen Abnahme im Allgemeinen unterworfen
hat die Arbeitsentlohnung in Folge der immer zunehmenden Lebensbedürfnisse und
durch hohe Einfuhrzölle und eine immer grösser werdende indirecte Steuerbelast
hervorgerufenen bedeutenden Vertheuerung der Lebensmittel, sich als gänzlich u
reichend gestaltet. Hiedurch bildete sich nun ein unhaltbares Verhältniss he
welches durch die Macht des Capitales künstlich aufrechterhalten, sich selbs
absurdum führen musste. Der immer grösser werdende Capitals-Bedarf zur Be
tung der nothwendigsten Bedürfnisse des Lebensunterhaltes musste die Unzul
lichkeit der Arbeitsentlohnung immer schärfer hervortreten lassen und schlies
jenen Damm durchbrechen, welchen die wirthschaftliche Superiorität des Capi
gezogen hatte.

Aber abgesehen davon, dass die Bedürfnisse der Staaten zur Vertheu
der Lebensmittel beitrugen, war es hauptsächlich auch die Entwerthung des Cap
selbst, welche noch eine Verschärfung dieses Umstandes hervorrief, wodurch einer
eine mindere Entlohnung des Capitales und andererseits eine höhere Belastung
Arbeitsertrages sich ergeben musste, welche also in doppelter Hinsicht das
langen nach besserer Entlohnung der Arbeitsleistung rechtfertigte. Das zähe
halten des Capitales an seiner bisherigen Verwerthungsersprieslichkeit trotz
mangelnden Bedingungen hiefür schuf ein wirthschaftliches Missverhältniss, de
Ausgleichungsprocess sich nur successive wird vollziehen können. Währenddem
der allgemeine Zinsfuss als proportionaler Ausdruck der relativen Capitalsverwert
immer mehr zurückzuweichen gezwungen ist und nach und nach an Boden ver
gibt sich bei der nach besserer Entlohnung drängenden Arbeit das Bestreben k
von dem verlassenen Gebiete Besitz zu nehmen. Diesem Bestreben leistet nun
Capital mit allen ihm zur Verfügung stehenden künstlichen Mitteln Widers
und ist es insbesondere jene demselben über die Production zustehende Gew
welche in dieser Beziehung die Anerkennung der wirthschaftlichen Postulate
hindert. Dieser Umstand veranlasste schliesslich die Staaten, zu dieser Frage Stell
zu nehmen, weil die Gefahr nahe lag, dass dieser socialwirthschaftliche Kampf
Grenze der gesetzlichen Zulässigkeit überschreiten könnte. Ueberdies mussten
Ansprüche, welche die Arbeit an die Production stellt, vom wirthschaftlichen Sta
punkte anerkannt werden und war es daher geboten, den wirthschaftlich Schwäch
gegenüber dem solchermaassen Stärkeren in Schutz zu nehmen. Unter diesen Auspi
vollzieht sich also heute jener Process, welcher den Ausgleich des Entlohnungsv
hältnisses zwischen Capital und Arbeit zum Zwecke hat. Im Interesse der Staat

jedoch gelegen, dessen Vollzug, insolange sich derselbe im Rahmen der Zu-
keit bewegt, nicht nur nicht zu hindern, sondern vielmehr nach Möglichkeit
terstützen, da hiedurch einerseits die finanzielle Kräftigung der breiten, das
e Contingent für die indirecte Besteuerung bildenden Volksmassen erzielt
andererseits ein günstigeres Verhältniss in der Belastung des allgemeinen
erwerbes hervorgerufen wird. In diesem Sinne geschieht auch Alles, was der
zur Verbesserung der Lage der arbeitenden Bevölkerung unternimmt, wie
ken-, Unfall-, Invaliden- und Altersversicherung der Arbeiter von Staatswegen,
nteresse seiner eigenen wirthschaftlichen Leistungsfähigkeit. Es ist Pflicht des
es, die Arbeit hochzuhalten, weil in derselben seine eigene Existenzbedingung

Nachdem wir nun über das Wesen dieser Frage die nöthigen Aufschlüsse ge-
n haben, wollen wir darangehen, deren Einfluss auf das wirthschaftliche Getriebe
finanzpolitischen und nationalökonomischen Standpunkte näher zu beleuchten.
Hinblick auf die bisherigen Auseinandersetzungen gelangt man zu der Conclu-
dass die Entlohnung des Capitales auf dem Gebiete der Production dem Gebote
Nothwendigkeit sich wird anpassen müssen, indem dieselbe eine entsprechende
älerung erfahren wird. Es könnte jedoch auch der Fall sein, dass die durch
hung der Arbeitsentlohnung hervorgebrachte Mehrbelastung der Productionskosten
derer Weise hereingebracht werden könnte, ohne den Capitalsertrag zu beein-
n. Dies ist jedoch nur möglich, wenn der Ertrag des Arbeitszweckes eine Steige-
erfährt, was aber nur innerhalb derjenigen Grenzen durchführbar ist, in denen
die Concurrenzfähigkeit der einzelnen industriellen Zweige bewegt. Diesbezüg-
ist nun eine weise, zielbewusste Zollpolitik, verbunden mit genügenden Absatz-
ten und einer mit allen Mitteln des Fortschrittes ausgestatteten leistungsfähigen
ction, von ausschlaggebender Wirkung. Es ist daher unter diesen Umständen
seits Aufgabe eines industriellen Staates, den handelspolitischen Anforderungen
nbrechenden neuen Epoche gerecht zu werden, andererseits aber ist es Sache
Production, durch zweckentsprechende Erzeugnisse und regen Handelsgeist diese
ebungen zu unterstützen. Aber noch eine andere wichtige Aufgabe tritt an den
angesichts der kommenden wirthschaftlichen Verhältnisse heran. Die successive
erthung des Ertrages auf dem Gebiete der Production drängt einen grossen
des Capitales zur einfachen Anlage. Infolge dessen nimmt die Anfrage nach
srenten und anderer Anlagen mit fixer Verzinsung immerwährend zu und wird
rch eine stetige Steigerung dieser Werthe hervorgebracht, was auf eine, im Wege
einfachen Anlage sich besser rentirende Capitalsverwerthung schliessen lässt,
ies durch productive Fructification möglich ist. Wir haben es hier also mit
die wirthschaftlichen Verhältnisse überbietenden Verwerthungserspriesslichkeit
mobilen Capitales zu thun, welche zum grossen Theile das productive Capital
seinem Wirkungskreise ablenkt und auf diese Weise den Zweck der Production
lich vertheuert. Die nächste Folge hievon ist, dass ein Staat, welcher seine
hen besser verzinst, als dies den wirthschaftlichen Verhältnissen gemäss entspricht,
eigene Production schädigt, indem er derselben das Betriebscapital entzieht.

Da nun die durch stetige Entwerthung des Capitalsertrages hervorgebr
starke Nachfrage nach geeigneten Anlagen mit fixer Verzinsung, unter welchen
erster Linie die Staatsrenten verstanden sind, nothwendigerweise zu einem mind
Angebot in der Verzinsung führen muss, so involvirt dies einen gewissen Zwang
Zinsfuss der Staatsanlehen nach Möglichkeit herabzusetzen. Daraus ergibt sich nur
die staatliche Institution ein doppelter Vortheil. In Folge des billigeren Zinsf
wird durch Conversion das Budget für die Verzinsung der Staatsanlehen entlastet
zugleich das bisher der Anlage zuströmende mobile Capital der Production w
zugeführt, wodurch auch eine Verbilligung des productiven Capitales erzielt
Die vollständige Herstellung des Gleichgewichtes bezüglich der Entlohnung der Capi
und Arbeitsleistung hängt demgemäss einerseits von der Verbilligung des Zinsf
der Rentenanlage und andererseits von einem grösseren Productionsertrage ab
ist daher Aufgabe eines jeden Staates, sowohl im Interesse seiner Production als
seiner Finanzen, die Bedingungen wahrzunehmen, welche aus der naturgem
Entwicklung dieses Processes hervorgehend, einerseits zur Entlastung der Staatsfin
und andererseits zur Kräftigung des Volksvermögens beizutragen geeignet sind.

Freilich sind hier auch Umstände in Betracht zu ziehen, welche die D
führung eines derartigen staatswirthschaftlichen Processes erschweren, ja sog
Frage stellen können. Ein Staat, in welchem die finanzielle Kraft des V
hinreicht um die Staatsanlehen zum grossen Theile zu absorbiren, erfreut sich
gewissen finanzpolitischen Unabhängigkeit, welche es demselben ermöglicht
wirthschaftlichen Postulaten seiner Existenzbedingung leichterdings gerecht zu we
Anders verhält sich dies jedoch bei einem Staate, dessen Hauptgläubiger ausländi
Capital ist. Jede Bewegung desselben, welche auf eine finanzielle Transaction
Zwecke der Zinsfussermässigung seiner Anlehen schliessen lässt, ist geeignet
Sturm von jener Seite zu entfesseln, und eine Schädigung seines Credit
erzeugen. Immerhin lässt sich jedoch ein sichtbares Schwinden der Prätens
des mobilen Capitales nicht mehr verleugnen. Das Gesetz, welches auf dem
von Angebot und Nachfrage die Verwerthungserspriesslichkeit des Capitales r
lässt nur eine Deutung zu und diese tönt in einem stetigen Sinken des Zins
aus, mag auch das Capital in seinem Entsetzen dem Rade der Zeit hie und
die Speichen fallen.

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

Nachdem wir bisher die theoretischen Fragen der verschiedenen Disciplinen der eszins- und Rentenrechnung behandelt hatten, wollen wir darangehen, die prake Seite derselben einer ausführlichen Erörterung zu unterziehen. Die Werthe der Zinsen und Zinseszinsen in verschiedenen Terminen angewachsenen Capitalien n sich auf mathematischen Wege blos durch eine einzige geschlossene Form ausken, welche geeignet ist, in jeder Beziehung den diesbezüglichen Anforderungen ntsprechen. Diese Form, welche in dem Ausdrucke

$$K_n = K_0 (1 + p)^n$$

Geltung kommt und worin $P = 100 p$ den Zinsfuss, n den Termin, K_0 das Ancapital und K_n das aufgezinste Capital bezeichnet, zerfällt in zwei Factoren, von en der eine aus K_0 und der andere aus der Potenz $(1 + p)^n$ besteht. Das Product er beiden Factoren bildet dann das gesuchte Resultat K_n. Da nun der Factor $+ p)^n$ sich auf die kürzeste Weise blos mittelst Logarithmen berechnen lässt und derartige Berechnung für den praktischen Gebrauch immer noch zu umständlich so ist es nothwendig, zum Zwecke kürzerer Rechnungsart diesen Factor für die chiedenen gangbaren Zinsfüsse, und die jeweiligen Termine einzeln auszurechnen tabellarisch derart zusammenzustellen, dass der entsprechende Werth dieses Factors rt der Tabelle entnommen werden kann.

Es wäre z. B. der Werth eines Capitales von 10.000 Gulden, welches durch Jahre mit einem Zinsfusse von $P = 100 p = 4\,\%$ angelegt war, zu ermitteln. entsprechende Form für diese Rechnung ist, da $K_0 = 10.000$, $n = 20$ und $= \frac{4}{100}$,

$$K_n = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20}$$

Nun wird aber der Factor $\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20}$ aus der Tabelle schon berechnet entmen, so dass es nur nothwendig ist, denselben mit 10.000 zu multipliciren, um Werth für K_n zu erhalten.

In diesem Falle ist nun

$$\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20} = 2{\cdot}19112314$$

it

$$K_n = 10.000 \times 2{\cdot}191123!4 = \text{fl. } 21911{\cdot}23$$

Resultat.

Für halbjährige Verzinsung muss der Zinsfuss halbirt und dementsprechend Termin von 20 ganzen Jahren in 40 halbe Jahre zerlegt werden. Es ergibt sich n für obiges Beispiel

$$K = 10.000\,, \quad n = 40 \quad \text{und} \quad p = \frac{2}{100}$$

die diesbezügliche Form

$$K'_n = 10.000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{40}$$

für welche der Factor $\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{40}$ der Tabelle entnommen, den Werth 2·2080396 repräsentirt, so dass man in

$$K'_n = 22080\cdot39$$

das gesuchte Resultat für halbjährige Verzinsung erhält.

Im Allgemeinen wird in neuerer Zeit die halbjährige Verzinsungsform m in Anspruch genommen als die ganzjährige, so dass es angezeigt erscheint, Tabellen für längere Verzinsungstermine einzurichten, und zwar insbesondere für niedrigeren Zinsfüsse, deren Höhe der gewöhnlichen halbjährigen Verzinsung entspr

In Nachfolgendem führen wir die einzelnen für den praktischen Gebrauch wendbaren Tabellen an:

I.

Tafel für die Logarithmen der wichtigsten Zahlenwerthe von $(1 + p)$.

$P = 100p$	log. $(1 + p)$	$P = 100p$	log. $(1 + p)$
1/4	0·0010843813	5 1/4	0·0222221045
1/2	0·0021660618	5 1/2	0 0232524596
3/4	0·0032450548	5 3/4	0·0242803760
1	0·0043213738	6	0·0253058653
1 1/4	0·0053950319	6 1/4	0·0263289387
1 1/2	0·0064660422	6 1/2	0·0273496078
1 3/4	0·0075344179	6 3/4	0·0283678837
2	0·0086001718	7	0·0293837777
2 1/4	0·0096633167	7 1/4	0·0303973009
2 1/2	0·0107238654	7 1/2	0·0314084643
2 3/4	0·0117818306	7 3/4	0·0324172788
3	0·0128372247	8	0 0334237555
3 1/4	0·0138900603	8 1/4	0·0344279050
3 1/2	0·0149403498	8 1/2	0·0354297382
3 3/4	0·0159881054	8 3/4	0·0364292656
4	0·0170333393	9	0·0374264979
4 1/4	0·0180760636	9 1/4	0·0384214456
4 1/2	0·0191162904	9 1/2	0·0394141192
4 3/4	0·0201540816	9 3/4	0·0404045289
5	0·0211892991	10	0·0413926852

II.

Tafel für die Logarithmen der wichtigsten Zahlenwerthe von $(1 - p)$.

$P = 100p$	log. $(1 - p)$	$P = 100p$	log. $(1 - p)$
2	0·9912260757—1	4 1/4	0·9811387826—1
2 1/4	0·9901167661—1	4 1/2	0 9800033716—1
2 1/2	0 9890046157—1	4 3/4	0·9788649843 - 1
2 3/4	0·9878896100—1	5	0·9777236053—1
3	0·9867717343—1	5 1/4	0·9765792186—1
3 1/4	0·9856509737—1	5 1/2	0 9754318085 - 1
3 1/2	0·9845273133—1	5 3/4	0·9742813589—1
3 3/4	0·9834007382—1	6	0·9731278536—1
4	0·9822712330—1		

III.

Tafel für die Zahlenwerthe: $(1 + p)^n$

n	$P = 100p = 2\%$	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
1	1·02	1·03	1·04	1·05	1·06
2	1·0404	1·0609	1.0816	1·1025	1·1236
3	1·0612 08	1·0927 27	1·1248 64	1·1576 25	1·1910 16
4	1·0824 3216	1·1255 0881	1·1689 5856	1·2155 0625	1·2624 7696
5	1·1040 8080	1·1592 7407	1·2166 5290	1·2762 8156	1·3382 2558
6	1·1261 6242	1·1940 5230	1·2653 1902	1·3400 9564	1·4185 1911
7	1·1486 8567	1·2298 7387	1·3159 3178	1·4071 0042	1·5036 3026
8	1·1716 5938	1·2667 7008	1·3685 6905	1·4774 5544	1·5938 4807
9	1·1950 9257	1·3047 7318	1·4233 1181	1·5513 2822	1·6894 7896
10	1·2189 9442	1·3439 1638	1·4802 4428	1·6288 9463	1·7908 4770
11	1·2433 7431	1·3842 3387	1·5394 5406	1·7103 3936	1·8982 9856
12	1·2682 4179	1·4257 6089	1·6010 3222	1·7958 5633	2·0121 9647
13	1·2936 0663	1·4685 3371	1·6650 7351	1·8856 4914	2·1329 2826
14	1·3194 7876	1·5125 8972	1·7316 7645	1·9799 3160	2·2609 0396
15	1·3458 6834	1·5579 6742	1·8009 4351	2·0789 2818	2·3965 5819
16	1·3727 8571	1·6047 0644	1·8729 8125	2·1828 7459	2·5403 5168
17	1·4002 4142	1·6528 4763	1·9479 0050	2·2920 1832	2·6927 7279
18	1·4282 4625	1·7024 3306	2·0258 1652	2·4066 1923	2·8543 3915
19	1·4568 1117	1·7535 0605	2·1068 4918	2·5269 5020	3·0255 9950
20	1·4859 4740	1·8061 1123	2·1911 2314	2·6532 9771	3·2071 3547
21	1·5156 6634	1·8602 9457	2·2787 6807	2·7859 6259	3·3995 6360
22	1·5459 7967	1·9161 0341	2·3699 1879	2·9252 6072	3·6035 3742
23	1·5768 9926	1·9735 8651	2·4647 1554	3·0715 2376	3·8197 4966
24	1·6084 3725	2·0327 9411	2·5633 0416	3·2250 9994	4·0489 3464
25	1·6406 0599	2·0937 7793	2·6658 3633	3·3863 5494	4·2918 7072
26	1·6734 1811	2·1565 9127	2·7724 6978	3·5556 7269	4·5493 8296
27	1·7068 8648	2·2212 8901	2·8833 6858	3·7334 5632	4·8223 4594
28	1·7410 2421	2·2879 2768	2·9987 0332	3·9201 2914	5·1116 8670
29	1·7758 4469	2·3565 6551	3·1186 5145	4·1161 3560	5·4183 8790
30	1·8113 6158	2·4272 6247	3·2433 9751	4·3219 4238	5·7434 9117
31	1·8475 8882	2·5000 8035	3·3731 3341	4·5380 3949	6·0881 0064
32	1·8845 4059	2·5750 8276	3·5080 5875	4·7649 4147	6·4533 8668
33	1·9222 3140	2·6523 3524	3·6483 8110	5·0031 8854	6·8405 8988
34	1·9606 7603	2·7319 0530	3·7943 1634	5·2533 4797	7·2510 2528
35	1·9998 8955	2·8138 6245	3·9460 8899	5·5160 1537	7·6860 8679
36	2·0398 8734	2·8982 7833	4·1039 3255	5·7918 1614	8·1472 5200
37	2·0806 8509	2·9852 2668	4·2680 8986	6·0814 0694	8·6360 8712
38	2.1222 9879	3·0747 8348	4·4388 1345	6·3854 7729	9·1542 5235
39	2·1647 4477	3·1670 2698	4·6163 6599	6·7047 5115	9·7035 0749
40	2·2080 3966	3·2620 3779	4·8010 2063	7·0399 8871	10·2857 1794
41	2·2522 0046	3·3598 9893	4·9930 6145	7·3919 8815	10·9028 6101
42	2·2972 4447	3·4606 9589	5·1927 8391	7·7615 8756	11·5570 3267
43	2·3431 8936	3·5645 1677	5·4004 9527	8·1496 6693	12·2504 5463
44	2·3900 5314	3·6714 5227	5·6165 1508	8·5571 5028	12·9854 8191
45	2·4378 5421	3·7815 9584	5·8411 7568	8·9850 0779	13·7646 1083
46	2·4866 1129	3·8950 4372	6·0748 2271	9·4342 5818	14·5904 8748
47	2·5363 4851	4·0118 9503	6·3178 1562	9·9059 7109	15·4659 1673
48	2·5870 7039	4·1322 5188	6·5705 2824	10·4012 6965	16·3938 7173
49	2·6388 1179	4·2562 1944	6·8333 4937	10·9213 3313	17·3775 0403
50	2·6915 8803	4·3839 0602	7·1066 8335	11·4673 9979	18·4201 5427

Termin n	$P=100p=2\%$	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p$
51	2·7454 1979	4·5154 2320	7·3909 5068	12·0407 6978	19·5253
52	2·8003 2819	4·6508 8590	7·6865 8871	12·6428 0826	20·6968
53	2·8563 3475	4·7904 1247	7·9940 5226	13·2749 4868	21·9386
54	2·9134 6144	4·9341 2485	8·3138 1435	13·9386 9611	23·2550
55	2·9717 3067	5·0821 4859	8·6463 6692	14·6356 3092	24·6503
56	3·0311 6529	5·2346 1305	8·9922 2160	15·3674 1246	26·1293
57	3·0917 8859	5·3616 5144	9·3519 1046	16·1357 8309	27·6971
58	3·1536 2436	5·5534 0098	9·7259 8688	16·9425 7224	29·3589
59	3·2166 9685	5·7200 0301	10·1150 2635	17·7897 0085	31·1204
60	3·2810 3079	5·8916 0310	10·5196 2741	18·6791 8589	32·9876
61	3·3466 5140	6·0683 5120	10·9404 1250	19·6131 4519	34·9669
62	3·4135 8443	6·2504 0173	11·3780 2900	20·5938 0245	37·0649
63	3·4818 5612	6·4379 1379	11·8331 5016	21·6234 9257	39·2888
64	3·5514 9324	6·6310 5120	12·3064 7617	22·7046 6720	41·6461
65	3·6225 2311	6·8299 8273	12·7987 3522	23·8399 0056	44·1449
66	3·6949 7357	7·0348 8222	13·3106 8463	25·0318 9559	46·7936
67	3·7688 7304	7·2459 2868	13·8431 1201	26·2834 9037	49·6012
68	3·8442 5050	7·4633 0654	14·3968 3649	27·5976 6488	52·5773
69	3·9211 3551	7·6872 0574	14·9727 0995	28·9775 4813	55·7320
70	3·9995 5822	7·9178 2191	15·5716 1835	30·4264 2554	59·0759
71	4·0795 4939	8·1553 5657	16·1944 8308	31·9477 4681	62·6204
72	4·1611 4038	8·4000 1727	16·8422 6241	33·5451 3415	66·3777
73	4·2448 6318	8·6520 1778	17·5159 5290	35·2223 9086	70·3603
74	4·3292 5045	8·9115 7832	18·2165 9102	36·9835 1040	74·5820
75	4·4158 3546	9·1789 2567	18·9452 5466	38·8326 8592	79·0569
76	4·5041 5216	9·4542 9344	19·7030 6485	40·7743 2022	83·8003
77	4·5942 3521	9·7379 2224	20·4911 8744	42·8130 3623	88·8283
78	4·6861 1991	10·0300 5991	21·3108 3494	44·9536 8804	94·1580
79	4·7798 4231	10·3309 6171	22·1632 6834	47·2013 7244	99·8075
80	4·8754 3916	10·6408 9056	23·0497 9907	49·5614 4107	105·7959
81	4·9729 4794	10·9601 1727	23·9717 9103	52·0395 1312	112·1437
82	5·0724 0690	11·2889 2079	24·9306 6267	54·6414 8878	118·8723
83	5·1738 5504	11·6275 8842	25·9278 8918	57·3735 6322	126·0047
84	5·2773 3214	11·9764 1607	26·9650 0475	60·2422 4138	133·5650
85	5·3828 7878	12·3357 0855	28·0436 0494	63·2543 5344	141·5789
86	5·4905 3636	12·7057 7981	29·1653 4914	66·4170 7112	150·0736
87	5·6003 4708	13·0869 5320	30·3319 6310	69·7379 2467	159·0780
88	5·7123 5402	13·4795 6180	31·5452 4163	73·2248 2091	168·6227
89	5·8266 0110	13·8839 4865	32·8070 5129	76·8860 6195	178·7401
90	5·9431 3313	14·3004 6711	34·1193 3334	80·7303 6505	189·4645
91	6·0619 9579	14·7294 8112	35·4841 0668	84·7668 8330	200·8323
92	6·1832 3570	15·1713 6556	36·9034 7094	89·0052 2747	212·8823
93	6·3069 0042	15·6265 0652	38·3796 0978	93·4554 8884	225·6552
94	6·4330 3843	16·0953 0172	39·9147 9417	98·1282 6328	239·1945
95	6·5616 9920	16·5781 6077	41·5113 8594	103·0346 7645	253·5462
96	6·6929 3318	17·0755 0559	43·1718 4138	108·1864 1027	268·7590
97	6·8267 9184	17·5877 7076	44·8987 1503	113·5957 3078	284·8845
98	6·9633 2768	18·1154 0388	46·6946 6363	119·2755 1732	301·9776
99	7·1025 9423	18·6588 6600	48·5624 5018	125·2392 9319	320·0963
100	7·2446 4612	19·2186 3198	50·5049 4818	131·5012 5785	339·3020

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

Eine der hervorragendsten Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung besteht n, dass man den Werth eines nach einer gewissen Zeit fällig werdenden Capitales, einen bestimmten Zeitpunkt ermittelt. Die Grösse der Summe ist es nicht allein, he hier in Frage kommt, sondern auch die Zeit in welcher dieselbe fällig wird, liesbezüglich von maassgebendem Einflusse. Besitzt Jemand die Anwartschaft n Jahren ein gewisses Capital K zu erhalten, ohne während dieser Zeit auf entfallenden Zinsen Anspruch erheben zu können, so repräsentirt dasselbe offen- im gegenwärtigen Zeitpunkte einen geringeren Werth, und zwar ist derselbe so kleiner, als die Frist von n Jahren, bis zu welcher sich die Fälligkeit er- kt, grösser ist. Wird nun eine Verzinsung des Capitals zu P Percenten voraus- zt, so muss der derzeitige Werth des nach n Jahren fällig werdenden Capitals lerartiger sein, dass bei dessen continuirlicher Verzinsung auf obiger Grundlage, nach n Jahren das volle Capital K ergeben muss. Dieser Werth eines nach n Jahren werdenden Capitales wird discontirter oder baarer Werth genannt.

Der Process, welcher durch die Discontirung eines Capitales vor sich geht, ist umgekehrte desjenigen der Aufzinsung, indem durch den Discont derjenige Be- ermittelt wird, welcher durch Aufzinsung während der gleichen Frist und gleichem Zinsfusse, das in Anwartschaft sich befindliche Capital liefern würde. nun mit K_o das Anlagecapital und mit K_n das während n Jahren mit Zinsen Zinseszinsen aufgezinste Capital bezeichnet, während der Percentsatz mit = $100\,p$ ausgedrückt erscheint, so lautet bekanntlich die entsprechende Auf- ngsformel

$$K_n = K_o\,(1 + p)^n$$

n K_o neben p und n gegeben ist. Da nun durch den umgekehrten Process aus gegebenen Capital K_n mittelst Abzinsung das ursprüngliche K_o ermittelt werden so wird obiger Form entsprechend die Abzinsungsformel folgendermaassen lauten sen:

$$K_o = \frac{K_n}{(1 + p)^n} = K_n\,(1 + p)^{-n}$$

n also K_n neben p und n gegeben ist, und K_o als der zu ermittelnde Factor heint, welcher also den auf Grund von P Percent discontirten Werth eines nach hren fällig werdenden Capitales K_n repräsentirt.

Die auf n Jahre auf Grund eines gewissen Percentsatzes vorgenommene ontirung eines Capitales, ist also nichts anderes, als die Ermittelung eines end der gleichen Dauer und zum selben Zinsfusse aufzuzinsenden Anlagecapitales dessen entsprechenden jeweiligen Endwerthe. Ebensogut, wie man also durch iplication des Anlagecapitales mit dem Coëfficienten $(1 + p)^n$ den aufgezinsten alswerth desselben erhält, so ergibt sich durch Division eines Capitales durch

denselben, oder durch Multiplication mit dessen reciprokem Werthe, das entsprechen Anlagecapital als discontirter Werth des gegebenen.

Laut diesen Auseinandersetzungen werden die Zahlenwerthe von $(1 + p)$ diejenigen des Coëfficienten bilden, mit denen, entsprechend d-m Zinsfusse und Frist, jeweilig das in Anwartschaft sich befindliche Capital multiplicirt werden mu um seinen discontirten Werth zu ergeben. Geschieht die Abzinsung auf Grund ei semestralen Zinsfusses, so ist in derselben Weise vorzugehen, wie dies in der vori Abhandlung bezüglich der Aufzinsung angedeutet wurde, indem die Abzinsungsfr gemäss dem Umstande, dass ein Jahr aus zwei gleichen Semestern besteht, dopp so gross, als bei Grundlage eines jährlichen Zins.usses angenommen wird.

Zum Beispiel: Es soll der gegenwärtige Baarwerth eines na 20 Jahren fällig werdenden Capitales von 25.000 Gulden mittelt werden, und zwar 1. bei ganzjähriger vierpercenti und 2. bei semestraler zweipercentiger Verzinsungs-Grundla

Man erhält daher für den ersten Fall, da $K_n = 25.000$, $n = 20$ $p = \frac{4}{100}$ ist,

$$K_o = 25.000 \times 0{\cdot}45638695 = 11.409{\cdot}67$$

und für den zweiten Fall, da unter der bezüglichen Voraussetzung $n = 40$ $p = \frac{2}{100}$ angenommen werden muss,

$$K'_o = 25.000 \times 0{\cdot}45286777 = 11.321{\cdot}69$$

laut Tabelle IV als Resultat.

Von welcher Tragweite die Ermittelung des Baarwerthes eines nach belie Zeit fällig werdenden Capitales für die Zinseszinsen- und Rentenrechnung ist, weist der Umstand, dass dieselbe bei allen zweckentsprechenden diesbezügli Grundformen in Anwendung kommt. Wird zum Beispiel ein Capital zum Zw eines jährlichen Rentenertrages während einer bestimmten Zeit derart angelegt, nach Ablauf derselben Capital sammt Zinsen zur Aufzehrung gelangen, so ist Grundlage der Berechnung der entsprechenden Jahresrente in der Relation zu such dass die Summe aller vom Zeitpunkte ihres jeweiligen Flüssigwerdens auf einen meinschaftlichen Zeitpunkt discontirten Rentenbeträge gleich sein muss dem Ba werthe des Anlagecapitales im selben Zeitpunkte. In derselben Weise können jegliche das Wesen der Capitalstransaction behandelnde Fragen vom Standpu der Capitals-Discontirung beantwortet werden. Insbesondere ist es die Lebens- Rentenversicherung, welche das Wesen der Baarwerth-Ermittelung eines Capitale einem beliebigen Zeitpunkte ihren Zwecken dienstbar macht und kann man wissermaassen die gesammte Lebensversicherungstechnik als auf dieser Grundl fussend betrachten.

In der nachstehenden Tabelle liefern wir vorläufig die Zahlenwerthe $(1 + p)^{-n}$ für die Zinsfüsse von 2, 3, 4, 5 und 6% bis zu einem Termin 100 Jahren.

IV.

Tafel für die Zahlenwerthe: $(1 + p)^{-n}$

$P = 100p = 2\%$	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
0·9803 9216	0·9708 7379	0·9615 3846	0·9523 8095	0·9433 9623
0·9611 6878	0·9425 9591	0·9245 5621	0·9070 2948	0·8899 9644
0·9423 2233	0·9151 4166	0·8889 9636	0·8638 3760	0·8396 1928
0·9238 4543	0·8884 8705	0·8548 0419	0·8227 0247	0·7920 9366
0·9057 3081	0·8626 0878	0·8219 2711	0·7835 2617	0·7472 5817
0·8879 7138	0·8374 8426	0·7903 1453	0·7462 1540	0·7049 6054
0·8705 6018	0·8130 9151	0·7599 1781	0·7106 8133	0·6650 5711
0·8534 9037	0·7894 0923	0·7306 9021	0·6768 3936	0·6274 1237
0·8367 5527	0·7664 1673	0·7025 8674	0·6446 0892	0·5918 9846
0·8203 4830	0·7440 9391	0·6755 6417	0·6139 1325	0·5583 9478
0·8042 6304	0·7224 2128	0·6495 8093	0·5846 7929	0·5267 8753
0·7884 9318	0·7013 7988	0·6245 9705	0·5568 3742	0·4969 6936
0·7730 3253	0·6809 5134	0·6005 7409	0·5303 2135	0·4688 3902
0·7578 7502	0·6611 1781	0·5774 7508	0·5050 6795	0·4423 0096
0·7430 1473	0·6418 6195	0·5552 6450	0·4810 1710	0·4172 6506
0·7284 4581	0·6231 6694	0·5339 0818	0·4581 1152	0·3936 4628
0·7141 6256	0·6050 1645	0·5133 7325	0·4362 9669	0·3713 6442
0·7001 5937	0·5873 9461	0·4936 2812	0·4155 2065	0·3503 4379
0·6864 3076	0·5702 8603	0·4746 4242	0·3957 3396	0·3305 1301
0·6729 7133	0·5536 7575	0·4563 8695	0·3768 8948	0·3118 0473
0·6597 7582	0·5375 4928	0·4388 3360	0·3589 4236	0·2941 5540
0·6468 3904	0·5218 9250	0·4219 5539	0·3418 4987	0·2775 0510
0·6341 5592	0·5066 9175	0·4057 2633	0·3255 7131	0·2617 9726
0·6217 2149	0·4919 3374	0·3901 2147	0·3100 6791	0·2469 7855
0·6095 3087	0·4776 0557	0·3751 1680	0·2953 6277	0·2329 9863
0·5975 7928	0·4636 9473	0·3606 8923	0·2812 4073	0·2198 1003
0·5858 6204	0·4501 8906	0·3468 1657	0·2678 4832	0·2073 6795
0·5743 7455	0·4370 7675	0·3334 7747	0·2550 9364	0·1956 3014
0·5631 1231	0·4243 4636	0·3206 5141	0·2429 4632	0·1845 5674
0·5520 7089	0·4119 8676	0·3083 1867	0·2313 7745	0·1741 1013
0·5412 4597	0·3999 8715	0·2964 6026	0·2203 5947	0·1642 5484
0·5306 3330	0·3883 3703	0·2850 5794	0·2098 6617	0·1549 5740
0·5202 2873	0·3770 2625	0·2740 9417	0·1998 7254	0·1461 8622
0·5100 2817	0·3660 4490	0·2635 5209	0·1903 5480	0·1379 1153
0·5000 2761	0·3553 8340	0·2534 1547	0·1812 9029	0·1301 0522
0·4902 2315	0·3450 3243	0·2436 6872	0·1726 5741	0·1227 4077
0·4806 1093	0·3349 8294	0·2342 9685	0·1644 3563	0·1157 9318
0·4711 8719	0·3252 2615	0·2252 8543	0·1566 0536	0·1092 3885
0·4619 4822	0·3157 5355	0·2166 2061	0·1491 4797	0·1030 5552
0·4528 9042	0·3065 5684	0·2082 8904	0·1420 4568	0·0972 2219
0·4440 1021	0·2976 2800	0·2002 7793	0·1352 8160	0·0917 1905
0·4353 0413	0·2889 5922	0·1925 7493	0·1288 3962	0·0865 2740
0·4267 6875	0·2805 4294	0·1851 6820	0·1227 0440	0·0816 2962
0·4184 0074	0·2723 7178	0·1780 4635	0·1168 6133	0·0770 0908
0·4101 9680	0·2644 3862	0·1711 9841	0·1112 9651	0·6726 5007
0·4021 5373	0·2567 3653	0·1646 1386	0·1059 9668	0·0685 3781
0·3942 6836	0·2492 5876	0·1582 8256	0·1009 4921	0·0646 5831
0·3865 3761	0·2419 9880	0·1521 9476	0·0961 4211	0·0609 9840
0·3789 5844	0·2349 5029	0·1463 4112	0·0915 6391	0·0575 4566
0·3715 2788	0·2281 0708	0·1407 1262	0·0872 0373	0·0542 8836

Termin n	$P = 100p = 2\%$	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
51	0·3642 4302	0·2214 6318	0·1353 0059	0·0830 5117	0·0512 1544
52	0·3571 0100	0·2150 1280	0·1300 9672	0·0790 9635	0·0483 1645
53	0·3500 9902	0·2087 5029	0·1250 9300	0·0753 2986	0·0455 8156
54	0·3432 3433	0·2026 7019	0·1202 8173	0·0717 4272	0·0430 0147
55	0·3365 0425	0·1967 6717	0·1156 5551	0·0683 2640	0·0405 6742
56	0·3299 0613	0·1910 3609	0·1112 0722	0·0650 7276	0·0382 7115
57	0·3234 3738	0·1854 7193	0·1069 3002	0·0619 7406	0·0361 0486
58	0·3170 9547	0·1800 6984	0·1028 1733	0·0590 2291	0·0340 6119
59	0·3108 7791	0·1748 2508	0·0988 6282	0·0562 1230	0·0321 3320
60	0·3047 8227	0·1697 3309	0·0950 6040	0·0535 3552	0·0303 1434
61	0·2988 0614	0·1647 8941	0·0914 0423	0·0509 8621	0·0285 9843
62	0·2929 4720	0·1599 8972	0·0878 8868	0·0485 5830	0·0269 7965
63	0·2872 0314	0·1553 2982	0·0845 0835	0·0462 4600	0·0254 5250
64	0·2815 7170	0·1508 0565	0·0812 5803	0·0440 4381	0·0240 1179
65	0·2760 5069	0·1464 1325	0·0781 3272	0·0419 4648	0·0226 5264
66	0·2706 3793	0·1421 4879	0·0751 2762	0·0399 4903	0·0213 7041
67	0·2653 3130	0·1380 0853	0·0722 3809	0·0380 4670	0·0201 6077
68	0·2601 2873	0·1339 8887	0·0694 5970	0·0362 3495	0·0190 1959
69	0·2550 2817	0·1300 8628	0·0667 8818	0·0345 0948	0·0179 4301
70	0·2500 2761	0·1262 9736	0·0642 1940	0·0328 6617	0·0169 2737
71	0·2451 2511	0·1226 1880	0·0617 4942	0·0313 0111	0·0159 6921
72	0·2403 1874	0·1190 4737	0·0593 7445	0·0298 1058	0·0150 6530
73	0·2356 0661	0·1155 7998	0·0570 9081	0·0283 9103	0·0142 1254
74	0·2309 8687	0·1122 1357	0·0548 9501	0·0270 3908	0·0134 0806
75	0·2264 5771	0·1089 4521	0·0527 8367	0·0257 5150	0·0126 4911
76	0·2220 1737	0·1057 7205	0·0507 5353	0·0245 2524	0·0119 3313
77	0·2176 6408	0·1026 9131	0·0488 0147	0·0233 5737	0·0112 5767
78	0·2133 9616	0·0997 0030	0·0469 2449	0·0222 4512	0·0106 2044
79	0·2092 1192	0·0967 9641	0·0451 1970	0·0211 8582	0·0100 1928
80	0·2051 0973	0·0939 7710	0·0433 8433	0·0201 7698	0·0094 5215
81	0·2010 8797	0·0912 3990	0·0417 1570	0·0192 1617	0·0089 1713
82	0·1971 4507	0·0885 8243	0·0401 1125	0·0183 0111	0·0084 1238
83	0·1932 7948	0·0860 0236	0·0385 6851	0·0174 2963	0·0079 3621
84	0·1894 8968	0·0834 9743	0·0370 8510	0·0165 9965	0·0074 8699
85	0·1857 7420	0·0810 6547	0·0356 5875	0·0158 0919	0·0070 6320
86	0·1821 3157	0·0787 0434	0·0342 8726	0·0150 5637	0·0066 6340
87	0·1785 6036	0·0764 1198	0·0329 6852	0·0143 3940	0·0062 8622
88	0·1750 5918	0·0741 8639	0·0317 0050	0·0136 5657	0·0059 3040
89	0·1716 2665	0·0720 2562	0·0304 8125	0·0130 0626	0·0055 9472
90	0·1682 6142	0·0699 2779	0·0293 0890	0·0123 8691	0·0052 7803
91	0·1649 6217	0·0678 9105	0·0281 8163	0·0117 9706	0·0049 7928
92	0·1617 2762	0·0659 1364	0·0270 9772	0·0112 3530	0·0046 9743
93	0·1585 5649	0·0639 9383	0·0260 5550	0·0107 0028	0·0044 3154
94	0·1554 4754	0·0621 2993	0·0250 5337	0·0101 9074	0·0041 8070
95	0·1523 9955	0·0603 2032	0·0240 8978	0·0097 0547	0·0039 4405
96	0·1494 1132	0·0585 6342	0·0231 6325	0·0092 4331	0·0037 2081
97	0·1464 8169	0·0568 5769	0·0222 7235	0·0088 0315	0·0035 1019
98	0·1436 0950	0·0552 0164	0·0214 1572	0·0083 8395	0·0033 1150
99	0·1407 9363	0·0535 9383	0·0205 9204	0·0079 8471	0·0031 2406
100	0·1380 3297	0·0520 3284	0·0198 0004	0·0076 0449	0·0029 4723

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

In der vorigen Abhandlung über dieses Thema stellten wir für den Fall, als
Capital zum Zwecke eines jährlichen Rentenertrages während einer bestimmten
derart angelegt wird, dass nach Ablauf derselben, Capital sammt Zinsen zur
zehrung gelangen, folgenden grundlegenden Satz auf: Die Summe aller vom
mente ihres jeweiligen Flüssigwerdens auf einen gemeinschaftlichen Zeitpunkt
ontirten Rentenbeträge muss gleich sein dem Baarwerthe des Anlagecapitales im
en Zeitpunkte. Hierin äussert sich nun das Grundprincip, auf welchem der Auf-
der gesammten Formen der Zinseszins- und Rentenrechnung beruht, und zwar
ferne, als die begriffliche Feststellung der Baarwerthe aller in Betracht kommen-
Capitalsbeträge für ein und denselben Zeitpunkt die leitende Rechnungsgrundlage
elben bildet. Was also diesbezüglich für die Abzinsung gilt, muss auch in Be-
der Aufzinsung entsprechende Anwendung finden, und lässt sich demgemäss obige
tion im beziehungsweisen Sinne modificiren, so dass dieselbe folgendermaassen
Ausdrucke gelangt: Die Summe aller vom jeweiligen Momente ihres Flüssig-
ens auf einen gemeinschaftlichen Zeitpunkt aufgezinsten Rentenbeträge muss
h sein dem auf denselben Zeitpunkt aufgezinsten Werthe des Anlagecapitales.
achtet man daher den jährlichen Rentenbezug von jenem Standpunkte, nach
hem derselbe einen die Capitalstilgung involvirenden Modus bildet, so können
ch die Rentenbeträge als entsprechende jährliche Annuitäten aufgefasst werden,
e sowohl Zinsen als auch Tilgungsquote in sich schliessend, ein Darlehens-
al innerhalb einer bestimmten Frist zu tilgen im Stande sind. Wird also ein
ehenscapital mittelst gleich grosser jährlicher Annuitäten getilgt, so ist damit
elbe gethan, als ob ein Anlagecapital durch jährliche Rentenbezüge aufgezehrt
en wäre. Denken wir uns ein Darlehenscapital als durch n gleiche Annuitäten-
, welche zum Schlusse eines jeden Jahres zu leisten sind, getilgt, so wird die
Schlusse des $n$ten Jahres flüssig werdende, also letzte Annuitätenrate unver-
bleiben, hingegen die $(n-1)$te Annuitätenrate auf ein Jahr, die $(n-2)$te
zwei Jahre, die $(n-3)$te auf drei Jahre u. s. f. und schliesslich die erste auf
$-1)$ Jahr zur Verzinsung gelangen müssen, wenn hiedurch das auf n Jahre
zinste Darlehenscapital aufgebracht werden soll.

Werden daher die in der Tabelle III angeführten Aufzinsungs-Factoren in ent-
chender Weise summirt, indem jedesmal für die letzte unverzinste Annuitäten-
e die Zahl 1 zur Summe hinzugefügt wird, so erhält man in diesen Summen
Aufzinsungs-Factoren aller von Jahr zu Jahr geleisteten Annuitätenraten, für den
ilig entsprechenden Zeitpunkt der erfolgten Tilgung des Darlehenscapitales be-
net, und zwar stimmen dieselben nothwendigerweise mit dem auf die Tilgungs-
r bei gleichem Zinsfusse aufgezinsten Werthe des zwischen Darlehenscapital und
uitätenquote sich ergebenden Quotienten überein. Wie ersichtlich vollzieht sich
Tilgung eines Capitales hier in dem Sinne, dass die Annuitätenraten zum Schlu

eines jeden Jahres geleistet werden, was offenbar dem Modus der nachschussw
Rente entsprechend, auch die gleiche rechnungsmässige Grundlage mit dieser
heischt. Analog diesem Umstande wird auch die Tilgung eines Capitales, falls d
selbe in der Weise vorgesehen ist, dass die Annuitätenraten schon zu Beginn e
jeden Jahres zu leisten sind, dem Modus der vorschussweisen Rente entsprech
in Betreff der Rechnungsgrundlagen eine Gemeinschaftlichkeit mit diesem aufwe
Im vorliegenden Falle wird jedoch die $n$te Annuitätenrate auf ein Jahr, die $(n -$
auf zwei Jahre, die $(n - 2)$te auf drei Jahre u. s. f. und schliesslich die erste
n Jahre zur Aufzinsung gelangen müssen, wenn die Summe der Aufzinsungswe
aller Annuitätenraten dem auf die Tilgungsfrist aufzuzinsenden Werthe des
lehenscapitales entsprechen soll. Demgemäss werden hier die Summen der in Tabell
angeführten Aufzinsungs-Factoren ohneweiters den diesbezüglichen Anforderun
entsprechen, wobei auch hier in beziehungsweisem Sinne der Umstand maassge
ist, dass die Summen der Aufzinsungs-Factoren aller zu leistenden Annuitäten
mit dem auf die Tilgungsdauer bei gleichem Zinsfusse aufgezinsten Werthe
zwischen Darlehenscapital und Annuitätenquote sich ergebenden Quotienten
einstimmen.

Es ist nicht schwer zu entnehmen, dass unter Zugrundelegung einer g
grossen Tilgungsfrist die Aufzinsungs-Factorensummen der zu Beginn der Tilg
jahre zu leistenden Annuitäten grösser sein müssen, als diejenigen der zum Sch
der Jahre zahlbaren. Da nun diese Summen in beiden Fällen den aufgez
Werthen jener Quotienten entsprechen, welche aus der Division des jeweiligen
lehenscapitales durch die beziehungsweise Annuitätenquote resultirt, so müssen
bar unter Beibehaltung gleich grosser Darlehenscapitalien die Annuitätenquot
selben Verhältnisse kleiner sein, als jene Quotienten entsprechend den bezieh
weisen Summen der Aufzinsungs-Factoren grösser werden. Die naturgemässe
davon ist, dass die Annuitäten bei vorschussweiser Leistung kleiner sein müsse
bei nachschussweiser, und zwar entsprechen die Werthe der Ersteren den um
Jahr discontirten Werthen der Letzteren. Die Summe der Aufzinsungs-Factore

$$1)\quad (1 + p) + (1 + p)^2 + (1 + p)^3 + (1 + p)^4, + \ldots + (1 + p$$

$$= \frac{1 + p}{p}\left[(1 + p)^n - 1\right]$$

ist für die vorschussweise Annuitätenleistung anwendbar, wohingegen diejenig
der Beschaffenheit

$$2)\quad 1 + (1 + p) + (1 + p)^2 + (1 + p)^3 + \ldots + (1 + p)^{n-1}$$

$$= \frac{(1 + p)^n - 1}{p}$$

der nachschussweisen Tilgungsform entspricht. Da nun die Form 2) mit Leichti
aus der Form 1) gebildet werden kann, so genügt es, wenn wir vorerst die der erst
Form entsprechenden Summen der Aufzinsungs-Factoren tabellarisch zusamm
stellen, und zwar vorläufig auf Grundlage von 2, 3, 4, 5 und 6 Percent

V.

Tafel für die Zahlenwerthe: $\frac{1+p}{p}\left[(1+p)^n-1\right]$

$P=100p=2\%$	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p=6\%$
1·02	1·03	1·04	1·05	1·06
2·0604	2·0909	2·1216	2·1525	2·1836
3·1216 08	3·1836 27	3·2464 64	3·3101 25	3·3746 16
4·2040 4016	4·3091 3581	4·4163 2256	4·5256 3125	4·6370 9296
5·3081 2096	5·4684 0988	5·6329 7546	5·8019 1281	5·9753 1854
6·4342 8338	6·6624 6218	6·8982 9448	7·1420 0845	7·3938 3765
7·5829 6905	7·8923 3605	8·2142 2626	8·5491 0888	8·8974 6791
8·7546 2843	9·1591 0613	9·5827 9531	10·0265 6432	10·4913 1598
9·9497 2100	10·4638 7931	11·0061 0712	11·5778 9254	12·1807 9494
11·1687 1542	11·8077 9569	12·4863 5141	13·2067 8716	13·9716 4264
12·4120 8973	13·1920 2956	14·0258 0546	14·9171 2652	15·8699 4120
13·6803 3152	14·6177 9045	15·6268 3768	16·7129 8285	17·8821 3767
14·9739 3815	16·0863 2416	17·2919 1119	18·5986 3199	20·0150 6593
16·2934 1692	17·5989 1389	19·0235 8764	20·5785 6359	22·2759 6988
17·6392 8525	19·1568 8130	20·8245 3114	22·6574 9177	24·6725 2808
19·0120 7096	20·7615 8774	22·6975 1239	24·8403 6636	27·2128 7976
20·4123 1238	22·4144 3537	24·6454 1288	27·1323 8467	29·9056 5255
21·8405 5863	24·1168 6844	26·6712 2940	29·5390 0391	32·7599 9170
23·2973 6980	25·8703 7449	28·7780 7858	32·0659 5410	35·7855 9120
24·7833 1719	27·6764 8572	30·9692 0172	34·7192 5181	38·9927 2668
26·2989 8354	29·5367 8030	33·2479 6979	37·5052 1440	42·3922 9028
27·8449 6321	31·4528 8370	35·6178 8858	40·4304 7512	45·9958 2769
29·4218 6247	33·4264 7022	38·0826 0412	43·5019 9887	49·8155 7735
31·0302 9972	35·4592 6432	40·6459 0829	46·7270 9882	53·8645 1200
32·6709 0572	37·5530 4225	43·3117 4462	50·1134 5376	58·1563 8272
34·3443 2383	39·7096 3352	46·0842 1440	53·6691 2645	62·7057 6568
36·0512 1031	41·9309 2252	48·9675 8298	57·4025 8277	67·5281 1162
37·7922 3451	44·2188 5020	51·9662 8630	61·3227 1191	72·6397 9832
39·5680 7921	46·5754 1571	55·0849 3775	65·4388 4750	78·0581 8622
41·3794 4079	49·0026 7818	58·3283 3526	69·7607 8988	83·8016 7739
43·2270 2961	51·5027 5852	61·7014 6867	74·2988 2937	89·8897 7803
45·1115 7020	54·0778 4128	65·2095 2742	79·0637 7084	96·3431 6471
47·0338 0160	56·7301 7652	68·8579 0851	84·0669 5938	103·1837 5460
48·9944 7763	59·4620 8181	72·6522 2486	89·3203 0735	110·4347 7987
50·9943 6719	62·2759 4427	76·5983 1385	94·8363 2272	118·1208 6666
53·0342 5453	65·1742 2259	80·7022 4640	100·6281 3886	126·2681 1866
55·1149 3962	68·1594 4927	84·9703 3626	106·7095 4580	134·9042 0578
57·2372 3841	71·2342 3275	89·4091 4971	113·0950 2309	144·0584 5813
59·4019 8318	74·4012 5973	94·0255 1570	119·7997 7424	153·7619 6562
61·6100 2284	77·6632 9753	98·8265 3633	126·8397 6295	164·0476 8356
63·8622 2330	81·0231 9645	103·8195 9778	134·2317 5110	174·9505 4457
66·1594 6777	84·4838 9234	109·0123 8169	141·9933 3866	186·5075 7724
68·5026 5712	88·0484 0911	114·4128 7696	150·1430 0559	198·7580 3188
70·8927 1027	91·7198 6139	120·0293 9204	158·7001 5587	211·7435 1379
73·3305 6447	95·5014 5723	125·8705 6772	167·6851 6366	225·5081 2462
75·8171 7576	99·3965 0095	131·9453 9043	177·1194 2185	240·0986 1210
78·3535 1927	103·4083 9598	138·2632 0604	187·0253 9294	255·5645 2882
80·9405 8966	107·5406 4785	144·8337 3429	197·4266 6259	271·9584 0055
83·5794 0145	111·7968 6729	151·6670 8366	208·3479 9572	289·3359 0458
86·2709 8948	116·1807 7331	158·7737 6700	219·8153 9550	307·7560 5886

Termin n	$P=100p=2\%$	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=$
51	89·0164 0927	120·6961 9651	166·1647 1768	231·8561 6528	327
52	91·8167 3746	125·3470 8240	173·8513 0639	244·4989 7354	347
53	94·6730 7221	130·1374 9488	181·8453 5865	257·7739 2222	369
54	97·5865 3365	135·0716 1972	190·1591 7299	271·7126 1833	393
55	100 5582 6432	140·1537 6831	198·8055 3991	286·3482 4924	417
56	103·5894 2961	145·3883 8136	207·7977 6151	301·7156 6171	44
57	106·6812 1820	150·7800 3280	217·1496 7197	317·8514 4479	471
58	109·8348 4257	156·3334 3379	226·8756 5885	334·7940 1703	501
59	113·0515 3942	162·0534 3680	236·9906 8520	352·5837 1788	53
60	116·3325 7021	167·9450 3991	247·5103 1261	371·2629 0878	56
61	119·6792 2161	174·0133 9110	258 4507 2511	390·8760 4897	60
62	123·0928 0604	180·2637 9284	269·8287 5412	411·4698 5141	637
63	126·5746 6216	186·7017 0662	281·6619 0428	433·0933 4398	67
64	130 1261 5541	193·3327 5782	293·9683 8045	455·7980 1118	71
65	133·7486 7852	200·1627 4055	306 7671 1567	479·6379 1174	76
66	137·4436 5209	207·1976 2277	320·0778 0030	504·6698 0733	80
67	141·2125 2513	214·4435 5145	333·9209 1231	530·9532 9770	85
68	145·0567 7563	221·9068 5800	348·3177 4880	558·5509 6258	911
69	148·9779 1114	229·5940 6374	363·2904 5876	587·5285 1071	96
70	152·9774 6937	237·5118 8565	378·8620 7711	617 9549 3625	1026
71	157·0570 1875	245·6672 4222	395·0565 6019	649 9026 8306	1088
72	161·2181 5913	254·0672 5949	411·8988 2260	683 4478 1721	1155
73	165·4625 2231	262·7192 7727	429·4147 7550	718·6702 0807	1225
74	169·7917 7276	271 6308 5559	447·6313 6652	755·6537 1848	129
75	174·2076 0821	280·8097 8126	466 5766 2118	794·4864 0440	1379
76	178·7117 6038	290 2640 7469	486·2796 8603	835 2607 2462	1462
77	183·3059 9558	300·0019 9693	506·7708 7347	878·0737 6085	1551
78	187·9921 1549	310·0320 5684	528·0817 0841	923·0274 4889	1645
79	192·7719 5780	320·3630 1855	550·2449 7675	970·2288 2134	1745
80	197·6473 9696	331 0039 0910	573 2947 7582	1019·7902 6240	1851
81	202·6203 4490	341·9640 2638	597·2665 6685	1071·8297 7552	196
82	207·6927 5180	353·2529 4717	622·1972 2952	1126 4712 6430	2082
83	212·8666 0683	364·8805 3558	648·1251 1870	1183 8448 2752	220
84	218·1439 3897	376·8569 5165	675 0901 2345	1244 0870 6889	2341
85	223 5268 1775	389 1926 6020	703·1337 2839	1307·3414 2234	248
86	229·0173 5411	401·8984 4001	732·2990 7753	1373·7584 9345	263
87	234·6177 0119	414·9853 9321	762·6310 4063	1443·4964 1812	279
88	240·3300 5521	428·4649 5500	794·1762 8225	1516·7212 3903	2961
89	246·1566 5632	442·3489 0365	826·9833 3354	1593 6073 0098	3140
90	252·0997 8944	456·6493 7076	861·1026 6688	1674·3376 6603	3329
91	258·1617 8523	471·3788 5189	896·5867 7356	1789·1045 4933	3530
92	264 3450 2094	486·5502 1744	933·4902 4450	1848 1097 7680	374
93	270·6519 2135	502·1767 2397	971·8698 5428	1941 5652 6564	396
94	277·0849 5978	518·2720 2569	1011·7846 4845	2039·6935 2892	420
95	283·6466 5898	534·8501 8645	1058·2960 3439	2142 7282 0537	4461
96	290·3395 9216	551 9256 9205	1096·4678 7577	2250·9146 1564	473
97	297·1663 8400	569·5134 6281	1141 3665 9080	2364·5103 4642	501
98	304·1297 1168	587·6288 6669	1188·0612 5443	2483·7858 6374	5317
99	311·2323 0591	606·2877 3270	1236·6237 0461	2609·0251 5693	563
100	318·4769 5203	625·5063 6468	1287·1286 5279	2740 5264 1477	597

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

ie letzte Tabelle, welche die Summen der Aufzinsungsfactoren für jene An-
iquoten darstellt, deren Leistung zum Zwecke der Darlehenstilgung und Ver-
im vorschussweisen Sinne vor sich geht, liefert nun die Handhabe, auch die
n diesbezüglichen Grundformen der Zinseszins- und Rentenrechnung der
ischen Anwendung zu unterordnen. Zur Grundlage der Tabelle V wurden
lich Jahresintervalle bei der Annuitätenleistung in Betracht gezogen, deren
zugleich mit dem Zeitpunkte der Darlehensgewährung als übereinstimmend
esetzt worden war. Nun sind aber einerseits Fälle möglich, wo die Intervalle
hen die Annuitätenleistung vor sich geht, mehrere Jahre betragen können,
seits aber auch der Beginn derselben ein unterschiedlicher sein kann von
gen Zeitpunkte, in welchem das Darlehen gewährt wurde, so dass der Beginn
uitätenleistung auf einen späteren Zeitpunkt verschoben erscheint. Unter
Umständen muss naturgemäss auch derjenige Modus, nach welchem die
rung der Aufzinsungsfactoren bisher vor sich ging eine entsprechende Aende-
fahren. Währenddem bei gewöhnlicher vom Zeitpunkte der Darlehensgewährung
nder jährlicher Annuitätenleistung, die Summirung der in Tabelle III ent-
n Aufzinsungsfactoren im continuirlichem Sinne erfolgt, so dass dies-
ch dem Wachsthum der Aufzinsungsfrist der einzelnen Annuitätenquoten von
Jahr vollends Genüge geleistet wird, muss bei Intervallen von je 2, 3, 4
Jahren eine entsprechend sich wiederholende Unterbrechung in der Reihen-
er Summanden stattfinden, damit den diesbezüglichen Anforderungen Rech-
etragen werde. Dadurch nämlich, dass die zwischen den einzelnen Intervallen
en Aufzinsungsfactoren in der Rechnung ausser Acht gelassen werden, gelangen
Aufzinsungsfactoren derjenigen Annuitäten zur Geltung, welche nach der
en Anzahl der in der entsprechenden Tilgungsfrist enthaltenen Intervalle zu
sind. Bei vorschussweiser Annuitätenleistung in Intervallen von je a Jahren,
daher als Summanden die Aufzinsungsfactoren für a, $2a$, $3a$ .... ma Jahre
acht kommen, wobei $ma = n$ die entsprechende Tilgungsdauer repräsentirt.
och mehr einschneidende Maassnahme erfordert jedoch die Verschiebung der
itenleistung, insoferne dieselbe auf eine längere Dauer als diejenige eines
lles vollzogen wird. Die Relation, nach welcher die Summen der Aufzinsungs-
aller zu leistenden Annuitätenraten mit dem auf die Tilgungsdauer bei
n Zinsfusse aufgezinsten Werthe des zwischen Darlehenscapital und Annui-
ote sich ergebenden Quotienten übereinstimmen, kommt hier im modificirten
ur Geltung, indem der Zeitpunkt der beginnenden Annuitätenleistung da-
naassgebend wird. Es wird hier nämlich nicht nur die Tilgungsdauer, sondern
e Darlehensfrist in Frage kommen und demgemäss jene Relation lauten:
nmen der Aufzinsungsfactoren aller während der jeweiligen Tilgungsfrist zu
en Annuitätenraten stimmen mit dem auf die Dauer der Annuitätenleistung
sten Werthe desjenigen Quotienten überein, welcher sich aus dem Verhält-

nisse zwischen dem, vom Zeitpunkte der Darlehensgewährung bis zum Beginne der Annuitätenleistung aufgezinsten Werthe des Darlehenscapitales und der Annuitätenquote ergibt. Eine derartige Verschiebung, jedoch blos um die Dauer eines einzigen Intervalles, ist der Modus der nachschussweisen Annuitätenleistung, welche in dem Principe zum Ausdrucke gelangt, dass die Annuitäten anstatt zu Beginn, zum Schlusse der jeweiligen Intervalle entrichtet werden. In Folge dessen wird der Aufzinsungsfactor der letzten Annuitätenrate durch die Zahl 1 zum Ausdrucke gelangen, weil mit der Leistung derselben, der Vollzug der Darlehenstilgung als beendet anzusehen ist und daher eine weitere Verzinsung ausser Betracht kommt. Bei nachschussweiser Annuitätenleistung in Intervallen von je a Jahren müssen daher als Summanden die Aufzinsungsfactoren für 0, a, $2a$, $3a$ . . . $(m-1)a$ Jahre in Betracht kommen, wobei $ma = n$ die entsprechende Tilgungsdauer darstellt. Auf diese Art werden für nachschussweise Annuitätenleistung die Summen der Aufzinsungsfactoren eine entsprechende Modification aufweisen, indem an die Stelle des Aufzinsungsfactors für ma Jahre, welcher bei vorschussweiser Annuitätenleistung in Rechnung kommt, im Falle einer solchen im nachschussweisen Sinne, derjenige für 0 Jahre tritt. Währenddem also die Tabelle V einer in Jahresintervallen sich vollziehenden Annuitätenleistung im vorschussweisen Sinne entspricht, indem dieselbe aus der Tabelle III durch eine continuirlich durchgeführte Summirung der daselbst vorhandenen Aufzinsungsfactoren entstanden ist, und bei Einführung mehrjähriger Intervalle eine Aenderung in der Weise erfahren würde, dass diese Continuität, einer in der Reihenfolge regelmässig sich wiederholenden Unterbrechung in Betreff der Rücksichtnahme der einzelnen Aufzinsungsfactoren weichen müsste, erfordert die nachschussweise Annuitätenleistung für sich eine der Modification ihrer Summanden und deren verschobenen Reihenfolge entsprechende, besondere Anwendung der Tabelle III bezüglich ihrer tabellarischen Zusammenstellung. Aber auch hier ist unter Zugrundelegung mehrjähriger Intervalle eine entsprechende Unterbrechung in der Reihenfolge der zu berücksichtigenden Summanden bedingt, jedoch in einem mit der nachschussweisen Annuitätenleistung correspondirenden Sinne. Diesen Auseinandersetzungen zufolge lassen sich also jegliche für die Zinzeszinsen- und Rentenrechnung zur Anwendung gelangenden elementaren Grundformen, mögen dieselben nun für längere oder kürzere Intervalle bezüglich der Annuitätenleistung gelten oder der Zeitpunkt des Beginnes einer solchen in welcher Art immer von demjenigen der Darlehensgewährung differiren, der tabellarischen Zusammenstellung durch Benützung der Tabelle III unterordnen. Rücksichtlich der vor- oder nachschussweisen Leistung der Annuitäten bei längeren als einjährigen Intervallen sind die oben angeführten Normen besonders zu beachten, weil jene Differenz, welche zwischen diesen Beiden besteht, in der beziehungsweisen Reihenfolge der Aufzinsungsfactoren zu suchen ist, u. zw. insoferne, als die Aufzinsungsfactoren bei nachschussweiser Annuitätenleistung dem auf die Dauer des beziehungsweisen Intervalles discontirten Werthe derjenigen gleich sind, welche bei einer Leistung im vorschussweisen Sinne zur Geltung kommen. Der Anforderung für eine in Jahresintervallen sich vollziehende nachschussweise Annuitätenleistung, die entsprechenden Aufzinsungsfactorensummen zu schaffen, wird mittelst nachstehender Tabelle entsprochen, und zwar vorläufig auf Grundlage von 2, 3, 4, 5 und 6 Percent.

VI.

Tafel für die Zahlenwerthe: $\frac{1}{p}\left[(1+p)^n - 1\right]$

n	$P = 100p = 2\%$	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
1	1	1	1	1	1
2	2·02	2·03	2·04	2·05	2·06
3	3·0604	3·0909	3·1216	3·1525	3·1836
4	4·1216 08	4·1836 27	4·2464 64	4·3101 25	4·3746 16
5	5·2040 4016	5·3091 3581	5·4163 2256	5·5256 3125	5·6370 9296
6	6·3081 2096	6·4684 0988	6·6329 7546	6·8019 1281	6·9753 1854
7	7·4342 8338	7·6624 6218	7·8982 9448	8·1420 0845	8·3938 3765
8	8·5829 6905	8·8923 3605	9·2142 2626	9·5491 0888	9·8974 6791
9	9·7546 2843	10·1591 0613	10·5827 9531	11·0265 6432	11·4913 1598
10	10·9497 2100	11·4638 7931	12·0061 0712	12 5778 9254	13·1807 9494
11	12·1687 1542	12·8077 9569	13·4863 5141	14·2067 8716	14·9716 4264
12	13·4120 8973	14·1920 2956	15·0258 0546	15·9171 2652	16·8699 4120
13	14·6803 3152	15·6177 9045	16·6268 3768	17·7129 8285	18·8821 3767
14	15·9739 3815	17·0863 2416	18·2919 1119	19·5986 3199	21·0150 6593
15	17·2934 1692	18·5989 1389	20·0235 8764	21·5785 6359	23·2759 6988
16	18·6392 8525	20·1568 8130	21·8245 3114	23·6574 9177	25·6725 2808
17	20·0120 7096	21·7615 8774	23·6975 1239	25·8403 6636	28·2128 7976
18	21·4123 1238	23·4144 3537	25 6454 1288	28·1323 8467	30·9056 5255
19	22·8405 5863	25·1168 6844	27·6712 2940	30·5390 0391	33·7599 9170
20	24 2973 6980	26·8703 7449	29 7780 7858	33·0659 5410	36 7855 9120
21	25·7833 1719	28·6764 8572	31·9692 0172	35·7192 5181	39·9927 2668
22	27·2989 8354	30·5367 8030	34·2479 6979	38·5052 1440	43·3922 9028
23	28·8449 6321	32·4528 8370	36·6178 8858	41·4304 7512	46·9958 2769
24	30 4218 6247	34·4264 7022	39·0826 0412	44 5019 9887	50·8155 7735
25	32·0302 9972	36·4592 6432	41 6459 0829	47·7270 9882	54·8645 1200
26	33·6709 0572	38·5530 4225	44·3117 4462	51·1134 5376	59·1563 8272
27	35·3443 2383	40·7096 3352	47·0842 1440	54 6691 2645	63·7057 6568
28	37·0512 1031	42·9309 2252	49·9675 8298	58·4025 8277	68·5281 1162
29	38·7922 3451	45·2188 5020	52·9662 8630	62·3227 1191	73·6397 9832
30	40·5680 7921	47·5754 1571	56·0849 3775	66·4388 4750	79·0581 8622
31	42·3794 4079	50·0026 7818	59·3283 3526	70·7607 8988	84·8016 7739
32	44·2270 2961	52·5027 5852	62·7014 6867	75·2988 2937	90·8897 7803
33	46·1115 7020	55·0778 4128	66·2095 2742	80·0637 7084	97·3431 6471
34	48·0338 0160	57·7301 7652	69·8579 0851	85·0669 5938	104·1837 5460
35	49·9944 7763	60·4620 8181	73·6522 2486	90·3203 0735	111·4347 7987
36	51·9943 6719	63·2759 4427	77·5983 1385	95·8363 2272	119·1208 6666
37	54·0342 5453	66·1742 2259	81·7022 4640	101·6281 3886	127·2681 1866
38	56·1149 3962	69·1594 4927	85·9703 3626	107·7095 4580	135·9042 0578
39	58·2372 3841	72·2342 3275	90·4091 4971	114·0950 2309	145·0584 5813
40	60·4019 8318	75·4012 5973	95·0255 1570	120·7997 7424	154·7619 6562
41	62·6100 2284	78·6632 9753	99·8265 3633	127·8397 6295	165·0476 8356
42	64·8622 2330	82·0231 9645	104·8195 9778	135·2317 5110	175·9505 4457
43	67·1594 6777	85·4838 9234	110·0123 8169	142·9933 3866	187·5075 7724
44	69·5026 5712	89·0484 0911	115·4128 7696	151·1430 0559	199·7580 3188
45	71·8927 1027	92·7198 6139	121·0293 9204	159·7001 5587	212 7435 1379
46	74·3305 6447	96·5014 5723	126 8705 6772	168·6851 6366	226·5081 2462
47	76·8171 7576	100·3965 0095	132·9453 9043	178·1194 2185	241·0986 1210
48	79·3535 1927	104·4083 9598	139·2632 0604	188·0253 9294	256·5645 2882
49	81·9405 8966	108·5406 4785	145·8337 3429	198·4266 6259	272·9584 0055
50	84·5794 0145	112·7968 6729	152·6670 8366	209·3479 9572	290·3359 0458

Termin n	$P=100p=2\%$	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p=6\%$
51	87·2709 8948	117·1807 7331	159·7737 6700	220·8153 9550	308·7560 5886
52	90·0164 0927	121·6961 9651	167·1647 1768	232·8561 6528	328·2814 2239
53	92·8167 3746	126·3470 8240	174·8513 0639	245·4989 7354	348·9783 0773
54	95·6730 7221	131·1374 9488	182·8453 5865	258·7739 2222	370 9170 0620
55	98·5865 3365	136·0716 1972	191·1591 7299	272 7126 1833	394·1720 2657
56	101·5582 6432	141·1537 6831	199·8055 3991	287·3482 4924	418·8223 4816
57	104·5894 2961	146·3883 8136	208·7977 6151	302·7156 6171	444 9516 8905
58	107·6812 1820	151·7800 3280	218·1496 7197	318·8514 4479	472 6487 9040
59	110·8348 4257	157·3334 3379	227·8756 5885	335·7940 1703	502·0077 1782
60	114·0515 3942	163·0534 3680	237·9906 8520	353·5837 1788	533·1281 8089
61	117·3325 7021	168·9450 3991	248·5103 1261	372·2629 0378	566·1158 7174
62	120·6792 2161	175·0133 9110	259·4507 2511	391·8760 4897	601·0828 2405
63	124·0928 0604	181 2637 9284	270·8287 5412	412·4698 5141	638·1477 9349
64	127·5746 6216	187·7017 0662	282·6619 0428	434·0933 4398	677·4366 6110
65	131·1261 5541	194·3327 5782	294·9683 8045	456·7980 1118	719·0828 6076
66	134·7486 7852	201·1627 4055	307 7671 1567	480·6379 1174	763·2278 3241
67	138·4436 5209	208·1976 2277	321·0778 0030	505·6698 0733	810·0215 0236
68	142·2125 2513	215·4435 5145	334·9209 1231	531·9532 9770	859·6227 9250
69	146·0567 7563	222·9068 5800	349·3177 4880	559·5509 6258	912·2001 6006
70	149·9779 1114	230·5940 6374	364·2904 5876	588·5285 1071	967 9321 6965
71	153·9774 6937	238·5118 8565	379·8620 7711	618·9549 3625	1027·0080 9983
72	158·0570 1875	246·6672 4222	396·0565 6019	650 9026 8306	1089 6285 8582
73	162·2181 5913	255·0672 5949	412·8988 2260	684·4478 1721	1156·0063 0097
74	166·4625 2231	263·7192 7727	430·4147 7550	719·6702 0807	1226·3666 7903
75	170·7917 7276	272 6308 5559	448·6313 6652	756·6537 1848	1300·9486 7977
76	175·2076 0821	281·8097 8126	467·5766 2118	795·4864 0440	1380·0056 0055
77	179·7117 6038	291 2640 7469	487·2796 8603	836 2607 2462	1463·8059 3659
78	184·3059 9558	301·0019 9693	507·7708 7347	879·0737 6085	1552 6342 9278
79	188·9921 1549	311·0320 5684	529·0817 0841	924·0274 4889	1646 7923 5035
80	193·7719 5780	321·3630 1855	551·2449 7675	971·2288 2134	1746·5998 9137
81	198·6473 9696	332 0039 0910	574·2947 7582	1020·7902 6240	1852·3958 8485
82	203 6203 4490	342·9640 2638	598·2665 6685	1072·8297 7552	1964·5396 3794
83	208·6927 5180	354·2529 4717	623·1972 2952	1127·4712 6430	2083·4120 1622
84	213·8666 0683	365·8805 3558	649·1251 1870	1184·8448 2752	2209 4167 3719
85	219·1439 3897	377·8569 5165	676·0901 2345	1245·0870 6889	2342·9817 4142
86	224·5268 1775	390·1926 6020	704·1337 2839	1308·3414 2234	2484·5606 4591
87	230·0173 5411	402·8984 4001	733·2990 7753	1374·7584 9345	2634·6342 8466
88	235·6177 0119	415·9853 9321	763·6310 4063	1444·4964 1812	2793 7123 4174
89	241·3300 5521	429·4649 5500	795·1762 8225	1517·7212 3903	2962·3350 8225
90	247·1566 5632	443·3489 0365	827·9833 3354	1594 6073 0098	3141·0751 8718
91	253·0997 8944	457·6493 7076	862·1026 6688	1675·3376 6603	3330·5396 9841
92	259·1617 8523	472·3788 5189	897·5867 7356	1760·1045 4933	3531·3720 8032
93	265 3450 2094	487·5502 1744	934·4902 4450	1849·1097 7680	3744·2544 0514
94	271·6519 2135	503·1767 2397	972 8698 5428	1942·5652 6564	3969·9096 6944
95	278·0849 5978	519·2720 2569	1012·7846 4845	2040·6935 2892	4209·1042 4961
96	284·6466 5898	535·8501 8645	1054·2960 3439	2143 7282 0537	4462 6505 0459
97	291·3395 9216	552 9256 9205	1097·4678 7577	2251·9146 1564	4731·4095 3486
98	298·1663 8400	570·5134 6281	1142·3665 9080	2365·5103 4642	5016·2941 0696
99	305·1297 1168	588·6288 6669	1189·0612 5443	2484·7858 6374	5318·2717 5337
100	312·2323 0591	607·2877 3270	1237·6237 0461	2610·0251 5693	5638·3680 5857

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

ine besonders wichtige Frage auf dem Gebiete des Finanzwesens ist diejenige rität zweier oder mehrerer Course. Bei Darlehensabschlüssen von grossem e ist bekanntlich ausser dem zu stipulirenden Zinsfusse und der Tilgungs-ch die Höhe des Uebernahmscourses maassgebend, welcher gewissermaassen ssstab der Securität desselben gelten kann. Je grösser das Vertrauen zum nswerber, desto leichter wird es dem vermittelnden Finanzinstitute gelingen, sten für ein Darlehen zu gewinnen und desto besser werden daher auch die ngen sein, unter welchen dasselbe an den Mann gebracht werden kann. ge Darlehen werden gewöhnlich auf Grund anticipativer semestraler Ver- abgeschlossen und ist daher der Uebernahmscours schon von vornherein um maligen semestralen Zinsen gekürzt anzunehmen. Der weitere Betrag, um der Nominalwerth des Darlehens vom Uebernahmscourse differirt, ist die welche der Capitalist für das zu übernehmende Risico in Anspruch nimmt. mittelnde Finanzinstitut ist nun vermöge seiner Capitalskraft und Leistungs-it in der Lage, sich mit dem Capitalisten in Betreff dieser Prämie derart len, dass es für die geleistete Vermittlung eine entsprechende Provision zu vermag.

ei Staats- und grossen Prioritätsdarlehen wird im Allgemeinen, falls bereits des Darlehenswerbers im Umlaufe sind, deren jeweiliger Börsencours zur ge des Uebernahmscourses für neue Darlehen angenommen. Das vermittelnde muss jedoch unter allen Umständen trachten, einen günstigen Moment für ebung eines solchen Darlehens wahrzunehmen, um soviel als möglich von der arlehensabschlusse fixirten Prämie für sich als Provision zu erübrigen. Es ist Abschlusse solcher Finanzgeschäfte die Nothwendigkeit vorhanden, mit den issen des Geldmarktes zu rechnen und muss daher der Financier bei Fest- des Uebernahmscourses alle diejenigen Factoren in Betracht ziehen, welche ilige Coursschwankungen im Gefolge haben könnten. Aber auch in Betreff sfusses und der Tilgungsfrist ist es nothwendig, das richtige Verhältniss ufinden, welches den jeweiligen Anforderungen der Capitalsanlage zu ent- geeignet ist. Mit der Länge der Tilgungsfrist wächst auch die Verbind- des Capitalisten, das übernommene Risico zu tragen. Und was den Zinsfuss gt, so ist es selbstverständlich, dass mit der Höhe desselben auch die Bedin- der Begebung eines Darlehens günstigere werden und infolge dessen ein Uebernahmscours gewährt werden kann. Jenes Verhältniss der Uebernahms- welches sich bei verschiedenen Zinsfüssen und Tilgungsfristen als gleich- Darlehensbedingung ergibt, nennt man Parität. Es können nämlich zwei hmscourse C und C' derartige sein, dass es gleichgiltig ist, ob man mittelst n ein Anlehen mit $P = 100\,p$ Percent verzinslich auf eine Dauer von n, oder mittelst des anderen auf Grund eines $Q = 100\,q$ percentigen Zins- uf die Dauer von m Jahren contrahirt. In diesem Falle findet zwischen den C und C' die Parität statt. Zum Beispiel:

A macht das Anbot, bei einem Uebernahmscourse v
und einer 4%igen Verzinsung eine Tilgungsfrist von 30 J
zu gewähren. Welches ist die Parität für den Uebern
cours bei 5%iger Verzinsung und 40jähriger Tilgungsfris

In der Abhandlung: Fragmente finanzieller Disciplinen I. finden wir ge
Form 4) diejenige von der Beschaffenheit

$$C' : C = \frac{v^n - 1}{v^n (v - 1)} : \frac{u^m - 1}{u^m (u - 1)}.$$

worin $v = 1 + p$ und $u = 1 + q$ bedeutet. Substituirt man u
Werthe in dieselbe, u. zw.:

$$P = 100\,p = 4, \quad n = 30 \quad \text{und} \quad C = 94$$

ferner $Q = 100\,q = 5 \quad m = 40 \qquad C' = ?$ so ergibt

$$C' : 94 = 17{\cdot}29203330 : 17{\cdot}15908635,$$

folglich bildet der Uebernahmscours $C' = 94{\cdot}7283$ die Parität.

Sind daher die Zahlenwerthe für die Form

$$\frac{(1 + p)^n - 1}{(1 + p)^n \cdot p}$$

tabellarisch für verschiedene Zinsfüsse und Tilgungsfristen zusammengestell
es nicht schwer, die jeweiligen Paritäten zu einem gegebenen Uebernahmsc
bestimmen. Die Uebernahmscourse, deren Parität bestimmt werden soll, v
sich nämlich zu einander im umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden
werthe obiger Form. Oder mit anderen Worten: Unter Voraussetzung de
sind alle Producte der Zahlenwerthe obiger Form und der entsprechende
nahmscourse einander gleich. Infolge dieses Umstandes bildet eine derartige
auch die Handhabe zur Beurtheilung mehrerer verschiedener Anbote, welc
nur in Betreff ihrer Uebernahmscourse, sondern auch vermöge ihrer Tilg
und Verzinsungsgrundlage unter einander differiren.

Ermittelt man nämlich unter Zugrundelegung des Uebernahmscourses
gemachten Anbote die Parität aller Anderen mit Bezug auf denselben, u
bei Berücksichtigung der jeweiligen Tilgungsfristen und Verzinsungsgrundl
ist derjenige der angebotenen Uebernahmscourse, welcher die seinem sonsti
bote entsprechende Parität mit dem zugrundegelegten Course am meisten ü
für den Darlehensnehmer der günstigste.

Zum Beispiel: Welches ist von nachfolgenden Anboten das günstigste

I.	$C = 90$	$n = 40$	$P = 4\%$
II.	$C' = 97$	$n = 50$	$P = 5\%$
III.	$C'' = 96$	$n = 35$	$P = 4\%$

Die Paritäten sind $C = 90$, $C' = 97{\cdot}576$, $C'' = 95{\cdot}440$
folglich ist C'' für den Darlehensnehmer das günstigste Anbot.

Nachstehende Tabelle liefert vorläufig die Zahlenwerthe von

$$\frac{(1 + p)^n - 1}{(1 + p)^n \cdot p}$$

für die Zinsfusse von 2, 3, 4, 5 und 6% bis zu einem Termin von 100 Ja

VII.

Tafel für die Zahlenwerthe: $\frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^n}$

$P = 100p = 2\%$	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
0·9803 9216	0·9708 7379	0·9615 3846	0·9523 8095	0·9433 9623
1·9415 6094	1·9134 6970	1·8860 9467	1·8594 1043	1·8333 9267
2·8838 8327	2·8286 1135	2·7750 9103	2·7232 4803	2·6730 1195
3·8077 2870	3·7170 9840	3·6298 9522	3·5459 5050	3·4651 0561
4·7134 5951	4·5797 0719	4·4518 2233	4·3294 7667	4·2123 6379
5·6014 3089	5·4171 9144	5·2421 3686	5·0756 9207	4·9173 2433
6·4719 9107	6·2302 8296	6·0020 5467	5·7863 7340	5·5823 8144
7·3254 8144	7·0196 9219	6·7327 4487	6·4632 1276	6·2097 9381
8·1622 3671	7·7861 0892	7·4353 3161	7·1078 2168	6·8016 9227
8·9825 8501	8·5302 0284	8·1108 9578	7.7217 3493	7·3600 8705
9·7868 4805	9·2526 2411	8·7604 7671	8·3064 1422	7·8868 7458
10·5753 4122	9·9540 0399	9·3850 7376	8·8632 5164	8·3838 4394
11·3483 7375	10·6349 5533	9·9856 4785	9·3935 7299	8·8526 8296
12·1062 4877	11·2960 7314	10·5631 2293	9·8986 4094	9·2949 8393
12·8492 6350	11·9379 3509	11·1183 8743	10·3796 5804	9·7122 4899
13·5777 0931	12·5611 0203	11·6522 9561	10·8377 6956	10·1058 9527
14·2918 7188	13·1661 1847	12·1656 6885	11·2740 6625	10·4772 5969
14·9920 3125	13·7535 1308	12·6592 9697	11·6895 8690	10·8276 0348
15·6784 6201	14·3237 9911	13·1339 3980	12·0853 2086	11·1581 1649
16·3514 3334	14·8774 7486	13·5903 2634	12·4622 1034	11·4699 2122
17·0112 0916	15·4150 2414	14·0291 5995	12·8211 5271	11·7640 7662
17·6580 4820	15·9369 1664	14·4511 1533	13·1630 0258	12·0415 8172
18·2922 0412	16·4436 0839	14·8568 4167	13·4885 7388	12·3033 7898
18·9139 2560	16·9355 4212	15·2469 6314	13·7986 4179	12·5503 5753
19·5234 5647	17·4131 4769	15·6220 7994	14·0939 4457	12·7833 5616
20·1210 3576	17·8768 4242	15·9827 6918	14·3751 4530	13·0031 6619
20·7068 9780	18·3270 3147	16·3295 8575	14·6430 3362	13·2105 3414
21·2812 7236	18·7641 0823	16·6630 6322	14·8981 2726	13·4061 6428
21·8443 8466	19·1884 5459	16·9837 1463	15·1410 7358	13·5907 2102
22·3964 5555	19·6004 4135	17·2920 3330	15·3724 5103	13·7648 3115
22·9377 0152	20·0004 2849	17·5884 9356	15·5928 1050	13·9290 8599
23·4683 3482	20·3887 6553	17·8735 5150	15·8026 7667	14·0840 4339
23·9885 6355	20·7657 9178	18·1476 4567	16·0025 4921	14·2302 2961
24·4985 9172	21·1318 3668	18·4111 9776	16·1929 0401	14·3681 4114
24·9986 1933	21·4872 2007	18·6646 1323	16·3741 9429	14·4982 4636
25·4888 4248	21·8322 5250	18·9082 8195	16·5468 5171	14·6209 8713
25·9694 5341	22·1672 3544	19·1425 7880	16·7112 8734	14·7367 8031
26·4406 4060	22·4924 6159	19·3678 6423	16·8678 9271	14·8460 1916
26·9025 8883	22·8082 1513	19·5844 8484	17·0170 4067	14·9490 7468
27·3554 7924	23·1147 7197	19·7927 7388	17·1590 8635	15·0462 9687
27·7994 8945	23·4123 9997	19·9930 5181	17·2943 6796	15·1380 1592
28·2347 9358	23·7013 5920	20·1856 2674	17·4232 0758	15·2245 4332
28·6615 6233	23.9819 0213	20·3707 9494	17·5459 1198	15·3061 7294
29·0799 6307	24·2542 7392	20·5488 4129	17·6627 7331	15·3831 8202
29·4901 5987	24·5187 1254	20·7200 3970	17·7740 6982	15·4558 3209
29·8923 1360	24·7754 4907	20·8846 5356	17·8800 6650	15·5243 6990
30·2865 8196	25·0247 0783	21·0429 3612	17·9810 1571	15·5890 2821
30·6731 1957	25·2667 0664	21·1951 3088	18·0771 5782	15·6500 2661
31·0520 7801	25·5016 5693	21·3414 7200	18·1687 2173	15·7075 7227
31·4236 0589	25·7297 6401	21·4821 8462	18·2559 2546	15·7618 6064

Termin n	$P=100p=2\%$	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p=$
51	31·7878 4892	25·9512 2719	21·6174 8521	18·3389 7663	15·8130
52	32·1449 4992	26·1662 3999	21·7475 8193	18·4180 7298	15·8613
53	32·4950 4894	26 3749 9028	21 8726 7493	18·4934 0284	15·9069
54	32·8382 8327	26·5776 6047	21·9929 5667	18·5651 4556	15 9499
55	33 1747 8752	26·7744 2764	22·1086 1218	18·6334 7196	15·9905
56	33 5046 9365	26·9654 6373	22·2198 1940	18 6985 4473	16 0288
57	33·8281 3103	27·1509 3566	22·3267 4943	18·7605 1879	16·0649
58	34 1452 2650	27·3310 0549	22·4295 6676	18·8195 4170	16·0989
59	34·4561 0441	27·5058 3058	22·5284 2957	18 8757 5400	16·1311
60	34·7608 8668	27·6755 6367	22·6234 8997	18·9292 8953	16·1614
61	35 0596 9282	27·8403 5307	22·7148 9421	18·9802 7574	16·1900
62	35·3526 4002	28·0003 4279	22·8027 8289	19·0288 3404	16 2170
63	35 6398 4316	28·1556 7261	22·8872 9124	19 0750 8003	16 2424
64	35·9214 1486	28 3064 7826	22·9685 4927	19·1191 2384	16 2664
65	36·1974 6555	28·4528 9152	23 0466 8199	19·1610 7033	16·2891
66	36·4681 0348	28·5950 4031	23·1218 0961	19 2010 1936	16·3104
67	36·7334 3478	28·7330 4884	23 1940 4770	19 2390 6606	16·3306
68	36·9935 6351	28·8670 3771	23 2635 0740	19·2753 0101	16·3496
69	37 2485 9168	28·9971 2399	23·3302 9558	19·3098 1048	16·3676
70	37·4986 1929	29·1234 2135	23·3945 1498	19·3426 7665	16·3845
71	37·7437 4441	29·2460 4015	23 4562 6440	19·3739 7776	16·4005
72	37·9840 6314	29·3650 8752	23·5156 3885	19·4037 8834	16·4155
73	38·2196 6975	29·4806 6750	23·5727 2966	19·4321 7937	16 4297
74	38·4506 5662	29·5928 8107	23·6276 2468	19 4592 1845	16·4431
75	38·6771 1433	29·7018 2628	23·6804 0834	19·4849 6995	16·4558
76	38·8991 3170	29·8075 9833	23·7311 6187	19·5094 9519	16·4677
77	39 1167 9578	29·9102 8964	23 7799 6333	19·5328 5257	16·4790
78	39·3301 9194	30 0099 8994	23·8268 8782	19 5550 9768	16·4896
79	39·5394 0386	30·1067 8635	23·8720 0752	19·5762 8351	16·4996
80	39·7445 1359	30·2007 6345	23·9153 9185	19·5964 6048	16·5091
81	39 9456 0156	30·2920 0335	23 9571 0754	19 6156 7665	16·5180
82	40·1427 4663	30 3805 8577	23·9972 1879	19·6339 7776	16 5264
83	40·3360 2611	30·4665 8813	24 0357 8730	19 6514 0739	16 5343
84	40·5255 1579	30·5500 8556	24·0728 7240	19 6680 0704	16·5418
85	40·7112 8999	30·6311 5103	24·1085 3116	19 6838 1623	16·5489
86	40·8934 2156	30 7098 5537	24·1428 1842	19 6988 7260	16·5556
87	41·0719 8192	30 7862 6735	24·1757 8694	19·7132 1200	16·5618
88	41·2470 4110	30 8604 5374	24·2074 8745	19 7268 6857	16·5678
89	41·4186 6774	30·9324 7936	24·2379 6870	19·7398 7483	16·5734
90	41·5869 2916	31·0024 0714	24·2672 7759	19 7522 6174	16·5786
91	41·7518 9133	31·0702 9820	24·2951 5923	19·7640 5880	16·5836
92	41·9136 1895	31·1362 1184	24·3225 5695	19·7752 9410	16·5883
93	42·0721 7545	31·2002 0567	24·3486 1245	19 7859 9438	16·5928
94	42 2276 2299	31·2623 3560	24·3736 6582	19·7961 8512	16·5969
95	42·3800 2254	31·3226 5593	24 3977 5559	19·8058 9059	16·6009
96	42·5294 3386	31·3812 1934	24·4209 1884	19·8151 3390	16·6046
97	42·6759 1555	31·4380 7703	24·4431 9119	19·8239 3705	16·6081
98	42 8195 2505	31·4932 3867	24·4646 0692	19·8323 2100	16·6114
99	42·9603 1867	31 5468 7250	24·4851 9896	19·8403 0571	16·6145
100	43·0983 5164	31 5989 0534	24 5049 9900	19·8479 1020	16·6175

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

Im bankmässigen Geschäftsverkehre spielt die anticipative Verzinsungsform eine leutende Rolle, da nicht nur der Escompte- und Lombard-, sondern auch der Boden-l Hypothekarcredit und der Abschluss von Staats- und Prioritätsanlehen auf deren undlage beruhen. Hingegen wird dem privaten Capitale von der Bank blos eine ursive Verzinsung gewährt, so dass die Differenz, welche in den beiden Ver-sungsformen liegt, gewissermassen als Theil derjenigen Provision angesehen werden nn, welche ein Institut für die Uebernahme aller finanziellen Transactionen zu dern berechtigt ist. Jeder Aufzählungsbetrag, welchen ein Bankinstitut als Resultat es mit Verzinsung verbundenen Geschäftsabschlusses an einen Privaten leistet, angt um die vorschussweisen Zinsen eines Zinsintervalles (Jahr oder Semester) ürzt, zur Auszahlung. Im Escompte und Lombard, wo bekanntlich die Geschäfts-wickelung mit einer kürzeren Frist als der eines gewöhnlichen Zinsintervalles ver-nden sein kann, werden die Zinsen für die ganze Dauer anticipirt. Handelt es n also darum, den Werth jener Differenz zwischen der anticipativen und decursiven rzinsung allgemein darzustellen, so gelangt man auf folgende Art zum Ziele.

Der Endwerth eines decursiv verzinsten Capitales ist in der Form

$$K_n = K\,(1 + p)^n$$

n Ausdrucke gebracht Dagegen repräsentirt der Ausdruck

$${}_nK = \frac{K}{(1 - p)^n} = K\,(1 - p)^{-n}$$

Endwerth eines anticipativ verzinsten gleichen Capitales wobei $P = 100\,p$ für de Formen den entsprechenden Zinsfuss bezeichnet.

In der Differenz dieser Endwerthe

$${}_nK - K_n = D_n$$

gt nun jener Gewinn, welcher aus der vorschussweisen Einhebung von nachschuss-se berechneten Zinsen resultirt und gelangt man daher durch Substitution der sprechenden Werthe in die Form 3) zu folgendem Resultate

$$K\,(1 + p)^n \left[\frac{1}{(1 - p^2)_n} - 1\right] = D_n$$

Soll nun der Endwerth der Differenz D_n durch seinen Baarwerth im Zeitpunkte s Geschäftsabschlusses zur Darstellung gelangen, so muss derselbe im decursiven nne entsprechend discontirt werden. In Folge dessen ergibt sich

$$\frac{D_n}{(1 + p)^n} = K\left[\frac{1}{(1 - p^2)^n} - 1\right] = D$$

der zur Zeit des Geschäftsabschlusses sich ergebende Baarwerth des Gewinnes, lcher sich aus den beiden Verzinsungsformen ergibt.

Zum Beispiel: Jemand würde von einem Bankinstitu
Darlehen in der Höhe von 100.000 Gulden gegen entspre
Deckung auf drei Jahre mit $2^1/_2$percentiger semestraler Verz
contrahiren, wie gross ist im Zeitpunkte des Geschäftsabsc
der Baarwerth jenes Gewinnes, welchen das Institut durc
cipative Einhebung der decursiv berechneten Zinsen erzie

Der Form 5) gemäss lautet die zur Beantwortung dieser Frage erf
Relation folgendermaassen

$$100.000 \left[\frac{1}{[1 - (0{\cdot}025)^2]^6} - 1\right] = 375{\cdot}91$$

und es ist daher im Betrage von Gulden 375·91 derjenige Gewinn aus
welcher für diesen Fall aus der vorschussweisen Einhebung der decursiv be
Zinsen entspringt.

In der ersten Abhandlung über dieses Thema haben wir in der Tabel
Zahlenwerthe der Form für decursive Verzinsung

$$(1 + p)^n$$

tabellarisch zusammengestellt. Wir wollen nun auch zum Zwecke diesbe
Berechnungen die Zahlenwerthe der Form für anticipative Verzinsung

$$(1 - p)^{-n}$$

einer tabellarischen Zusammenstellung unterwerfen, so dass durch einfach
plication derselben mit dem Capitale der entsprechende Endwerth bei ant
Verzinsung ermittelt werden kann.

Was nun die Berechnung der Differenz dieser beiden Verzinsungsfo
belangt, so lässt sich der in Form 5) enthaltene Factor auch folgendermaa
Ausdrucke bringen

$$6)\qquad (1 - p^2)^{-n} = (1 + p)^{-n} \cdot (1 - p)^{-n}$$

und da die Zahlenwerthe für

$$(1 + p)^{-n}$$

in der Tabelle IV dargestellt sind, so gelangen wir durch einfache Multiplic
entsprechenden in den Tabellen IV und VIII angeführten Zahlenwerthe z
nungsmässigen Darstellung des genannten Factors, wodurch unserer Aufgab
dieser Beziehung entsprochen ist.

In Nachfolgendem sind vorläufig die Zahlenwerthe

$$(1 - p)^{-n}$$

auf Grundlage von 3, 4, 5 und 6% bis zu einem Termine von 100 Jahr
larisch zusammengestellt.

VIII.

Tafel für die Zahlenwerthe: $(1-p)^{-n}$

Termin n	$P = 100p = 3\%$	$P = 100p = 4\%$	$P = 100p = 5\%$	$P = 100p = 6\%$
1	1·0309 2784	1·0416 6667	1·0526 3158	1·0638 2970
2	1·0628 1220	1·0850 6944	1·1080 3324	1·1317 3382
3	1·0956 8268	1 1302 8067	1·1663 5078	1·2039 7214
4	1·1295 6977	1·1773 7570	1·2277 3766	1 2808 2143
5	1·1645 0492	1·2264 3302	1·2923 5543	1·3625 7599
6	1·2005 2054	1 2775 3440	1·3603 7414	1·4495 4893
7	1·2376 5004	1·3307 6500	1·4319 7278	1·5420 7333
8	1·2759 2788	1·3862 1354	1·5073 3977	1·6405 0354
9	1·3153 8956	1·4439 7243	1 5866 7344	1 7452 1653
10	1·3560 7171	1 5041 3795	1 6701 8257	1·8566 1333
11	1·3980 1208	1 5668 1037	1·7580 8692	1·9751 2056
12	1·4412 4956	1·6320 9413	1·8506 1781	2·1011 9209
13	1·4858 2429	1·7000 9805	1·9480 1874	2 2353 1073
14	1·5317 7762	1·7709 3547	2·0505 4605	2 3779 9014
15	1 5791 5219	1·8447 2445	2·1584 6952	2·5297 7675
16	1·6279 9194	1·9215 8797	2·2720 7318	2·6912 5186
17	1·6783 4221	2·0016 5414	2·3916 5598	2 8630 3389
18	1 7302 4970	2·0850 5639	2 5175 3261	3·0457 8073
19	1 7837 6258	2 1719 3374	2·6500 3433	3 2401 9227
20	1·8389 3049	2 2624 3098	2·7895 0982	3·4470 1305
21	1·8958 0463	2·3566 9894	2·9363 2612	3 6670 3516
22	1·9544 3777	2·4548 9473	3 0908 6960	3·9011 0124
23	2·0148 8430	2·5571 8201	3 2535 4695	4·1501 0770
24	2 0772 0030	2·6637 3126	3·4247 8626	4·4150 0819
25	2·1414 4361	2 7747 2006	3·6050 3817	4·6968 1722
26	2·2076 7383	2·8903 3340	3·7947 7702	4 9966 1407
27	2·2759 5240	3·0107 6395	3·9945 0213	5 3155 4688
28	2·3463 4268	3·1362 1245	4 2047 3909	5 6548 3711
29	2·4189 0998	3·2668 8797	4·4260 4114	6·0157 8416
30	2 4937 2163	3 4030 0830	4·6589 9068	6·3997 7038
31	2 5708 4704	3 5448 0032	4·9042 0071	6·8082 6636
32	2 6503 5777	3·6925 0033	5·1623 1654	7 2428 3655
33	2 7323 2760	3·8463 5451	5·4340 1741	7 7051 4527
34	2 8168 3258	4·0066 1928	5 7200 1833	8·1969 6305
35	2·9039 5111	4·1735 6175	6·0210 7192	8 7201 7346
36	2 9937 0403	4·3474 6016	6 3379 7044	9 2767 8028
37	3·0863 5467	4·5286 0433	6·6715 4784	9·8689 1519
38	3 1818 0894	4·7172 9618	7·0226 8193	10 4988 4595
39	3·2802 1540	4·9138 5019	7·3922 9677	11·1689 8505
40	3·3816 6536	5·1185 9394	7·7813 6502	11·8818 9899
41	3·4862 5295	5·3318 6869	8·1909 1055	12 6403 1807
42	3·5940 7521	5·5540 2989	8·6220 1110	13·4471 4689
43	3·7052 3217	5·7854 4780	9 0758 0116	14·3054 7541
44	3·8198 2698	6·0265 0812	9·5534 7491	15 2185 9086
45	3 9379 6596	6·2776 1263	10 0562 8938	16·1899 9028
46	4·0597 5872	6 5391 7982	10·5855 6777	17·2233 9391
47	4·1853 1827	6·8116 4565	11·1427 0291	18·3227 5948
48	4 3147 6111	7·0954 6422	11·7291 6096	19·4922 9732
49	4·4482 0733	7·3911 0856	12·3464 8522	20·7364 8651
50	4·5857 8075	7·6990 7141	12·9963 0023	22·0600 9204

Termin n	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p$
51	4 7276 0902	8 0198 6606	13·6803 1603	23·4681
52	4·8738 2373	8·3540 2714	14·4003 3267	24·9661
53	5 0245 6055	8 7021 1161	15·1560 4491	26·5597
54	5·1799 5933	9.0646 9959	15·9958 4728	28·2550
55	5·3401 6425	9 4423 9541	16·7798 3924	30·0585
56	5·5053 2397	9·8358 2855	17·6852 3078	31·9771
57	5·6755 9172	10·2456 5474	18·6103 4819	34·0182
58	5 8511 2549	10·6725 5702	19·5898 4020	36·1896
59	6·0320 8813	11·1172 4689	20·6208 8442	38·4996
60	6·2186 4756	11·5804 6551	21·7061 9412	40·9570
61	6·4109 7687	12·0629 8491	22·8486 2539	43·5713
62	6·6092 5450	12 5656 0928	24·0511 8462	46·3524
63	6·8136 6443	13·0891 7634	25·3170 3645	49 3111
64	7·0243 9632	13·6345 5868	26·6495 1205	52 4586
65	7·2416 4569	14·2026 6529	28·0521 1795	55·8071
66	7·4656 1412	14·7944 4302	29·5285 4521	59·3692
67	7·6965 0940	15 4108 7814	31·0826 7916	63 1587
68	7·9345 4577	16·0529 9806	32·7186 0965	67·1902
69	8.1799 4410	16·7218 7298	34·4406 4173	71·4789
70	8·4329 3206	17·4186 1769	36·2533 0709	76·0414
71	8 6937 4439	18·1443 9343	38·1613 7588	80·8951
72	8 9626 2308	18·9004 0982	40·1698 6935	86·0586
73	9 2398 1761	19·6879 2690	42·2840 7300	91·5517
74	9·5255 8517	20·5082 5718	44·5095 5052	97·3954
75	9·8201 9089	21·3627 6790	46·8521 5845	103·6122
76	10·1239 0814	22·2528 8323	49·3180 6152	110·2257
77	10·4370 1870	23·1800 8670	51·9137 4897	117·2614
78	10·7598 1309	24 1459 2364	54·6460 5155	124·7462
79	11·0925 9081	25·1520 0379	57 5221 5953	132·7087
80	11 4356 6063	26·2000 0395	60·5496 4161	141·1795
81	11·7893 4086	27·2916 7078	63·7364 6485	150·1909
82	12·1539 5965	28·4288 2373	67·0910 1563	159·7776
83	12·5298 5531	29·6133 5806	70·6221 2172	169·9762
84	12·9173 7661	30·8472 4797	74·3390 7549	180·8257
85	13 3168 8310	32·1325 4997	78·2516 5841	192·3678
86	13·7287 4546	33·4714 0622	82·3701 6675	204·6466
87	14·1533 4584	34 8660 4815	86·7054 3868	217·7091
88	14 5910 7818	36·3188 0015	91·2688 8282	231·6055
89	15·0423 4864	37·8320 8349	96·0725 0824	246·3888
90	15·5075 7592	39·4084 2031	101·1289 5604	262·1157
91	15·9871 9167	41·0504 3782	106·4515 3267	278·8465
92	16·4816 4090	42·7608 7273	112·0542 4492	296·6452
93	16·9913 8237	44·5425 7576	117·9518 3675	315·5801
94	17·5168 8904	46·3985 1641	124·1598 2816	335·7235
95	18·0586 4850	48 3317 8793	130 6945 5596	357·1526
96	18·6171 6340	50·3456 1243	137·5732 1680	379·9496
97	19·1929 5196	52·4433 4628	144·8139 1242	404·2017
98	19·7865 4841	54·6284 8571	152·4356 9729	430·0018
99	20·3985 0351	56·9046 7261	160 4586 2872	457·4488
100	21·0293 8507	59·2757 0064	168·9038 1971	486·6476

Zinseszins- und Rentenrechnung mittelst Hilfstabellen.

Ebenso wie ein durch decursive Verzinsung angewachsenes Capital mittelst umgekehrten Processes der Abzinsung auf den ursprünglichen Betrag zurück-hrt werden kann, lässt sich auch ein anticipativ aufgezinstes Capital der gleichen edur unterwerfen. Soll nämlich der ursprüngliche Werth eines auf Grundlage anti-tiver Verzinsung angewachsenen Capitales ermittelt werden, so muss offenbar der ekehrte Vorgang zur Anwendung gelangen, welcher in der anticipativen Abzinsung Ausdrucke kommt. Da nun bekanntlich der Endwerth eines anticipativ ezinsten Capitales in der Form

$$_nK = \frac{K}{(1-p)^n}$$

Darstellung gelangt, wobei $P = 100p$ den Zinsfuss, n die Anlagefrist, K das rüngliche und $_nK$ das auf diese Weise aufgelaufene Endcapital bezeichnet, so äsentirt die Relation

$$K = {}_nK\,(1-p)^n$$

anticipative Abzinsungsform für ein gegebenes Capital $_nK$.

Im praktischen Bankwesen gelangt dieser Abzinsungsmodus unter verschiedenen ständen zur Anwendung. Die grösste Benützung findet derselbe jedoch bei ittlung der totalen Verwaltungsgebühren solcher mit Verzinsung verbundener bank-siger Geschäftsabschlüsse, welche eine mehrjährige Abwickelungsfrist beanspruchen.

Denken wir uns ein Capital bei $Q = 100q$ percentiger ganz-riger Verzinsung auf n Jahre derart angelegt, dass zum lusse eines jeden Jahres von dem jeweilig vorhandenen rage $P = 100p$ Percent als Verwaltungsgebühr in Abzug racht werden; wie gross wird das Endcapital sein?

Die Lösung dieser Aufgabe geschieht in der Weise, dass vorerst die decursive insung des Anlagecapitales mit $Q = 100q$ Percent und sodann die anticipative sung desselben mit $P = 100p$ Percent auf n Jahre durchgeführt wird. Es ist also

$$K_n = K\,(1+q)^n \,.\, (1-p)^n$$

gesuchte Endcapital. Die Richtigkeit dieser Form lässt sich auf folgende Art weisen: Der Werth des Capitales K nach Ablauf des ersten Jahres ist offenbar $1+q)$ und derjenige der in Abzug zu bringenden Verwaltungsgebühr $K\,(1+q)\,p$; it $K_1 = K\,(1+q)\,(1-p)$ der im nächsten Jahr zur Aufzinsung gelangende ag. Ferner ist der Werth des Capitales nach Ablauf des zweiten Jahres $K_1\,(1+q)$ derjenige der in Abschlag kommenden Verwaltungsgebühr $K_1\,(1+q)\,p$; lich der zur weiteren Verfügung verbleibende Betrag $K_2 = K_1\,(1+q)\,(1-p) =$ $1+q)^2 \,.\, (1-p)^2$ u. s. f., so dass sich schliesslich nach Ablauf des $n$ten Jahres K_n derjenige Werth ergibt, welcher in der Form 3) zum Ausdrucke gebracht ist.

Soll nun weiter der Baarwerth der Verwaltungsgebühren während der gesamm Anlagedauer für den Zeitpunkt des Beginnes derselben ermittelt werden, so n jenes in der Form 3) dargestellte Endcapitel von demjenigen in Abzug gebr werden, welches durch blosse Aufzinsung während derselben Dauer und bei gleic Zinsfusse $Q = 100q$ sich ergeben hätte, so dass die Verwaltungsgebühren in ih Gesammtwerthe am Ende der Anlagefrist sich folgendermaassen darstellen las

4) $$V_n = K\,(1 + q)^n \left[1 - (1 - p)^n\right]$$

und in Folge dessen für den Zeitpunkt des Beginnes derselben in der Form

5) $$V = K \left[1 - (1 - p)^n\right]$$

zum Ausdrucke gelangen.

Dies geht aus dem Umstande hervor, dass der zum Schlusse der Anlag sich ergebende Gesammtwerth der Verwaltungsgebühren V_n auf den Zeitpunkt Beginnes discontirt den Werth V ergibt; d. h.

6) $$V = \frac{V_n}{(1 + q)^n}$$

Den Betrag V könnte man daher vom Anlagecapitale K sofort als Summe gesammten Verwaltungsgebühren in Abzug bringen, da derselbe deren Baarwerth Zeitpunkte des Anlagebeginnes bildet.

Diese Formen gelangen nun auch im modificirten Sinne als Rechnungsgr lagen für die Ermittlung der bankmässigen Provisionen im Clearingverkehre Anwendung.

Folgendes Beispiel mag zur näheren Erläuterung dieser Auseinandersetzu beitragen.

Auf welchen Betrag wachsen 10.000 Gulden bei 4 percenti ganzjähriger Verzinsung und $^1/_3$ Percent Verwaltu gebühr in 10 Jahren an; und wie gross ist der Baarwe der gesammten Verwaltungsgebühren im Zeitpunkte Anlagebeginnes?

Den Formen 3) und 5) gemäss ergeben sich die gesuchten Werthe, u. z den Endwerth

$$K_n = 10.000 \times 1{\cdot}480243 \times 0{\cdot}96716 = \text{fl. } 14.316{\cdot}30$$

und für den Baarwerth der Verwaltungsgebühren

$$V = 10.000\,(1 - 0{\cdot}96716) = \text{fl. } 328{\cdot}40$$

Im Nachfolgenden sind vorläufig die Zahlenwerthe von

$$(1 - p)^n$$

auf Grundlage eines 3-, 4-, 5- und 6percentigen Zinsfusses bis zu einem Ter von 100 Jahren tabellarisch zusammengestellt.

IX.

Tafel für die Zahlenwerthe: $(1-p)^n$

Termin n	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p=6\%$
1	0·97	0·96	0·95	0·94
2	0·9409	0·9216	0·9025	0·8836
3	0·9126 73	0·8847 36	0·8573 75	0·8305 84
4	0·8852 9281	0·8493 4656	0·8145 0625	0·7807 4896
5	0·8587 3403	0·8153 7270	0·7737 8094	0·7339 0402
6	0·8329 7200	0·7827 5779	0·7350 9189	0·6898 6978
7	0·8079 8284	0·7514 4748	0·6983 3730	0·6484 7759
8	0·7837 4336	0·7213 8958	0·6634 2043	0·6095 6894
9	0·7602 3106	0·6925 3400	0·6302 4941	0·5729 9480
10	0·7374 2413	0·6648 3264	0·5987 3694	0·5386 1511
11	0·7153 0140	0·6382 3933	0·5688 0009	0·5062 9821
12	0·6938 4236	0·6127 0976	0·5403 6009	0·4759 2031
13	0·6730 2709	0·5882 0137	0·5133 4208	0·4473 6510
14	0·6528 3628	0·5646 7331	0·4876 7498	0·4205 2319
15	0·6332 5119	0·5420 8638	0·4632 9123	0·3952 9180
16	0·6142 5365	0·5204 0292	0·4401 2667	0·3715 7429
17	0·5958 2604	0·4995 8681	0·4181 2034	0·3492 7983
18	0·5779 5126	0·4796 0334	0·3972 1432	0·3283 2304
19	0·5606 1272	0·4604 1920	0·3773 5360	0·3086 2366
20	0·5437 9434	0·4420 0243	0·3584 8592	0·2901 0624
21	0·5274 8051	0·4243 2234	0·3405 6163	0·2726 9987
22	0·5116 5610	0·4073 4944	0·3235 3354	0·2563 3787
23	0·4963 0641	0·3910 5547	0·3073 5687	0·2409 5760
24	0·4814 1722	0·3754 1325	0·2919 8902	0·2265 0015
25	0·4669 7471	0·3603 9672	0·2773 8957	0·2129 1014
26	0·4529 6546	0·3459 8085	0·2635 2009	0·2001 3553
27	0·4393 7650	0·3321 4161	0·2503 4409	0·1881 2740
28	0·4261 9521	0·3188 5595	0·2378 2689	0·1768 3975
29	0·4134 0935	0·3061 0171	0·2259 3554	0·1662 2937
30	0·4010 0707	0·2938 5764	0·2146 3876	0·1562 5561
31	0·3889 7686	0·2821 0334	0·2039 0683	0·1468 8027
32	0·3773 0755	0·2708 1920	0·1937 1148	0·1380 6745
33	0·3659 8832	0·2599 8644	0·1840 2591	0·1297 8341
34	0·3550 0867	0·2495 8698	0·1748 2461	0·1219 9640
35	0·3443 5841	0·2396 0350	0·1660 8338	0·1146 7662
36	0·3340 2766	0·2300 1936	0·1577 7921	0·1077 9602
37	0·3240 0683	0·2208 1858	0·1498 9025	0·1013 2826
38	0·3142 8663	0·2119 8584	0·1423 9574	0·0952 4856
39	0·3048 5803	0·2035 0641	0·1352 7595	0·0895 3365
40	0·2957 1229	0·1953 6615	0·1285 1216	0·0841 6163
41	0·2868 4092	0·1875 5151	0·1220 8655	0·0791 1193
42	0·2782 3569	0·1800 4945	0·1159 8222	0·0743 6522
43	0·2698 8862	0·1728 4747	0·1101 8311	0·0699 0330
44	0·2617 9196	0·1659 3357	0·1046 7395	0·0657 0911
45	0·2539 3820	0·1592 9623	0·0994 4026	0·0617 6656
46	0·2463 2006	0·1529 2438	0·0944 6824	0·0580 6057
47	0·2389 3046	0·1468 0740	0·0897 4483	0·0545 7693
48	0·2317 6254	0·1409 3511	0·0852 5759	0·0513 0232
49	0·2248 0967	0·1352 9770	0·0809 9471	0·0482 2418
50	0·2180 6538	0·1298 8579	0·0769 4498	0·0453 3073

Termin n	$P=100p=3\%$	$P=100p=4\%$	$P=100p=5\%$	$P=100p=6\%$
51	0·2115 2341	0·1246 9036	0·0730 9773	0·0426 1088
52	0·2051 7771	0·1197 0275	0·0694 4284	0·0400 5423
53	0·1990 2238	0·1149 1464	0·0659 7070	0·0376 5098
54	0·1930 5171	0·1103 1805	0·0626 7216	0·0353 9192
55	0·1872 6016	0·1059 0533	0·0595 3856	0·0332 6840
56	0·1816 4235	0·1016 6912	0·0565 6163	0·0312 7230
57	0·1761 9308	0·0976 0235	0·0537 3355	0·0293 9596
58	0·1709 0729	0·0936 9826	0·0510 4687	0·0276 3220
59	0·1657 8007	0·0899 5033	0·0484 9453	0·0259 7427
60	0·1608 0667	0·0863 5231	0·0460 6980	0·0244 1581
61	0·1559 8247	0·0828 9822	0·0437 6631	0·0229 5087
62	0·1513 0299	0·0795 8229	0·0415 7799	0·0215 7381
63	0·1467 6391	0·0763 9900	0·0394 9909	0·0202 7938
64	0·1423 6099	0·0733 4304	0·0375 2414	0·0190 6262
65	0·1380 9016	0·0704 0932	0·0356 4793	0·0179 1886
66	0·1339 4745	0·0675 9295	0·0338 6554	0·0168 4373
67	0·1299 2903	0·0648 8923	0·0321 7226	0·0158 3311
68	0·1260 3116	0·0622 9366	0·0305 6365	0·0148 8312
69	0.1222 5022	0·0598 0191	0·0290 3546	0·0139 9013
70	0·1185 8272	0·0574 0984	0·0275 8369	0·0131 5073
71	0·1150 2524	0·0551 1344	0·0262 0451	0·0123 6168
72	0·1115 7448	0·0529 0891	0·0248 9428	0·0116 1998
73	0·1082 2724	0·0507 9255	0·0236 4957	0·0109 2278
74	0·1049 8043	0·0487 6085	0·0224 6709	0·0102 6742
75	0·1018 3101	0·0468 1041	0·0213 4373	0·0096 5137
76	0·0987 7608	0·0449 3800	0·0202 7655	0·0090 7229
77	0·0958 1280	0·0431 4048	0·0192 6272	0·0085 2795
78	0·0929 3842	0·0414 1486	0·0182 9958	0·0080 1627
79	0·0901 5026	0·0397 5826	0·0173 8460	0·0075 3530
80	0·0874 4576	0·0381 6793	0·0165 1537	0·0070 8318
81	0·0848 2238	0·0366 4122	0·0156 8961	0·0066 5819
82	0·0822 7771	0·0351 7557	0·0149 0513	0·0062 5870
83	0·0798 0938	0·0337 6854	0·0141 5987	0·0058 8318
84	0·0774 1510	0·0324 1780	0·0134 5188	0·0055 3019
85	0·0750 9265	0·0311 2109	0·0127 7928	0·0051 9837
86	0·0728 3987	0·0298 7625	0·0121 4032	0·0048 8647
87	0·0706 5467	0·0286 8120	0·0115 3330	0·0045 9328
88	0·0685 3503	0·0275 3395	0·0109 5664	0·0043 1769
89	0·0664 7898	0·0264 3259	0·0104 0880	0·0040 5863
90	0·0644 8461	0·0253 7529	0·0098 8836	0·0038 1511
91	0·0625 5007	0·0243 6028	0·0093 9395	0·0035 8620
92	0·0606 7357	0·0233 8587	0·0089 2425	0·0033 7103
93	0·0588 5336	0·0224 5043	0·0084 7804	0·0031 6877
94	0·0570 8776	0·0215 5241	0·0080 5413	0·0029 7864
95	0·0553 7513	0·0206 9032	0·0076 5143	0·0027 9992
96	0·0537 1388	0·0198 6270	0·0072 6886	0·0026 3193
97	0·0521 0246	0·0190 6820	0·0069 0541	0·0024 7401
98	0·0505 3939	0·0183 0547	0·0065 6014	0·0023 2557
99	0·0490 2320	0·0175 7325	0·0062 3214	0·0021 8604
100	0·0475 5251	0·0168 7032	0·0059 2053	0·0020 5487

Zur Frage der Valutaregulirung.

Einer der wichtigsten Factoren im wirthschaftlichen Getriebe eines Staates ist Valuta auf deren Grundlage die Währung desselben beruht. Die beiden Edel- alle Gold und Silber, welche diesbezüglich in Frage kommen, haben im Laufe Zeit in ihrem substantiellen Werthe eine Veränderung in dem Sinne erfahren, nicht nur deren Tauschmenge gegenüber derjenigen der Waarenproducte immer ser wurde, sondern auch deren relatives Werthmaass zu einander eine bedeutende schiebung erfahren hat. Die Ursache der ersteren Erscheinung liegt an und für in der allgemeinen Verbilligung des Geldes in Folge des stetigen Anwachsens internationalen Capitales, während diejenige der letzteren in der Veränderung relativen Productionsmenge der beiden Edelmetalle einerseits und im Wesen der eiligen monetaren Verwendbarkeit derselben andererseits zu liegen scheint. Inso- ge das Verhältniss der Productionsmenge des Goldes mit derjenigen des Silbers r unmerklichen Veränderung unterworfen war, so dass die auf dieser Grundlage gesetzte Werthrelation der beiden Edelmetalle in kaum nennenswerther Weise nflusst wurde, war auch eine belangreiche Verschiebung im substantiellen Werthe elben fast ausgeschlossen. Durch Erschliessung neuer grossartiger Silberminen in Folge technischer Fortschritte, welche es ermöglichten zuvor unrentable gwerke der Ausbeutung zuzuführen, steigerte sich die Ausbeute an Silber auf Mehrfache, während die Productionsmenge des Goldes sich dem gegenüber nur bescheidenem Maasse vergrösserte. Dieser Umstand musste eine nambafte De- sion des substantiellen Silberwerthes nach sich ziehen, als deren nächste Folge eine Verschiebung des relativen Werthmaasses der beiden Edelmetalle zu Un- sten des Silbers geltend zu machen begann. Ueberdies brachte es die stetig ehmende Expansion des Weltverkehres mit sich, dass Silbermünzen, welche ihres umens und Gewichtes halber auf ein beschränktes Circulationsgebiet angewiesen en, ihrem Zwecke, als Verkehrsvaluta auf dem Weltmarkte nicht mehr ent- echen konnten und in Folge dessen durch Werthzeichen ersetzt werden mussten.

Auf einer Seite war es also das durch Mehrproduction des Silbers erzeugte ssere Angebot, auf der anderen die in Folge geringerer Verwendung desselben vorgebrachte mässigere Nachfrage, welche auf diese Weise einer stetigen Ent- thung des substantiellen Silberwerthes Vorschub leistete. Die mit einem be- mmten Silbergehalt ausgestattete Silbermünze musste aus diesem Grunde an rem Werthe immer mehr einbüssen, was zur Folge hatte, dass jene für die ermünzen ausgegebenen Werthzeichen einer stetigen Werthschwankung aus- etzt wurden, so dass die Eignung des Silbers zur Verkehrsvaluta in jeder Be- ung in Frage gestellt war. Zudem kam noch, dass die europäischen Staaten schon er aus dieser Entwicklung der Dinge die Conclusion gezogen hatten, dass ein teres Festhalten am Silber als Währungsgrundlage vom wirthschaftlichen Stand- kte ein Ding der Unmöglichkeit geworden ist und so sahen wir seit einigen ennien die meisten derselben zur Goldwährung übergehen. Aber auch jene Staaten, che aus ökonomischen Rücksichten nicht in der Lage waren, eine derartige

monetare Transaction durchzuführen, liessen die Silbervaluta mit Bezug auf ihr
Währungsgrundlage fallen und beschränkten sich blos auf eine entsprechende Be
deckung ihrer Werthzeichen. Der innere Werth der Silbermünze hat auf diese Wei
jede Bedeutung verloren und gilt dieselbe nunmehr ebenso wie die Note als Pfan
oder Anweisung auf einen bestimmten Geldwerth. Das Silber hat seine Rolle a
Verkehrsvaluta auf dem Weltmarkte ausgespielt und ist nur noch als Mitteldin
zwischen dieser und der Scheidemünze zu betrachten. Es kann sich nur mehr darum
handeln, dessen monetare Verwendung neben der principalen Goldvaluta weiterhi
wenn auch blos in untergeordnetem Sinne aufrechtzuerhalten, weil es unterschie
licher wirthschaftlicher Interessen halber nicht angeht, dasselbe einer derartige
Entwerthung und Werthschwankung preiszugeben.

Zur Erreichung dieses Zweckes werden nun schon seit mehreren Jahren
grössten Anstrengungen gemacht, um die Bedingungen festzustellen, unter wel
der Courssturz des Silbers hintangehalten werden könnte. Die Mittel, die in di
Beziehung in Vorschlag gebracht werden, sind mannigfacher Art und verdient d
jenige der Einführung der Doppelwährung einer besonderen Beachtung unter de
selben, da hierin das allein richtige Princip einer herbeizuführenden moneta
Mehrverwendung des Silbers, welche demselben eine gewisse Stabilität verscha
könnte, am meisten vertreten ist. Derzeit stösst man jedoch bezüglich der Du
führung einer derartigen monetaren Transaction auf fast unüberwindliche Schwie
keiten. Die Währungspolitiker stehen daher vor einer Frage, die ihrer Beschaf
heit nach eine Menge der verschiedenartigsten Interessen berührend,
jedem weiteren Schritte zur Lösung, neue Hindernisse anhäuft. Bereits
Jahre 1886 wurde zum Zwecke der Berathung über diesen Gegenstand
königliche Gold- und Silber - Commission in London eingesetzt, welche
diesfalls vorzukehrenden Maassnahmen zu untersuchen berufen war. Unsere dar
auf publicistischem Wege gemachten Vorschläge, welche in der zweiten Liefer
dieses Werkes unter dem Titel: „Beiträge zur Lösung der Währungsfrage" zusamm
gefasst sind und der königlichen Gold- und Silber-Commission vorlagen, behan
diese Frage von folgendem Standpunkte: „Um dem Silber eine thunli
erweiterte monetare Verwendung zu geben und hiedurch einer ferneren
werthung und Werthschwankung entgegenzuwirken, ist es nothwendig,
zwischen sämmtlichen Staaten Europas, den Vereinigten Staaten Amerikas
Indien ein Vertrag geschlossen werde, demgemäss Silbergeld als legislativ an
kannte Münze ohne Rücksicht auf Agio oder Disagio als Zahlung im Nominalwe
mit gesetzlichem Vollwerth angenommen werde. Dies würde neben den einze
Währungen der verschiedenen Staaten nichts anderes als eine Internationale Sil
währung bedeuten." Die weiteren diesbezüglichen Ausführungen behandeln die ev
tuelle Beschränkung der Silberzahlungen unter diesen Auspicien, welche Maassre
zur Vermeidung von übermässigem Einströmen fremder Silbermünzen in die ei
zelnen Staaten als geboten erscheint, und heben die zu erwartenden Erfo
einer derartigen neben den einzelnen Währungen bestehenden allgemeinen Sonde
währung hervor, das Wesen derselben folgendermaassen ergänzend: „Von Zeit
Zeit könnte ein gegenseitiger Austausch der jeweiligen fremden Silbermünzen

Eigenen bankmässig eingeleitet, eventuell ein Ueberschuss mit Goldvaluta aus-
lichen werden. Auf diese Weise würde sich der Cours des Silbers wieder soweit
len, dass es den wirklichen Nominalwerth, eventuell auch ein Agio (natürlich
ein theoretisches) erreichen würde, wodurch auch die freie Silberprägung der
chführung näher gerückt wäre und sich die Nothwendigkeit der internationalen
erwährung von selbst aufhören würde, um bei einer etwaigen abermaligen Ab-
kelung des Silbercourses wieder in Action zu treten».

Diese Anregung wurde bald darauf zur Grundlage eines allgemeinen Vorgehens
in dieser Hinsicht zumeist interessirten Staaten. Ein Jahr später traf bereits
englische Regierung in aller Stille eine Anordnung, welche als erster bedeut-
er Schritt zur Durchführung unseres Vorschlages gelten konnte. Durch königl-
e Verordnung wurde die Prägung einer neuen englischen Silbermünze im Werthe
vier Shilling (double florin) angeordnet. Die Ausprägung von Silbermünzen ist
England der Regierung überlassen. Gesetzlich ist nur bestimmt, dass Niemand
flichtet ist, mehr als vierzig Shilling in Silbergeld anzunehmen, und dass die
e Standardsilber zu 66 Pence ausgeprägt wird. Der damalige Silberpreis ent-
ch nun dem Werthe von 43$^{5}/_{8}$ Pence, während das Werthverhältniss von
5$^{1}/_{2}$ einen Preis von 60$^{7}/_{8}$ Pence involvirt. Die englischen Silberprägungen
den daher zu den Prägungen der englischen Goldmünzen im Werthverhältnisse
1 : 14·287. Hätte England den Bimetallismus einführen wollen, so hätte es zu-
st die Unterwerthigkeit seiner Silbermünzen beseitigen und aus der Standard-
e nicht 66 sondern 60$^{7}/_{8}$ Pence prägen müssen. Ferner wäre es nothwendig ge-
n, die Zahlkraft der Silbermünzen dem Golde gleichzumachen und freie unbe-
ankte Silberprägung der Privaten einzuführen. Die Voraussetzung für alle diese
nen hätte die Einführung einer grösseren Silbermünze sein müssen, da das
-Shillingstück nothwendig als Scheidemünze zu betrachten ist. Es war daher
en, die Ausprägung von Vier-Shillingstücken zu veranlassen, welche zugleich
Zwei-Unzenstücke für Indien zu fungiren geeignet sind und die zu einer Silber-
ntmünze gemacht werden können. Diesem Beispiele folgte bald darnach auch
deutsche Regierung und schritt, in Bezug auf unseren Vorschlag noch weiter-
nd, zur Prägung einer grösseren Silbermünze im Werthe von fünf Reichsmark.
em ist auch in den Vereinigten Staaten Amerikas eine Maassnahme zur Hebung
Silberpreises ergriffen worden. Um die Gefahren und Schwierigkeiten zu besei-
n, welche die fortgesetzte Prägung von Silberdollars hervorzurufen geeignet war,
de auf gesetzlichem Wege die Einführung getroffen, dass vom Schatzamte jedem
erbringer von ungemünztem Silber, Noten ausgefolgt werden, deren Betrag dem
ktwerthe des Silbers in Gold entspricht. Diese Schatzamtsnoten, welche Gold-
n mit voller Silberdeckung repräsentiren, besitzen zwar keinen Zwangscours,
sen jedoch von allen Staatscassen in Zahlung angenommen werden. Bei Präsen-
on derselben zur Einlösung, ist die Regierung berechtigt, dem Ueberbringer ent-
er Golddollars in jenem Betrage auf welchen die Noten lauten, oder soviel Silber
uzahlen, als man am Tage der Präsentirung für das Nominale erhält. Wie bei
Ausgabe, so ist auch bei der Einlösung die actuelle Marktrelation maassgebend,
bei die Einlösung auf Wunsch des Inhabers auch in Silberdollars erfolgen kann.

Das Wesen aller dieser Maassnahmen zum Zwecke der Mehrverwendung des Silbers ist daher mit demjenigen unseres seinerzeit gemachten Vorschlages identisch, nur werden diese von jedem einzelnen Staate auf eigene Faust zur Durchführung gebracht, wodurch die Vortheile, welche sich nothwendigerweise aus einem internationalen Vertrage für die Erreichung des angestrebten Zweckes ergeben hätten, gänzlich entfallen. Jedoch schon diese halben Maassnahmen sind geeignet, eine stärkere Nachfrage in Silber zu erzeugen und dessen Werth wenigstens auf dem bisherigen Niveau zu erhalten, was jedoch den diesbezüglich gestellten Anforderungen nicht zu genügen vermag. Unter diesen Umständen ist also die Aussicht auf eine Rehabilitirung des Silbers als Verkehrsvaluta als gänzlich geschwunden zu betrachten und tritt daher an diejenigen Staaten, welche bisher nicht zur Einführung der Goldwährung geschritten waren, die Nothwendigkeit einer derartigen monetaren Transaction mit elementarer Gewalt heran. Aber auch jene Staaten, welche bisher die Doppelwährung besitzen, können dem Einflusse der Preisschwankungen des Silbers wenig Widerstand leisten, und so bereitet sich Alles darauf vor, der principalen Goldvaluta die Alleinherrschaft auf dem Geldmarkte einzuräumen.

Angesichts dieser Thatsachen kann auch Oesterreich-Ungarn nicht umhin, zu dieser Frage endlich Stellung zu nehmen und zur Erwägung derjenigen Bedingungen zu schreiten, unter welchen die Herstellung von Baarzahlungen bei gleichzeitigem Uebergange zur Goldwährung zur Durchführung gelangen könnte. Wäre das Silber als Währungsgrundlage aufrecht erhalten worden, so hätte der Staat nur die Verpflichtung, für jede Forderung im Betrage von fl. 45 Papier, ein Pfund Silber, aus welchen 45 Silbergulden geprägt werden, zu zahlen. Da jedoch, wie bereits allgemein bemerkt worden, dieser Rechtsstandpunkt mit dem Fallenlassen des Silbers als Währungsgrundlage und dem gleichzeitigen Uebergange zu einer entsprechenden Bedeckung der Werthzeichen, seine Berechtigung verloren hat, was schon durch den höheren Werth der Papiergulden auf dem Weltmarkte documentirt erscheint, so wird der österreichisch-ungarische Staat einen Goldgulden ausprägen müssen, welcher dem Goldwerthe entsprechen wird, den der Papiergulden zur Zeit der Valutaregulirung auf dem Weltmarkte haben wird. Die Valutaregulirung ist also in dem Sinne aufzufassen, dass die Deckung der im Umlaufe sich befindenden Noten anstatt wie bisher in Silber, nunmehr in Gold durchgeführt und der Text auf den Staats- und Banknoten derart modificirt wird, dass auf Verlangen für einen Gulden eine bestimmte stabile Quantität an Gold zur Auszahlung gelangt. Auf diese Weise wird der angestrebte Zweck vollständig erreicht, da hiedurch einerseits jede Störung des Verhältnisses zwischen Schuldner und Gläubiger vermieden und andererseits die Stabilisirung des Geldwerthes nach Aussen erzielt wird. Würde z. B. für die Valutaregulirung der Zeitpunkt gewählt werden, wo hundert Papiergulden den Goldwerth von 175 Mark repräsentiren, so würde ein rundes Verhältniss mit der Valuta unseres Nachbarstaates hergestellt sein, nach welchem vier österreichische Goldgulden einen unveränderlichen Werth von sieben Reichsmark beibehalten würden. Die Staatsschuld selbst hätte jedoch mit dieser monetaren Transaction gar nichts zu thun und müsste successive durch Convertirung der neuen Währungsgrundlage untergeordnet werden.

DIE MATHEMATIK

im

Dienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

raktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

it einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete er reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bankinstitute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Verfasst

von

DR. LUDWIG GROSSMANN

haber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle“.

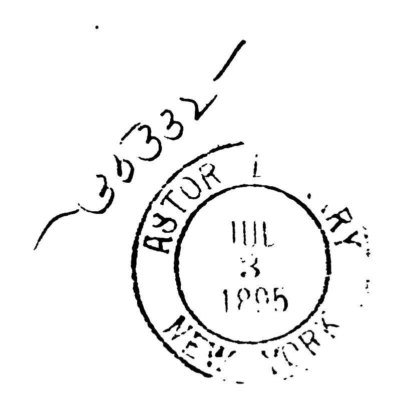
Sechste Lieferung.

WIEN 1891.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sophienbrückengasse Nr. 5.

Druck von Josef Bayer & Comp., I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Indem ich mit diesem Theile meines Werkes dasselbe zum Abschlusse
nge, fühle ich mich bewogen, einen kurzen Rückblick auf die bescheidenen
folge meiner auf den Gebieten der praktischen Nationalökonomie gemachten
rschungen zu werfen. Bezüglich der Disciplinen des Bank- und Finanz-
sens habe ich mich beflissen, die mir zu Gebote stehenden wissenschaftlichen
ttel dem Ausbau der finanztechnischen Behelfe insofern dienstbar zu machen,
 ich jene durch die fortschreitende wirthschaftliche Entwicklung auf diesen
bieten entstandenen Lücken im Verwaltungswesen in zweckentsprechender
eise zu beseitigen mich bestrebte. In ähnlicher Art habe ich Anlass genommen,
 wichtigsten Fragen der Staatswissenschaft einer Untersuchung von neuen
andpunkten zu unterziehen und ist es mir auch gelungen, denselben manche
erthvolle Sentenz abzuringen.

Auf dem Assecuranzgebiete ist die Schaffung einer technischen Grundlage
r die Feuerversicherung erwähnenswerth, sowie auch in der Lebens-, Inva-
litäts- und Alters-Versicherung die Untersuchungen über das Wesen der
rämienreserve und der verschiedenen versicherungstechnischen Functionen
on Belang sind, insbesondere, als hier die Grundlage zu neuen wichtigen
orschungen gelegt und das Gebiet der Lebensversicherungstechnik einer
nalytisch-geometrischen Untersuchung unterworfen wurde. Als ich an die
urchführung dieser Aufgabe ging, galt es vor allen Dingen, diejenigen
indernisse aus dem Wege zu räumen, welche in der Unzulänglichkeit des
issenschaftlichen Materiales gelegen waren. Die wenigen theoretischen Er-
hrungen über die mathematische und geometrische Beschaffenheit der mit
em Wesen der meisten versicherungstechnischen Relationen zusammen-
ängenden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einerseits, sowie
er Wahrscheinlichkeitscurven und ihrer Gleichungen andererseits, liessen
ine erschöpfende Untersuchung der allgemeinen Beschaffenheit der diesbe-
üglichen Functionen nicht zu; und war es daher geboten, die wissenschaft-
ichen Grundlagen in dieser Hinsicht vorerst zu erweitern und durch emsige
orschung die Wesenheit des Zusammenhanges dieser wissenschaftlichen
isciplinen mit der Versicherungstechnik nachzuweisen.

Dass mir dies gelungen ist, beweisen die zahlreichen Fundamentalsätze,
elche im Laufe der diesbezüglichen Ausführungen aufgestellt und begründet
urden.

So mag denn dieser bescheidene Antheil an dem Aufbau moderner
irthschaftlicher Disciplinen das Seinige zu deren Entwicklung beitragen.

Wien, im August 1891.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler:

Auf Seite 32, achte Zeile von unten, soll es lauten anstatt: $C = K'_2 : K_1$ richtig: $C = 100$

Auf Seite 63, zehnte Zeile von unten, soll es lauten anstatt: „Prämien-Ermittlung" „Prämienreserve-Ermittlung".

Im Gesammt-Inhalt unter „Finanzwesen" soll es heissen anstatt: „Mathematische Princ die Concession von Tilgungsrenten" richtig: „Mathematische Principien für die C von Tilgungsrenten".

Methode einer rationellen Handhabung der Brandschaden-Versicherung.

I.

Die grosse Concurrenz auf dem Gebiete der Brandschaden-Versicherung hat im
fe der letzten Decennien Auswüchse gezeitigt, deren übler Einfluss auf die Ent-
lung dieser Institution sich bereits seit längerer Zeit geltend macht. Den
desten Punkt in der heutigen Handhabung des Feuerversicherungsgeschäftes
et das Hervorkehren des rein geschäfts-politischen Standpunktes bei vollständiger
erachtlassung der nöthigen Vorsicht bezüglich der Riskenschätzung und Prämien-
essung. Im Concurrenzkampfe scheint der moderne Assureur vollständig diejenigen
cipien verlernt zu haben, welche ihm gebieten die Prämie dem Risiko ent-
chend anzupassen. Der rein geschäftliche Maassstab, dessen Um und Auf in
ebot und Nachfrage besteht, wird ohne Bedenken einer wirthschaftlichen Insti-
on angelegt, deren Grundlagen einem Naturgesetze unterworfen sind, bei welchem
arauf ankommt, ob Voraussetzung und Ergebniss sich streng die Waage halten.
n es auch vorkommen mag, dass während der kurzen Frist eines Jahres das
liche Schadenergebniss die dem übernommenen Risiko entsprechenden Voraus-
ungen unterbietet, so lässt sich hieraus keineswegs der Schluss ziehen, dass die
rversicherung als geeignetes Object für die Speculation betrachtet werden kann.
Durchschnitt einer längeren Versicherungsperiode, wird eine solche Anschauung
dlich zu wiederlegen im Stande sein, indem die günstigen Ergebnisse eines oder
rerer Jahre durch die ungünstigen anderer Jahre aufgehoben werden. Es könnte
t ebensogut noch eine kürzere Frist als die eines Jahres zur Grundlage der
iligen Calculationen benützt und eine etwa zufällig schadenlose Periode als
g für eine richtige geschäftliche Voraussicht betrachtet werden.

Der Umstand, dass die Prämie jährlich entrichtet wird und die Feuerversiche-
sanstalt zum Tragen des Risikos für die Dauer eines Jahres verpflichtet, ist
kein Grund, den Durchschnitt des Schadenergebnisses innerhalb dieser Zeit-
eit als Maassstab der Prosperität des Feuerversicherungsgeschäftes zu betrachten.
us geht hervor, dass erst der Erfolg nach einer längeren Periode maassgebend
für die Beurtheilung der rationellen Handhabung dieses Assecuranzzweiges.
n daher in letzterer Zeit im Feuerversicherungsgeschäfte sich die Tendenz breit

macht, die versicherungstechnischen Principien der geschäftspolitischen halber in den Hintergrund treten zu lassen, so kann darin nur das Bestreben liegen, mit etwaigen momentanen Erfolgen glänzen zu wollen, wenn nicht hieraus auf einen Mangel an fachlichem Verständniss geschlossen werden soll. Von der reinen Geschäftspolitik ist die Concurrenzfrage ein unzertrennlicher Factor, mit welchem allerdings unter allen Umständen gerechnet werden muss. Derselbe darf jedoch nicht vollständig ein Gebiet beherrschen, dessen Wesen sich nicht einer Regelung durch Angebot und Nachfrage unterordnen lässt. Der leitende Gedanke darf jenen Rahmen nicht verlassen, welcher durch die Grenze bezeichnet wird, innerhalb welcher sich die Leistung des übernommenen Risikos mit der Prämie als Gegenleistung deckt. Mag das geschäftliche Genie mit seinen himmelstürmenden Ideen andere Gebiete befruchten, in der Feuerversicherung ist kein Raum für waghalsige Speculationen.

In unseren früheren Abhandlungen über dieses Thema haben wir bereits den Weg angedeutet, der einzuschlagen ist, um derartige Auswüchse in der Feuerassecuranz nicht zum Durchbruche kommen zu lassen. Die Nothwendigkeit, den versicherungstechnischen Principien in erster Linie Rechnung zu tragen, macht sich desto mehr geltend, je grösser das Bestreben ist, dieselben aus geschäftspolitischen Rücksichten in den Hintergrund zu drängen. Diese falsche Geschäftspolitik verzweifelt an den Resultaten ihrer eigenen Thätigkeit, sobald sie ihres Irrthumes sich bewusst wird und verfällt bei der erst besten Gelegenheit wieder in denselben Fehler. Hieraus lässt sich die Conclusion ziehen, dass es dem heutigen Feuerversicherungsgeschäfte an dem nöthigen Halt fehlt, welcher in dem wirthschaftlichen Zwecke dieser Institution fussend, sein Wesen der langjährigen empyrischen Entwicklung verdankt. Hier kann nur die gewissenhafte Berücksichtigung des Assecuranzprincips Abhilfe schaffen; die Wirksamkeit der Geschäftspolitik muss in jene Grenzen zurückgewiesen werden, innerhalb welcher dieselbe der Beschaffenheit dieses Versicherungszweiges nicht zum Schaden gereicht. Es müssen beim Abschlusse des Feuerversicherungsgeschäftes in erster Linie die Grenzen wahrgenommen werden, bei welchen die Prämie nicht ohne voraussichtlichen Verlust des Versicherers ermässigt werden kann. Hiezu sind in erster Linie Anhaltspunkte nothwendig, mit deren Hilfe es möglich ist, die in Frage kommenden Risiken einer relativen Schätzung zu unterwerfen und auf dieser Grundlage die Limitirung der Prämie durchzuführen. Neben der auf Grundlage aller vorhandenen Gefahrmomente eines jeden Brandschadenrisikos zu bewerkstelligenden Limitirung der zu leistenden Prämie, deren Niveau unter gar keinen wie immer gearteten Umständen unterboten werden darf, indem dieselbe das zulässige Minimum der rechnungsmässigen Leistung repräsentirt, ist jedoch auch die Bemessung des jeweilig in eigenes Risiko zu übernehmenden Betrages mit Zugrundelegung einer dem besten Risiko entsprechenden willkürlich zu bestimmenden Maximalsumme in Betracht zu ziehen, wobei selbstverständlich die Beschaffenheit der Risken bezüglich ihrer Gefahrenkategorien nicht ausser Acht zu lassen ist.

Ein weiterer nicht minder wichtiger Factor ist die möglichste Wahrnehmung des entsprechenden Verhältnisses zwischen der Anzahl guter, minder guter schlechter Risken, deren Einfluss im Rahmen des Versicherungsstockes sich

ig die Waage halten muss, insoferne sich die Letzteren nicht gänzlich vermeiden en. Es sind daher sehr wichtige versicherungstechnische Bedingungen zu erfüllen, einer rationellen Methode im Feuerversicherungswesen Eingang zu verschaffen. nun diesbezüglich zum Resultate zu gelangen, muss jegliches empyrisches Wissen ngezogen werden, damit vor allen Dingen jene Umstände namhaft gemacht len, welche 1. irgend ein Gefahrmoment für die Entstehung eines Brandes bilden, ur Ausbreitung eines solchen beitragen und 3. durch Vertragsbedingungen das ko steigern können. Diese auf empyrischem Wege ermittelten Umstände müssen nn einer vergleichsweisen erfahrungsgemässen Schätzung im Sinne der Intensität beziehungsweisen Einflusses unterzogen werden, um auf diesem Wege eine ndlage für das in den früheren Abhandlungen (Lief. II) angeführte System der itirung der Feuerversicherungsprämie zu schaffen. Die Voraussetzungen, welche Durchführung einer solchen Arbeit bedingt, sind in dem massenhaften Materiale rer grossen Assecuranz-Compagnien längst vorhanden und lassen sich ganz unab-gig von jenen bei Bränden vorkommenden Entstehungsursachen wirthschaftlicher meteorologischer Art diesem Zwecke in geeigneter Weise dienstbar machen. Eine matische Zusammenstellung der Gefahr bezüglich der verschiedenen Bauarten r und minder guter Beschaffenheit, unter Berücksichtigung der Lage der Objecte e deren Nachbarschaft, der daselbst betriebenen mehr oder weniger feuergefähr-en Gewerbe und Betriebe, liesse sich auf Grund der gemachten Erfahrungen mit e dieses Materiales construiren.

In Betreff der Feuergefährlichkeit der Fabriksanlagen und industriellen Betriebe ste mehr auf die geeignete Bauart und Einrichtung, als auf die Kategorie Rück-t genommen werden. Die Fortschritte auf dem Gebiete der Sicherung des Be-bes haben insbesondere in den letzten Jahren den Feuerversicherer belehrt, dass Eintheilung der Gefahrenclassen nach Industrien in den meisten Fällen nicht r den gegebenen Anforderungen genügt, indem der Zustand, in welchem sich Anlagen gleicher industrieller Betriebe befinden, ein derart grundverschiedener kann, dass eine Einreihung derselben in ein und dieselbe Classe eine wider-nige genannt werden muss. Die Bedinungen, welche die Entstehung eines Brandes verwandten Betrieben zu fördern im Stande sind, können in dem einen Falle in nderer Weise zum Ausdrucke kommen, während dieselben im anderen Falle durch ckentsprechende Vorrichtungen und angemessene Bauart, sowie durch admini-tive Einrichtungen zum Theile oder gänzlich behoben werden und auf diese ise ausser Betracht kommen können. Insbesondere die praktische und allen Fort-itten angepasste Anordnung der maschinellen Anlagen, Absonderung der Trocken-en und besonders feuergefährlichen Manipulationen von den übrigen Räumen, e eine entsprechende Einrichtung für die gefahrlose Ablagerung von Abfällen, materiale und explodirbaren Stoffen, sind Bedingungen, welche Industrien der sten Gefahrenclasse zu einem angemessen guten Risiko umgestalten können. egen kann das scheinbar beste Risiko in Folge unzweckmässiger Einrichtungen, tsinniger Manipulation mit feuergefährlichen Gegenständen und Mangel an der n *Aufsicht der Beschäftigten*, zum schlechtesten werden. Daraus geht hervor

infolge dessen auch die Edelmetalle Gold und Silber in ihrem Werthe steige
kann jedoch auf die Beschaffenheit der Werthrelation keinen Einfluss übe
beide zugleich in proportionaler Weise an Werth zunehmen. Jeder Staat muss
sein Augenmerk darauf richten, für die Einlösung der ausgegebenen Geldwerth
die nöthige Deckung in baarer Münze oder in ungemünztem Metall jederze
räthig zu haben. Aber auch noch andere Factoren sind diesbezüglich in Betr
ziehen. Jedermann kann sein ungemünztes Edelmetall bei Vergütung der Prä
kosten, in Münze umwandeln lassen, welche dann denselben Metallwerth
muss wie jenes. Dieses Recht der freien Prägung gilt als erste Bedingung
geregeltes Geldwesen und ist von der Einführung der Baarzahlungen unzertr

Nun gibt es einerseits Staaten, welche ihre Baarzahlungen in Goldvalu
andererseits solche, welche dieselbe in Silbervaluta oder in den beiden Münzgat
zugleich decretiren. Man kann daher Gold-, Silber- und Doppelwährung untersc
In allen diesen Fällen bedarf es also der Voraussetzung einer gewissen Vollgi
der Gold-, bezw. Silbermünzen, mit Bezug auf die vereinbarte Werthrelation
das Princip der Baarzahlungen soll aufrechterhalten werden können. Da
repräsentirt aber in sich die Wertheinheit, nach welcher die Werthrelation de
zum Silber gemessen wird, und müssen dementsprechend die Silbermünzen
Silbergehalt aufweisen, welcher ihren Münzwerth im Verhältniss zum Golde
fertigt. Solange sich nun das thatsächliche Werthverhältniss zwischen Gol
Silber im Rahmen jener Durchschnittsrelation bewegt, welche für die Prägu
beiden Münzgattungen vereinbart wurde, leistet die Garantie der diesbe
betheiligten Mächte das Uebrige, um etwaige Werthdifferenzen im Verkehr
zugleichen. Erleidet jedoch das zur Prägung der Münzen festgesetzte Werthver
eine nennenswerthe Verschiebung auf dem Weltmarkte zu Ungunsten des
so wird hiedurch eine entsprechende Unterwerthigkeit der Silbermünzen
gebracht und auf diese Weise das Princip der Baarzahlungen mit Silbervalut
sorisch gemacht, indem diese Münzgattung nicht mehr den vollen Geltungsw
ihrem Silbergehalte rechtfertigt. Hiedurch muss nun auch das Recht der
Prägung beeinträchtigt werden, weil eine bestimmte Quantität ungemünzten
für einen bedeutend billigeren Preis beschafft werden kann, als die aus de
ausgeprägten Münzen in ihrem Geltungswerthe repräsentiren.

Mit der eingetretenen Unterwerthigkeit der Münzen ist aber auch die
dingte Einstellung der Baarzahlungen verbunden, weil in diesem Falle die Ein
der eingegangenen Verpflichtungen überhaupt nur durch Umprägung der M
auf den erforderlichen Werthgehalt ermöglicht werden könnte, welches Aus
mittel wohl bei der nicht ausgeschlossenen Wiederholung einer derartigen Z
lage kaum als durchführbar erscheint. Ein solcher Process hat sich nun thats
innerhalb der letzten Jahrzehnte vollzogen und mussten infolge dessen diej
Staaten, welche ihr Geldwesen auf Silberwährung basirt hatten, sowohl ihre
zahlungen, als auch die freie Prägung einstellen. Die beim Münzcongress festge
Werthrelation von 1 : 15½ zwischen Gold und Silber entspricht längst nicht
den Anforderungen, da seither dieses Verhältniss Veränderungen bis auf 1 :

n hat. In den letzten zwölf Jahren sind folgende Variationen des that-
Werthverhältnisses zwischen Gold und Silber zu verzeichnen gewesen.

Höchster Silberpreis in Pence per Standardunze	Werthrelation	Niedrigster Silberpreis in Pence per Standardunze	Werthrelation
$53\frac{13}{16}$	17·534	$48\frac{7}{8}$	19·305
$52\frac{7}{8}$	17·845	$51\frac{5}{8}$	18·277
53	17·803	$50\frac{7}{8}$	18·547
$52\frac{1}{2}$	17·972	50	18·871
$51\frac{1}{4}$	18·411	$50\frac{1}{8}$	18·809
$51\frac{3}{8}$	18·366	$49\frac{1}{2}$	19·062
50	18·871	$47\frac{7}{8}$	19·709
47	20·076	42	22·465
$47\frac{1}{8}$	20·023	$43\frac{1}{4}$	21·816
$44\frac{9}{16}$	21·174	$41\frac{5}{8}$	22·668
$44\frac{3}{8}$	21·263	$41\frac{15}{16}$	22·500
$54\frac{5}{8}$	17·273	$43\frac{5}{8}$	21·630

un der Werthrelation von $1:15\frac{1}{2}$ der Preis des Silbers von $60\frac{7}{8}$ Pence
rdunze entspricht, so kann man aus den während dieses Zeitraumes vor-
en Preisvariationen auf den sehr bedeutenden Werthverlust schliessen,
lbermünzen an ihrer Parität erlitten haben. Dieser Verlust hat nämlich
Maximum 32 Percent desjenigen Silberwerthes erreicht, auf dessen Grund-
Verthrelation von $1:15\frac{1}{2}$ stipulirt wurde. Daraus hat sich ein unhalt-
ältniss für diejenigen Staaten herausgebildet, deren Geldwesen auf Silber-
asirt war und übergingen infolge dessen die meisten zu anderen Währungen.
Deutschland im Jahre 1876 thatsächlich die reine Goldwährung ein,
ie Staaten der lateinischen Münzunion schon früher die Doppelwährung
hatten, welche derzeit gesetzlich in Frankreich, Italien, Belgien und der
steht. Thatsächlich ist diese aber auch nichts Anderes als eine Gold-
la infolge des Preisfalles des Silbers, die Silbermünzen welche ebenfalls
der Werthrelation von $1:15\frac{1}{2}$ geprägt sind, nur Geldwerthzeichen reprä-
nd daher in ihrer Beschaffenheit nur als Anweisungen auf einen bestimmten
zu betrachten sind. Dass dies auch wirklich der Fall ist, beweist schon
nd, dass in diesen Staaten die freie Silberprägung seit langer Zeit ein-
. Die übrigen europäischen Staaten mussten zu einem Auskunftsmittel
elches wohl nur als halbe Maassregel in Betracht kommen konnte, jedoch
m Stande war, zu Klärung der Situation beizutragen als die Abhängig-
Verthes der Geldzeichen von dem Silberwerthgehalt der Münzen aufgehoben
Ersatz dafür der Notenumlauf einfach durch Silberdeckung derart gerecht-
de, dass die Menge des für die Note auszubezahlenden Silbers eine variable
diese Weise wurde auch die geprägte Silbermünze zu einem metallenen
eichen degradirt, so dass deren Silbergehalt jede Bedeutung verlor. Wenn
die thatsächliche Einlösung der Noten in diesem Sinne nie zur praktischen
ung gelangen konnte, so war hiedurch dessen ungeachtet eine gewisse
geschaffen, welche der Veränderung der Werthrelation zwischen Gold und
n *Spielraum lassend,* den Geltungswerth der Noten dem Einflusse der

Variation des Silbermarktwerthes entzog. Dies konnte zwar die Einstellung sowo
der Baarzahlungen als auch der freien Prägung nicht verhindern, war jedoch geeign
die betreffenden Staaten in den Stand zu setzen, um eine abwartende Haltung b
zu jenem Zeitpunkte einnehmen zu können, in welchem ein Uebergang zur Gold
währung ohne besondere Schwierigkeiten zu bewerkstelligen sein würde.

Einer jener Staaten, auf welchen dieser Fall besonders zutrifft, ist Oesterreich
Ungarn. Der Preisfall des Silbers veranlasste die Regierung, um die Unterwerthigk
der Geldwerthzeichen zu verhindern, deren Deckung einfach in klingender Münze
decretiren. Infolge dessen entwickelte sich zwischen der in anderen Staaten eingeführt
Goldwährung und der österreichisch-ungarischen Währung ein neues Werthverhältn
welches seine Regulirung am offenen Markte erfuhr. Diese Relation richtete s
nach dem momentan vorhandenen Vorrath und Bedarf an Gold. Hatte das Ausl
an Oesterreich-Ungarn bedeutende Zahlungen zu leisten, so waren österreichis
ungarische Noten begehrt und stieg infolge dessen der Werth derselben im Verhäl
niss zum Golde. War jedoch eine grössere Nachfrage nach Gold, so äusserte s
dies in umgekehrter Weise. Die Folge hievon war ein fortwährendes Schwanken
Werthmaasses zwischen Gold und österreichisch-ungarische Währung, wodurch
unhaltbarer Zustand mit Bezug auf den Aussenhandel geschaffen wurde. Aber a
auf den Staatssäckel blieb dies nicht ohne nachtheilige Wirkung, indem der Go
bedarf für Zinsenzahlungen der Goldrenten jedesmalige Opfer erforderte. Der We
der österreichisch-ungarischen Noten wurde also ganz unabhängig von den Wer
schwankungen des Silbers, musste jedoch desto mehr unter denjenigen des Gol
leiden. So war seit mehr als drei Jahrzehnten die Monarchie dem Uebel einer
geregelten Geldwährung unterworfen. Weder Handelskrisen noch politische Wir
haben dem Handel und der Industrie Oesterreich-Ungarns derartige Verluste b
gebracht und diese in ihrer gedeihlichen Entwicklung derart gehindert, wie
Unsicherheit der Währung und die fortwährenden monetaren Schwankungen.
Regierungen Oesterreich-Ungarns mussten sich daher endlich entschliessen, die Be
gungen zu untersuchen, unter welchen der Uebergang zur Goldwährung ohne Bena
theiligung der inneren wirthschaftlichen Verhältnisse einerseits und der Staa
interessen andererseits zu bewerkstelligen wäre.

Zu diesem Behufe wurden vor allen Dingen unter Berücksichtigung ei
der wirthschaftlichen Opportunität entsprechenden Münzeinheit, Studien über e
diesbezüglich geeigneten Modus angestellt und gelangte man auf Grund e
gehender Untersuchungen zu dem Resultate, dass ein Hauptaugenmerk auf
Stabilisirung des Geldwerthes nach Aussen gerichtet und zugleich eine Veränder
desselben im Innern des Staates unter allen Umständen vermieden werden muss
Betreff der Kaufkraft der neuen Münzen im Auslande, fand man es für geboten,
Durchschnittsniveau einer Solchen während der letzten Jahrzehnte als Grun
anzunehmen, wodurch auch die Frage der Relation der Lösung nähergerückt w
Nun handelt es sich noch darum, die finanzpolitische Seite dieser Frage in z
mässiger Weise durchzuführen, um über das Stadium der Vorbereitungen hi
zukommen.

---

r Methode einer rationellen Handhabung der Brandschaden-Versicherung.

II.

Während wir in der vorigen Abhandlung über dieses Thema die allgemeinen
dlagen der Feuerversicherung unter Hervorkehrung derjenigen Mängel, welche
ezug auf deren Handhabung bestehen, einer näheren Betrachtung unterworfen
n, wollen wir nunmehr die meritorische Seite dieser Frage in's Auge fassen und
r Berücksichtigung aller diesbezüglich belangreichen Umstände, der praktischen
ndlung derselben näher treten.

Zuvor mögen jedoch in Kürze jene Factoren hervorgehoben werden, welche der
tzterer Zeit geübten oberflächlichen Beurtheilung der Brandschadenrisken Vor-
b leisten und auf diese Art die Unterbietung der Prämie indirect zu veranlassen
gnet sind. Die Grundlage der bisherigen Riskenschätzung liegt in der Eintheilung
Risken nach Gefahrenclassen mit entsprechender Fixirung der Grundprämie.
rend jedoch beim einfachen Gebäuderisiko die Gefahrenclasse allein maassgebend
tritt beim Fabrikenrisiko noch eine Cumulirung derselben mit der Risken-
orie nach Industrien ein, so dass für jeden Betrieb zuerst die demselben ent-
hende Kategorie in Betracht gezogen wird, die wieder in mehrere Gefahren-
n zerfällt, welche der speciellen Beschaffenheit des Objectes nach Bauart, Lage,
kmässigkeit der Betriebsanlagen, Wasservorrath, Löschvorrichtungen u. a. m.
geordnet sind. Ist nun in Bezug auf Sicherung der Anlage in irgend einer
etwas mehr gethan, als sonst im Rahmen der Anforderungen vorgesehen ist,
nn von derjenigen fixirten Grundprämie, nach welcher das betreffende Object
Gefahrenclasse gemäss taxirt wurde, ein bestimmter percentueller Nachlass
hrt werden. Hingegen kann dort, wo ausserordentliche Gefahrmomente das
erhöhen, ein percentueller Zuschlag zur Prämie erfolgen, falls es die Umstände
erheischen, eine höhere Grfahrenclasse als Grundlage der Schätzung anzu-
en. Im Principe wäre also dieser Modus wohl geeignet, den Anforderungen der
nschätzung Rechnung zu tragen, wenn nicht andere Einflüsse dem Wesen
lben Abbruch thun würden. Diesbezüglich ist ein Unterschied zu machen zwischen
n, welche ihren Ursprung in der unzureichenden Fixirung der die Gefahren-
n charakterisirenden Bedingungen besitzen, also in schädlichem Sinne den Spiel-
für die individuelle Auffassung derselben erweitern und denjenigen, welche
eits durch allzugrosse Classenunterschiede indirect eine laxe Beurtheilung der
n bewirken und andererseits durch Ausserachtlassung strikter Unterscheidungs-
male dem Wesen der willkürlichen Unterschätzung der ausserordentlichen Gefahr-
ente Vorschub leisten. Aber auch die Grundprämien für die verschiedenen
nkategorien und deren Gefahrenclassen entbehren der nöthigen Verlässlich-
schon aus dem Grunde, weil dieselben zum grössten Theile einer Schätzu
igen, deren empyrische Grundlage mit der Mannigfaltigkeit jener Risk
, welche den Rahmen der in jeder Beziehung dehnbaren Sonderhe
ausfüllen, *nicht in Einklang* zu bringen ist. Es ist dahe

Dingen die den eingeführten Kategorien im Allgemeinen und ihren Gefahrenc
im speciellen Sinne angemessene Grundprämie nur dann von einem Werthe,
derselben jene gewisse ihr zur Grundlage dienende Normalbeschaffenheit des
sprechenden Objectes, informirend angereiht ist, und was noch wichtiger, in
reichendem Maasse beobachtet wird. Es genügt hier nicht der allgemeine H
auf Bauart, Lage und sonstige Beschaffenheit der Betriebsanlage zur Beschr
des Normalzustandes eines mit einer bestimmten Grundprämie mit Bezug auf
Risiko geschätzten Objectes, da das individuelle Gutachten allein in seine
schiedenartigkeit schon einen bedeutenden Spielraum in Anspruch nimmt, w
an und für sich die Abhängigkeit des normirten Risikos von der Höhe der
Grundprämie gelockert wird; um wieviel mehr muss dies jedoch der Fall sein
eine dehnbare, eine ganze Gruppe der verschiedenartigsten Risken umfassende
flächliche Beschreibung eines mit einer bestimmten Gefahrenclasse correspondi
Objectes, der Willkür des Schätzenden noch mehr Vorschub leistet und auf
Weise die hier bezweckte annähernd gleichmässige Beurtheilung der Risken
sorisch macht. Es sind aber noch andere bedeutend wichtigere Umstände,
geeignet sind, das Wesen dieses Systemes ernstlich zu discreditiren. Die Beurtl
der zu erhebenden percentuellen Zuschläge oder Nachlässe hängt zumeist v
mehr oder weniger rigorosen Auffassung des Versicherers ab. Nun wird oft au
currenzrücksichten übermässige Coulance getrieben und so kommt es, dass
momente, welche einen Zuschlag zur Prämie involviren würden, einfach nach
und Nachlässe dort gewährt werden, wo dieselben gar nicht am Platze sin
kommt infolge dessen äusserst selten vor, dass zwei oder mehrere Versich
anstalten um ein und dasselbe Object mit annähernd gleichen Prämien conc
Die Taxirungen des Risikos sind im Gegentheile so grundverschiedener Art, da
aus denselben die gemeinschaftliche Schätzungsnorm gar nicht zu entnehmen
Lage ist.

Selbst im österreichisch-ungarischen Fabriken-Versicherungs-Theilungs-V
(Concordat), wo die Fixirung der jeweiligen Prämie auf Grund des zu überneh
Risikos gemeinschaftlich vorgenommen wird, sind die Ansichten der V
betheiligten in Betreff der Auslegung der Normen oft ganz entgegengesetzte
es daher kein Wunder, wenn bei kleineren, dem Concordate nicht untergeo
Risken sogar Fälle vorkommen, dass dieselben einmal in diese, das ander
jene Gefahrenclasse eingereiht werden. Derartige Abweichungen darf eine
schriebene Norm nicht gestatten, wenn dieselbe den an sie gestellten Anford
nur halbwegs Genüge leisten soll. Das Bestreben des Versicherers geht dahin,
Norm einen gewissen Anhaltspunkt für jene Grenze zu besitzen, unter welc
der Fixirung der Prämie nicht herabgegangen werden darf, wenn ein sicher
lust vermieden werden soll. Sind jedoch jene Bedingungen, deren Uebereinsti
mit der Beschaffenheit der Risken zum Zwecke der Beurtheilung derselbe
ihrer jeweiligen Gefahrenclasse, nothwendig ist, von solch unklarer, allen mö
Deutungen zugänglicher, rein vom individuellem Gutdünken abhängiger Ar
eine scharfe Unterscheidung ganz unmöglich wird, indem von der nöthigen p

ssung der Normen nicht nur bezüglich der allgemeinen Umstände, sondern auch sichtlich der denselben untergeordneten Factoren ganz abgesehen ist, dann wird diesem Wege die Tendenz der Prämienunterbietung künstlich gepflegt, da die ulaxe Fixirung der Normen eine noch laxere Beobachtung derselben erzeugt. len jene Normen für die Schätzung der Risken zum Zwecke der Prämienermitt-g eine hinreichende Basis bilden, dann muss die Eintheilung in scharf abge-nzter und instructiver Weise erfolgen, indem wohl bestimmte, jedoch verschie-en Umständen Rechnung tragende Bedingungen jene Richtschnur bilden, nach cher eine jeden Zweifel ausschliessende Classificirung der zu versichernden Ob-e möglich ist. Diese Normen müssen zugleich durch ihre vielseitige Ausführlich- in ihrer Darstellung den Versicherer zu gewissenhaften Erhebungen in Betreff Beschaffenheit der Risken veranlassen und durch Aufzählung der möglichen Fälle verschiedenen Gefahrmomente auf eine hinreichend rigorose Untersuchung und rtheilung derselben hinwirken. Zum Zwecke der Aufstellung derartiger Normen aber vor allen Dingen eine auf statistischer Grundlage beruhende gewissenhafte ebung der Intensität der einzelnen in Betracht kommenden Gefahrmomente noth-dig, welche durch entsprechende Combination bei der Riskenschätzung in An-dung zu bringen wäre. Hingegen müsste mit der eines bestimmten Anhalts-ktes entbehrenden, theils dem Gutdünken, theils der Willkür anheimgestellten hode der percentuellen Nachlässe, welche meistens als willkommener Vorwand Prämienunterbietungen dient, vollständig gebrochen werden, indem angemessen vorhandenen statistischen Hilfsmitteln, eine gewissenhaft ermittelte Minimal-ie für ein bestes Risiko einer jeden Gefahrenkategorie eingeführt werden könnte. r auch die sogenannten percentuellen Prämienzuschläge bilden im Wesen der enschätzung eine Anomalie, da jene in dieser Beziehung in Betracht kommen-Gefahrmomente zumeist nicht jene Würdigung erfahren, welche ihnen hinsicht-der Erhöhung des Risikos zusteht und überdies die für dieselben zu entrichtende rleistung ein geeignetes Object für die bereits erwähnten ungerechtfertigten Be-tigungen des Versicherten zur Bethätigung von Concurrenz-Maassnahmen bildet. dem Principe der percentuellen Nachlässe und Zuschläge ist aber der Modus Gefahrenclassen beim Gebäuderisiko einerseits und der mit denselben verbundenen striellen Riskenkategorien beim Fabriksrisiko andererseits enge verbunden, so dass dem Fallenlassen des Einen auch dem Anderen der Boden entzogen wird. Ob-r also eine gewisse Berechtigung der Grundlage dieser Methode in Bezug auf Eintheilung der Risken in Kategorien und Classen nicht geleugnet werden kann, deren Vervollständigung in Bezug auf Präcision und informirende Fassung zur rchführung gelangen würde, so ist dieselbe dennoch kaum geeignet, ihrem Zwecke und ganz zu entsprechen, weil jene derselben anhaftenden Mängel, welche offen- der Prämienschleuderei Thür und Thor öffnen, auch in diesem Falle nicht hoben werden können.

Nachdem wir nunmehr das Wesen der bisher gehandhabten Methode der Risken-ätzung in ausreichendem Maasse zergliedert haben, können wir dieselbe mit Hin-k auf die ihr *anhaftenden Mängel* einem Vergleiche mit dem von uns

schlagenen diesbezüglichen Systeme unterziehen. Während bei jener Methode d
Auffassung in Betreff der Intensität der einzelnen Gefahrmomente ein derartig
Spielraum gelassen wird, dass eine Berücksichtigung derselben bei der Feststellu
der Prämie rein dem Gutdünken des Versicherers anheimgestellt bleibt, bedin
unser System die namentliche Anführung der einzelnen wie immer gearteten Gefah
momente nach ihrer specifischen und relativen Beschaffenheit, dieselben einer str
gegliederten Classificirung nach ihrer jeweiligen Intensität unterwerfend. Auf di
Weise wird der Eigenthümlichkeit eines jeden Risikos vollends Rechnung getrag
und somit jenen Intentionen entsprochen, welche im Wesen der Riskenschätzung z
Ausdrucke kommen. Eine zufällige Ausserachtlassung irgend welcher Umstä
welche auf das Resultat der Schätzung einen Einfluss üben könnten, ist auf d
Art vollständig ausgeschlossen, da die schematische Zusammenstellung aller üb
haupt möglichen Gefahrmomente und deren generellen Abstufungen eine mögli
rigorose Untersuchung der zur Versicherung gelangenden Objecte förmlich aufdr

Aber auch in Bezug auf die zufälligen Ursachen, welche die Entstehung e
Brandes hervorrufen können, bietet dieses System die nöthige Handhabe, deren m
liche Einwirkung im Schätzungsresultate zur Geltung zu bringen, indem eine
dem Wege statistischer Ermittlung erzielte Art constanter kleiner Factoren („klei
Gefahrmomente") in Rechnung gelangt, deren Einfluss auf das Schätzungsre
insoferne zum Ausdrucke kommt, als in demselben mit der Anzahl und Inte
der Gefahrmomente auch die ziffermässig ausgedrückte Wahrscheinlichkeit der E
stehung eines Brandes durch Einwirkung zufälliger Ursachen in entsprechender W
sich vergrössert. Die Schätzung des Einflusses der einzelnen Gefahrmomente auf
Risiko überhaupt erfolgt mit Hilfe bestimmter Zahlenäquivalente, welche in
Intensitätenclassen zerfallend, dessen jeweilige Abstufung darstellen. Auf dem W
der einfachen Summirung der äquivalirten Gefahrmomente wird sodann die H
des zu übernehmenden Risikos durch eine Zahl (Gefahren-Aequivalentensumme
gestellt, mit deren Hilfe schliesslich unter Berücksichtigung einer bestimmten Gr
prämie, die gesuchte Prämie rechnungsmässig zur Ermittlung gelangt.

Hieraus ist zu ersehen, dass in diesem Systeme derjenigen Präcision Rech
getragen wird, welche in der bisherigen Methode der Riskenschätzung vermisst
obzwar eine solche für die richtige Beurtheilung der Risken unbedingt noth
ist. Dagegen sucht man hier vergebens nach überflüssigen Unterscheidungen,
in Bezug auf Gefahrenclassen oder industriellen Kategorien, wie wir selbe in
Methode vorfinden. Da nämlich beim Fabrikenrisiko die Art der jeweiligen Be
ohnehin schon eine Summe grösserer oder kleinerer Gefahrmomente bildet, so g
bestimmte, ein für allemal eingeführte Gefahrencoëfficienten, durch welche die M
malsumme der Gefahreinheiten der jeweiligen industriellen Riskenkategorien r
sentirt wird, um die nöthige diesbezüglich in Betracht kommende Grundlage für
allgemeine Riskenschätzung zu liefern. Auf diese Weise wird Alles vermieden,
die Beurtheilung des Risikos in Betreff der hiefür zu entrichtenden Leistun
pliciren könnte. Desto grösserer Werth wird jedoch auf die Verlässlichkeit be
der Untersuchung der Objecte nach ihrer Feuergefährlichkeit gelegt.

wirthschaftliche Seite der Valutaregulirung in Oesterreich-Ungarn.

Unsere bisherigen Auseinandersetzungen bezüglich dieser Frage haben daran, dass der eigentliche Zweck einer vorzunehmenden Regulirung in Oesterreicharn hauptsächlich in dem Bestreben liegt, den Schwankungen, welchen die Geldhzeichen im Auslande unterworfen sind, ein Ende zu machen oder mit anderen ten deren Werth nach Aussen zu stabilisiren. Während nämlich im Innern des tes in Folge des Einflusses der legislatorischen Gewalt der Werth des Geldes bestimmter, unveränderlicher bleibt, indem der gesetzlich zuerkannte nominelle ungswerth den substantiellen vollständig verdrängt, gelangen ausserhalb der nzen des Reiches Angebot und Nachfrage, unbekümmert um die internen Geldriffe zur Geltung, eine stetige Veränderung des Marktwerthes der Geldzeichen bekend. Das Gold als prädestinirtes Werthmaass des Geldes erfreut sich allein nur r relativen Stabilität, welche als das Ideal eines geregelten Geldwesens gilt. esichts dessen muss der Staat, um das vorgesteckte Ziel erreichen zu können, iner auf Goldvaluta basirten Währung überzugehen trachten, was jedoch nur r Berücksichtigung der bestehenden wirthschaftlichen Umstände in erspriesslicher se durchführbar ist. Es ist daher nothwendig den Ursachen welche dieses wanken des Geldwerthes unter den derzeit bestehenden wirthschaftlichen Vernissen des Reiches als besonderen Nachtheil erscheinen lassen, etwas näher treten. In gewisser Beziehung kann es nicht geleugnet werden, dass es für im Aufsteigen begriffenes Staatswesen vom wirthschaftlichen Standpunkte ein theil ist, wenn dasselbe nicht vollends dem Ansturme des Weltmarktes preiseben ist, und in den Einrichtungen seines Geldwesens ein gewisser Schutzwall en den Wellenschlag desselben besteht. Die ungeregelte Valuta besitzt nämlich auch en gewissen Vortheil, indem dieselbe eine Art Ventil in jener Beziehung bildet, dass elbe keinen allzugrossen Import zum Durchbruche kommen lässt. Wird zeitlig viel herein importirt, so entsteht eine grosse Nachfrage nach Gold, als jenem Auslande gegenüber gebräuchlichen Zahlungsmittel, wodurch der Werth der rreichisch-ungarischen Staatsnoten im Course sinkt. Dies kann jedoch nur insoge der Fall sein, bis jenes Niveau erreicht wird, auf welchem sich angesichts der erwerthigkeit des Geldes der Import zu rentiren aufhört, so dass hierin ein sses Schutzmittel gegen allzugrosse Concurrenz des Auslandes gegenüber den en Erzeugnissen zum Ausdrucke kommt. Was sich jedoch hier als Wohlthat ie Industrie und den Handel des Landes erweist, gereicht demselben andererwieder zum Schaden. Es vollzieht sich nämlich im Falle eines starken Exportes mgekehrte Process, indem sich aus Gründen eines solchen eine grosse Nachnach österreichisch-ungarischen Noten im Auslande herausbildet, wodurch deren steigt. In Folge dessen wird nun bald auch jenes Niveau erreicht, bei welchem der Ankauf unserer Waaren für das Ausland zu rentiren aufhört, so dass wieder grösserer Import eintreten muss, um einen ausgiebigen Export zu ermöglichen. *Variabilität des Werthes der Geldzeichen* bedeut-

also eine Beschränkung in der wirthschaftlichen E
wicklung des österreichisch-ungarischen Staates,
zwar insoferne, als dessen wirthschaftliche Reife
ausgesetzt werden muss.

Was nun die Art der Durchführung für eine derartige Stabilisirung des
werthes anbelangt, kommt neben der Frage einer activen wirthschaftlichen
noch eine Anzahl anderer mehr oder weniger wichtiger Factoren in Betracht,
ihrer Beschaffenheit nach, je einer besonderen fachlichen Erwägung bedürfen.

Eines der schwierigsten Probleme in dieser Beziehung ist dasjenige, w
die Bestimmung des relativen Werthes zwischen altem und neuem Währung
betrifft. Nicht nur der finanzpolitische, sondern auch der juristische Standpun
hier von besonderem Belang. Hinsichtlich des ersteren handelt es sich vorde
darum, eine Münzeinheit für die neue Währung festzustellen, welche derjenige
alten Währung gegenüber proportional wäre, d. h. das Verhältniss der beiden
einheiten müsste ein derartiges sein, dass hiedurch das Werthmaass der ursp
lichen Währung im inneren Verkehre nicht verschoben werde. In zweiter
kommt sodann die Frage desjenigen Werthes in Betracht, welchen die alte
währung zur Zeit der monetaren Transaction am offenen Markte besitzt.

Aber auch in anderer Beziehung ist es nothwendig, dem Wesen der f
setzenden Relation zwischen der ursprünglichen Währung einerseits und der
einzuführenden andererseits die nöthige Aufmerksamkeit zuzuwenden. Währe
Innern des Reiches blos darauf Rücksicht genommen zu werden braucht, das
in der alten Währung contrahirten Schulden nach Einführung der neuen Wä
mit Geldquoten von gleicher Kaufkraft zurückgezahlt werden können, so dass
dem Schuldner noch dem Gläubiger irgend ein Vortheil zugewendet wird, i
nothwendig, dem Auslande gegenüber, zu welchem der Staat ebenfalls in
Schuldverhältnisse sich befindet, neben einem diesbezüglich gleichen Standp
auch denjenigen einer strengen Rücksichtnahme des mittleren Marktwerthe
alten Währung einzunehmen. Es sind daher bei der Feststellung der Relation zw
dem alten und dem neuen Gelde hauptsächlich zwei verschiedene Bedingung
erfüllen, und zwar diejenige der Aufrechterhaltung einer absoluten Gleichwert
desselben in Betreff der Kaufkraft im Innern des Reiches und jene der Fi
eines dem mittleren Marktwerthe entsprechenden Goldgehaltes der neuen M
welcher gleichbedeutend ist mit deren Kaufkraft im Auslande. Wir haben e
bei der alten Währung mit einer äusseren und einer inneren Kaufkraft zu
Die Erstere, eine durch die Staatsgewalt decretirte unveränderliche Basis b
besitzt blos im Innern des Reiches Geltung, hingegen kommt die Letztere, a
durch den jeweiligen Marktwerth der Münzen, beziehungsweise durch deren Bes
gung mittelst Geldwerthzeichen gerechtfertigte börsenmässige Schätzung, auss
der Grenzen desselben in Frage. Nun handelt es sich bei der einzuführenden
Währung offenbar darum, diesen Unterschied zwischen innerer und äusserer
kraft zu beseitigen, was nur auf jene Weise möglich ist, dass der Geldwerth i
halb der Grenzen des Reiches nicht blos decretirt, sondern auch thatsächlich

inneren Goldgehalt der Münzen, beziehungsweise durch die für dieselben aus-
ebenen Werthzeichen repräsentirt werde. Auf diese Art wird eine Uebereinstim-
ng des Geldwerthes innerhalb und ausserhalb der Grenzen des Reiches erzielt, in
chem Umstande das wichtigste Attribut eines geordneten Geldwesens erblickt
den muss, da hiedurch jener Bedingung Rechnung getragen wird, unter welcher
Aufnahme der Baarzahlungen und der freien Prägung zur Durchführung ge-
en kann.

Was nun die juristische Seite dieser Frage anbelangt, so mag die diesbezüg-
e Aeusserung eines unserer hervorragendsten Juristen des Professors Dr. C. S.
nhut hier Raum finden. In einer Abhandlung unter dem Titel „Die rechtliche
e des Währungswechsels" sagt derselbe: „Der Eingriff, den die Staatsgewalt
ch eine vollständige Aenderung der Währung im Staate, zum Beispiel durch den
ergang von der Silberwährung zur Goldwährung in alle vermögensrechtlichen
hältnisse macht, lässt eine Reihe von Problemen hervortreten, deren Lösung für
Rechtsordnung von einschneidender Bedeutung ist und zum Theile von der
htswissenschaft erwartet werden darf.

In erster Linie ergibt sich die Frage, ob die Staatsgewalt überhaupt berechtigt
einen fixen Maassstab für die Umrechnung des alten Währungsgeldes in das
e Währungsgeld durch eine Rechtsnorm aufzustellen? Diese Frage ist ohne
eifel zu bejahen. Schon wegen der von dem Staate selbst contrahirten Schulden
ihrer Verzinsung, wegen der Gehalte, wegen der Steuern, Geldstrafen u. s. w.
s sich die Staatsgewalt in transitorischen Vorschriften über das Werthverhältniss
ern und durch Aufstellung eines Maassstabes für die Umrechnung eine Brücke
der alten Währung zur neuen Währung schlagen. Für eine solche Verpflichtung
Staatsgewalt spricht auch folgende Erwägung: Die Staatsgewalt entzieht in Aus-
ng ihres Hoheitsrechtes zur Wahrung der öffentlichen Interessen den Münzen
bisher geltenden Währungsmetalles die Geldqualität und wählt ein anderes
all, das in Zukunft als Geld dienen soll; sie verfügt zum Beispiel, dass man
bisher in Silber ausgeprägten Münzen nicht mehr in Zahlung nehmen müsse,
dern dass ausschliesslich Münzen aus Gold die Eigenschaft eines allgemeinen,
etzlichen Zahlungsmittels haben sollen. Die Staatsgewalt ist daher verpflichtet,
bisher geltende Währungsgeld, das von ihr durch Aufdrücken des Prägestempels
einem gewissen Zahlungswerthe im Inlande ausgestattet war, einzulösen und
en Münzen neuer Währung umzutauschen; sie muss demnach, um Streitigkeiten
der Umwechslung des alten Währungsgeldes in das neue Währungsgeld aus-
chliessen, für Rechtsvorschriften sorgen, durch welche in autoritativer Weise fest-
etzt wird, wie viel in neuem Währungsgelde für das alte zu geben sei.

Die Staatsgewalt ist aber auch sowohl bei der Frage, welcher Maassstab für
Umrechnung feszustellen, als auch bei der Frage, welcher Zeitpunkt für diese
stellung maassgebend sei, an gewisse juristische Gesichtspunkte gebunden.

In ersterer Beziehung muss die Staatsgewalt, wenn sie sich nicht einer unge-
ten Benachtheiligung der Besitzer des alten Geldes schuldig machen soll, von
Erwägung *ausgehen, dass das* alte, in Silber ausgeprägte Geld, obwohl es durch

den Währungswechsel die juristische Eigenschaft des Geldes verliert, nicht etw
als Waare zu seinem Metallwerthe, gleichsam zu seinem Abbruchwerthe als
metall, in Betracht komme, sondern zu seinem, wenn auch den Metallgehalt
steigenden Nennwerthe, also zu jenem höheren Werthe, den die unter öffent
Garantie ausgeprägten Silbermünzen durch die staatliche Autorität bisher empf
hatten. In letzterer Beziehung, rücksichtlich des Zeitpunktes für die Festst
des Werthverhältnisses, entscheidet der Gesichtspunkt, dass das Silbergel
zum Zeitpunkte des Ueberganges zur Goldwährung die Eigenschaft des Wäh
geldes behält, daher trotz thatsächlicher Schwankungen im Werthe des S
metalles, welche den wirthschaftlichen Werth einer Silbergeldsumme geändert
mögen, in den Augen des Gesetzgebers wenigstens fictiv bis zum Zeitpunk
Währungswechsels einen sich gleichbleibenden Geldwerth, einen ständigen No
werth hat, so dass das durch volkswirthschaftliche Untersuchung zu ermit
Werthverhältniss zu diesem Zeitpunkte maassgebend sein muss.»

In der deutschen Wissenschaft (Knies, Goldschmidt, Hartmann, Bekker u
wird einstimmig anerkannt, dass die Staatsgewalt, um ihrer Aufgabe gemäss
flicten vorzubeugen verpflichtet sei, eine feste Norm für die Umrechnung der
alten Währung contrahirten Schulden in neue Währung aufzustellen; ferner,
auch für die Fixirung des bezüglichen Umrechnungsmaassstabes das Werthverh
zwischen Gold und Silber zur Zeit des Währungswechsels selbst maassgeben
müsse. Es bleibt daher für den Volkswirth nur noch die Frage offen, wie die ri
Relation zwischen Gold und Silber zu finden sei, ob man sich dabei auf eine
stimmten Zeitpunkt beschränken könne oder ob man die zeitlichen Grenzen
ausdehnen und den Durchschnitt eines ganzen Zeitraumes ziehen müsse, un
gross dieser Zeitraum zu sein habe, wie hoch einerseits die Entwerthung zum
spiel des Silbermetalles gerade durch die Thatsache der Demonetisirung des S
und andererseits die Steigerung im Preise des Goldmetalles eben wegen seiner
Function als Währungsmetall zu veranschlagen sei, und welche Rechnungsfa
sonst in Betracht zu ziehen seien, um einen von zufälligen Momenten mög
unabhängigen, nur durch die Wirksamkeit der natürlichen wirthschaftlichen I
auf den Weltmarkt beeinflussten Courswerth zu finden, so dass jede auf Ausbe
des in Aussicht stehenden Währungswechsels gerichtete dolose Berechnung ve
werden könnte und eine etwa künstlich herbeigeführte Wertherhöhung des
Metalles ausser Betracht bliebe. Dem Resultate dieser volkswirthschaftliche
wägungen steht zwar die Staatsgewalt in freier Stellung gegenüber, allein sie
nicht im Einklange mit ihrer Würde handeln und gerechtem Tadel verfallen,
sie das volkswirthschaftlich begründete Werthverhältniss willkürlich etwa zu Gu
des neuen Währungsgeldes verrücken und so sachlich Verwerfliches im Gesetzgeb
wege bestimmen würde.*)

*) Bei der ersten Einführung des Werthverhältnisses von 1 : 15½ im französischen I
wesen 1785 wurde das Verhältniss für das Gold erheblich günstiger gestellt, als es sich
dem Handel damals ergeben hatte. In Deutschland wurde 1871 das Verhältniss von 1 : 15½
auffallend geringer Meinungsverschiedenheit angenommen. (Nasse in Schönberg, „Handbuch
politischen Oekonomie". Bd. I, S. 389.)

ie Beziehung zwischen der Todesfall-Versicherungsprämie und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente.

Aus der Art, nach welcher in unseren bisherigen Abhandlungen betreff der tersuchung der versicherungstechnischen Grundlagen und ihres Wesens vorangen wurde, lässt sich entnehmen, dass hier nebst der wichtigen Frage einer senschaftlichen Klärung derselben, noch ein höheres Bestreben vorliegt, um dessen llen jene mathematisch analytischen Auseinandersetzungen unter Zugrundelegung Problemen rein mathematischer Beschaffenheit gepflogen wurden. Es handelt h hier nämlich um die geometrisch-analytische Darstellung der zwischen den zelnen versicherungstechnischen Functionen bestehenden Beziehungen, mit deren fe es möglich gemacht werden könnte, die langwierigen Rechnungsmethoden in Lebensversicherungstechnik entbehrlich zu machen. Wohl ist es ein schweres ück Arbeit, an welches wir uns hier heranwagen, doch ist zu hoffen, dass die sultate unserer wissenschaftlichen Forschungen uns hiezu die nöthige Handhabe bieten im Stande sein werden.

Die Idee, die versicherungstechnischen Functionen eirer geometrisch-analytischen thode zu unterordnen, ist nicht neu, und haben sich bereits viele hervorragende hmänner mit dieser Frage befasst, doch scheiterte dieses Bestreben immer an der verwendbarkeit der diesbezüglich ermittelten Resultate im praktischen Sinne, em die Formen, in welchen die entsprechenden Beziehungen mathematisch zum sdrucke gelangten, höchst complicirter Natur waren.

Auch die unsererseits ermittelten Relationen leiden bis zu einem gewissen de an jenem Mangel praktischer Verwendbarkeit, doch sind wir bereits in der ge, deren geometrisch-analytische Bedeutung festzustellen und dieselbe dem nnten Zwecke dienstbar zu machen, wodurch es uns möglich wird, wichtige ationen in einfacher, rein algebraischer Form zum Ausdrucke zu bringen. Währendm also unsere bisherigen Erörterungen in Betreff der Beziehungen zweier oder hrerer versicherungstechnischer Functionen sich blos in jenem Rahmen bewegten, erhalb dessen wohl das Wesen einer bestimmten Gesetzmässigkeit constatirt rden konnte, jedoch angesichts der Form in welcher diese Eigenschaft als mathetische Relation zum Ausdrucke gelangte, für die praktische Anwendung im genten Sinne ungeeignet erschien, treten wir hier mit einer zwischen zweien derligen Functionen bestehenden Beziehung hervor, welche das Gesetz der gegenigen Abhängigkeit derselben betreffend, in einer rein algebraischen Form zur rstellung gelangt.

Die Beziehungen, welche zwischen der Zahl der Lebenden L_x und der ferneren rscheinlichen Lebensdauer w_x einerseits, sowie der discontirten Zahl der Lebenden und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente M_x andererseits bestehen, sind rtiger Beschaffenheit, dass dieselben nur durch Vermittlung einer dritten iablen, nämlich des Alters x einer mathematischen Form untergeordnet werden nen, deren Wesen jedoch schon an und für sich die praktische Anwendung in etem Sinne nicht *zulässt, weil* man es hier mit einer Art Differentialgleichungen

zwischen dreien Unbekannten zu thun hat, von denen jede die Function je einer d. beiden Anderen ist. Erst durch Combination zweier oder mehrerer derartiger Relationen ist es möglich, durch Elimination einer der Unbekannten, eine direkte Beziehung zwischen den beiden Uebrigen zu erzielen, welche jedoch auch dann noch der nöthigen mathematischen Untersuchung bedarf, um ihrer complicirten Form entkleidet zu werden.

Ein auf diese Weise ermitteltes Resultat bildet die in der Abhandlung: „Zur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes" V. in der Formel 34 dargestellte Relation zwischen der Todesfall-Versicherungsprämie und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente.

Dieselbe besitzt eine continuirliche Beschaffenheit und lautet bekanntlich

$$1)\qquad p_x = S\left(\frac{1}{M_x} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

indem hierin p_x die in beliebigen, jedoch gleichen Intervallen zu leistende Todesfall-Versicherungsprämie, M_x die Mise einer lebenslänglichen vorschussweisen Leibrente gleicher temporärer Beschaffenheit, S die Versicherungssumme und r den jeweiligen Aufzinsungsfactor bezeichnet, wobei blos die beiden ersteren Grössen variabler Natur sind, hingegen S und r constant bleiben. Diese Form entspricht offenbar der Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Hauptaxe zur Abscissenaxe unter dem Winkel von 45° geneigt ist und welche bekanntlich folgendermassen lautet:

$$2)\qquad (\xi - \alpha)\,(\eta - \beta) = \frac{a^2}{2}$$

Hierin bezeichnet nun ξ die Abscisse und η die Ordinate, während α, β und constante Grössen darstellen. Nimmt man nun zur Vereinfachung der Rechnung den Werth der zugrundegelegten Versicherungsumme mit $S = 1$ an, so ergibt sich folgende dieser Gleichung entsprechende Schreibweise für die Form 1)

$$3)\qquad \left(p_x - \frac{1}{r} + 1\right) M_x = 1$$

so dass die Abscisse durch p_x, die Ordinate durch M_x und die Constanten durch die Werthe

$$\alpha = \frac{1}{r} - 1, \qquad \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad a = \sqrt{2}$$

zur Darstellung gelangen. Angesichts dessen nun, dass $r = 1 + \frac{Q}{100}$ bedeutet, wobei Q den jeweilig zugrundegelegten Zinsfuss repräsentirt, wird $\frac{1}{r}$ stets kleiner als 1 sein müssen und daher α immer negativ sich ergeben. Aus diesem Grunde befindet sich der Mittelpunkt der in Betracht kommenden hyperbolischen Curve in der negativen Sphäre der Abscissenaxe und zugleich, da $\beta = 0$ ist, innerhalb derselben. Es frägt sich nun, welcher Theil derjenigen Periode entspricht, welche die Lebensdauer des Menschen umfasst. Zur Beantwortung dieser Frage ist es nothwendig, sich vor Augen zu führen, dass die Mise einer vorschussweisen blos einmal fälligen

. Bei einem Minimum der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer, also im Alter, wird die zu leistende maximale Todesfall-Versicherungsprämie mit alen Mise 1 correspondiren. Setzt man daher $M_x = 1$, so ergibt sich für erth

$$p_x = \frac{1}{r}$$

ale Prämie für die präliminirte Versicherungssumme $S = 1$.

n auch nicht das technische, so doch das mathematische Minimum der ferner $p_x = 0$ dem das mathematische Maximum von

$$M_x = \frac{r}{r-1}$$

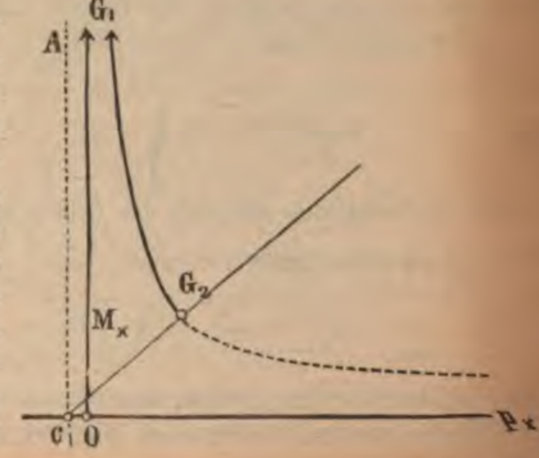
welches die Mise einer ewigen vorschussweisen Leibrente repräsentirt. erwogen, dass in diesem Punkte, welcher durch jene beiden Werthe ist, die Ordinatenaxe mit der Hyperbel zum Schnitt kommt, weil deren t ausserhalb der Ordinatenaxe sich befindet, welche in Folge dessen zwischen und die durch deren Mittelpunkt gehende Asymptote zu liegen kommt, man zu dem Schlusse, dass der in der positiven Sphäre sowohl der Ordi- auch der Abscissenaxe liegende Curvenflügel zwischen den Grenzen

$$p_x = 0 \qquad \text{und} \qquad p_x = \frac{1}{r}$$

die Werthe $M_x = \frac{r}{r-1}$ und $M_x = 1$

iren, den Anforderungen unserer Aufgabe entspricht. Währenddem nun die e, wie bereits constatirt worden, im Schnittpunkte der Ordinatenaxe mit bel liegt, fällt der andere Grenzpunkt mit dem Pole der Hyperbel zu- la jener Punkt, dessen Ordinate $M_x = 1$ ist, diesen Pol repräsentirt. Man her zu dem Resultate, dass der sich an die Ordinatenaxe anlehnende Theil positiven Sphäre liegenden Curvenflügels vom Pol angefangen bis zum kte mit der Ordinatenaxe der Beziehung zwischen der Todesfall-Versiche- ie und der Mise einer lebenslänglichen Leibrente in mathematisch genauem echt wird.

Nebenstehendem gelangt dieser bildlich zur Darstellung, in- die Abscissen- und $O M_x$ atenaxe repräsentirt, während d $c p_x$ die beiden dem Curven- sprechenden Asymptoten und e Hauptaxe der Hyperbel zum gelangt. Der Pol G_2 der sowie der zwischen der Curve dinatenaxe angedeutete Schnitt- bilden diejenigen Grenzen, zwi- chen die Curve der Beziehung p_x und M_x Genüge leistet. Auf



dieser Grundlage wollen wir nun versuchen, auch die Beziehung zwischen der fall-Versicherungsprämie und der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer i licher Weise zur Darstellung zu bringen.

Die wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x lässt sich offenbar auch a allgemeinen Rentenform ableiten, indem

$$M_x = \cdot \frac{r}{r-1} \cdot \frac{r^n - 1}{r^n} \tag{4}$$

gesetzt wird, worin also n die in Betracht kommende Dauer der Rente bez Da nun die Dauer einer lebenslänglichen Leibrente mit der ferneren wahi lichen Lebensdauer übereinstimmt, so ergibt sich für diesen Fall $n = w_x$ un

$$w_x = 1 - \frac{l\left(r - M_x\,(r-1)\right)}{l\,r} \tag{5}$$

daraus ergibt sich nun nach Zuhilfenahme der Form 1) die Relation zwiscl Todesfall-Versicherungsprämie und der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer, in der Gleichung

$$(r^{w_x} - 1)\; p_x = \frac{r-1}{r} \tag{6}$$

zum Ausdrucke kommt, welche ihrer geometrisch-analytischen Beschaffenheit eine Art logarithmischer Curve darstellt.

In der Formel 17) der bereits genannten Abhandlung finden wir ferne falls eine Relation zwischen der Mise und der ferneren wahrscheinlichen dauer, welche folgendermassen lautet

$$\frac{d\,l\left(\text{Const.} - \int e^{-\int \frac{dx}{w_x}} \frac{dx}{w_x\, r^x}\right)}{d\,x} = -\frac{1}{M_x} \tag{7}$$

Verbindet man nun dieselbe mit der aus der Form 4) sich ergebenden

$$-\frac{1}{M_x} = \frac{r-1}{r} \cdot \frac{r^{w_x}}{1 - r^{w_x}} \tag{8}$$

so ergibt sich eine zwischen dem Alter x und der ferneren wahrscheinlichen dauer bestehende Relation von der Form

$$\text{Const.} - x = \int \frac{\frac{r^{w_x}}{r^{w_x} - 1} \cdot l\,r - \frac{1}{w_x} - l\,r}{\frac{r^{w_x}}{r^{w_x} - 1} \cdot \frac{r-1}{r} - \frac{1}{w_x} - l\,r} \cdot dw_x \tag{9}$$

wobei das Verhältniss zwischen den beiden hier in so merkwürdiger Weise in l kommenden Coëfficienten $l\,r$ und $\frac{r-1}{r}$ durch die Gleichung

$$l\,r - \frac{r-1}{r} = \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^2}{2\,!} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^3}{3\,!} + \frac{\left(l\,\frac{1}{r}\right)^4}{4\,!} \cdots\cdots$$

zum Ausdrucke gelangt, deren wesentlicher Einfluss sich bereits in den Form *bis 33)* der wiederholt erwähnten Abhandlung geltend gemacht hat.

etrachtungen über die Effectenbelehnung vom Standpunkte des bankmässigen Verkehres.

Eine der wichtigsten Institutionen, welche berufen ist, die Regulirung des Geld-aufes im Staate zu vermitteln, ist die bankmässige Effectenbelehnung, Lombard annt. Der Capitalist, welcher sein Vermögen in Werthpapieren anlegt, um das-e zinstragend zu verwerthen, kommt oft in die Lage, seinen momentanen Bedarf baarem Gelde sich dadurch zu beschaffen, dass er einen angemessenen Theil er Anlagepapiere bei einem Bankinstitute belehnen lässt und demselben für den geliehenen Betrag eine angemessene Verzinsung leistet. Auf diese Weise wird es n Capitalisten möglich, seine Werthpapiere, welche er sonst zum Zwecke der rgeldbeschaffung vielleicht mit bedeutendem Coursverluste hätte veräussern ssen, wieder einzulösen und in seinem Besitze solange weiter zu behalten, bis es seinem Vortheile liegt, sich derselben zu entledigen. Eine besondere Art der ctenbelehnung ist der sogenannte börsenmässige Report, dessen Wesen sich in cher Beziehung von dem ersteren Modus unterscheidet. Während nämlich die fache Effectenbelehnung sich blos auf Titres beschränkt, welche durch ihre geringe rsvariation sich zur Anlage besonders eignen und infolge dessen eine stetig hin-chende Deckung zu bieten im Stande sind, umfasst das Reportwesen die Spiel-iere im Allgemeinen, welche ihrer oft enormen Werthveränderung halber, die im Laufe einer verhältnissmässig kurzen Frist zu vollziehen vermag, im Falle r Belehnung, trotz eines den jeweiligen Courswerth weit unterbietenden Dar-ensbetrages, eine Art Risiko bilden, welches eine besondere Gegenleistung des rlehens-Contrahenten involvirt. Indem nun bei der gewöhnlichen Effectenbelehnung s eine Verzinsung des dargeliehenen Betrages erfolgt, kommt demgemäss beim port ausserdem noch eine Risikoprämie in Betracht, welche der Reportgeber recte rlehenscontrahent, an das Bankinstitut zu leisten bemüssigt ist.

Aber auch in anderer Beziehung ist ein Unterschied zwischen diesen beiden lehnungsarten zu verzeichnen. Bei Belehnung des einfachen Anlagepapieres steht dem Contrahenten, wenn es sich nicht um einen besonders hohen Betrag handelt, i, die Belehnungsfrist bis zur Dauer eines ganzen Semesters selbst zu bestimmen, hrend beim Report im Gegentheile das Bankinstitut dasjenige ist, welches den ckzahlungstermin normirt, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil einerseits rch eine längere Frist das zu tragende Risiko erhöht wird und andererseits die nk ihre Mittel, welche durch den Report in mehr oder weniger bedeutendem asse in Anspruch genommen werden, nicht allzulange gebunden wissen will. An-ichts dessen ist die Speculation stets auf die Mittel angewiesen, welche derselben den Bankinstituten zur Verfügung gestellt werden. Die Stückezahl der Effecten, che an der Börse im Laufe einer gewissen Frist zum Zwecke des Differenzspieles auft und verkauft wird, übersteigt weit die thatsächlich vorhandene Menge und s daher in gewissen *festgesetzten* Terminen das Revirement des Börsengeschäftes

arrangirt werden. Dieser Vorgang besteht nun darin, dass die von ein und derselben Person einerseits lieferbaren und andererseits zu beziehenden Stücke in sich ausgeglichen werden, hingegen der Ueberschuss der Ersteren oder der Letzteren effectiv geliefert, bezw. übernommen werden muss. Auf diese Weise wird das einfache Börsenspiel von Zeit zu Zeit in die legalen Grenzen der Speculation zurückgedrängt. Nun fehlt es aber der Speculation oft an den Mitteln, um sich einerseits die nöthigen effectiven Stücke zur Lieferung zu beschaffen, und andererseits die zu beziehenden baar zu begleichen, so dass die Bankinstitute und die sonstigen finanziellen Kräfte ihre frei verfügbaren Capitalien zur Verfügung stellen müssen, um dieselbe nicht nothleidend werden zu lassen, da auch sonstige öffentliche Interessen von einer etwaigen derartigen Katastrophe in Mitleidenschaft gezogen werden könnten.

Auf dieser Grundlage beruht nun das Wesen der Effectenbelehnung im börsenmässigen Sinne, indem effectiv übernommene Stücke zur bankmässigen Belehnung gelangen, wodurch es möglich wird, durch einen Bruchtheil ihres Werthes deren Uebernahme zu bestreiten. Die mobilen Geldmittel der Banken unterliegen aber in ihrem Umfange ebenso einer Veränderlichkeit, wie diejenigen der allgemeinen Speculation, da die Bankinstitute blos als vermittelnde Factoren zwischen ihren Creditoren und Debitoren fungiren. Im Laufe des Jahres gibt es nämlich gewisse Zeitperioden, in welchen der allgemeine Bedarf an Baargeld eine ausserordentliche Ausdehnung gewinnt. Fällt nun derselbe mit einem jener Zeitpunkte zusammen, in welchem die Zinsen der Anlagewerthe in grösserem Umfange fällig werden, dann wird der Mehrbedarf an Umlaufsmitteln durch die flüssig werdenden Capitalien mehr oder weniger ausgeglichen. Anders verhält es sich jedoch ausserhalb eines solchen Zeitpunktes, wo der öffentliche Geldverkehr auf die Capitalsmittel der Bankinstitute angewiesen ist, indem dieselben zu Lombard- und Escompte-Zwecken in Anspruch genommen werden. Abgesehen davon, dass in einer solchen Periode auch ein anderweitiges Abströmen der den Bankinstituten zur Verfügung stehenden Mittel, wie die und Spareinlagen, Baardepots u. a. m. stattfindet, kommen noch jene Factoren in Betracht, welche bei allgemeiner Geldknappheit das Flüssigmachen engagirter Capitalien erschweren. Unter solchen Umständen treten daher an ein Institut Anforderungen heran, welche geeignet sind, die finanzielle Leistungsfähigkeit eines solchen in ausserordentlicher Weise in Anspruch zu nehmen, weshalb Vorsorge getroffen werden muss, um Verlegenheiten, welche sich aus einer allzustarken Inanspruchnahme der Bankmittel ergeben könnten, zu verhüten.

Wie das Wesen eines jeden Handelsgeschäftes in Nachfrage und Angebot besteht, so macht sich auch hier dieses ausgleichende Princip geltend, indem bei grösserem Abströmen von Baarmitteln zu Lombard- und Reportzwecken der diesbezügliche Darlehenszinsfuss erhöht wird. Indem hiedurch die Bedingungen der Geldbeschaffung auf diesem Wege erschwert werden, wird dem übermässigen Abströmen der Bankmittel Einhalt gethan und dasselbe den Grenzen der Zulässigkeit untergeordnet. Dies allein ist aber nicht hinreichend, um ein Bankinstitut vor eventuellen Ueberraschungen, welche durch plötzliche Entnahmen bedeutender Baardepots aus den Cassen desselben entstehen können, zu schützen. Es muss daher an ei-

serve gedacht werden, welche meistens darin besteht, dass ein Theil der Capi-
ien derart investirt ist, dass derselbe ohne Verlust rasch in baares Geld umge-
zt werden kann. Eine derartige leicht reducirbare Capitalsinvestition ist der bank-
ssige Wechselescompte. Ein Institut, welches in seinem Portefeuille eine ent-
echende Anzahl bankfähiger Wechsel besitzt, kann dieselben ohne Schwierig-
ten durch Reescompte in Baargeld umsetzen, indem sie dieselben mit ihrem Giro
sieht. Nun wirft sich unwillkürlich die Frage auf, wie es möglich ist, angesichts
er grösseren Geldknappheit, während welcher alle Bankinstitute und sonstige
anzkräfte gleich stark in Anspruch genommen sind, durch Reescompte auf so
hte Weise sich Geld zu beschaffen. Zur Beantwortung dessen mag folgende Aus-
andersetzung dienen: Da der Bedarf eines grösseren Geldumlaufes nur durch die
hrausgabe einer entsprechenden Menge an Geld beziehungsweise Noten gedeckt
rden kann, so laufen alle Fäden des Geldmarktes jeweilig dort zusammen, wo die
enausgabe erfolgt. Angesichts dessen nun, als der Staat, welcher allein das Recht
Noten zu emittiren, sich nicht mit bankmässigen Geschäften befassen kann, so
das moderne Staatswesen eine Art von Centralbanken geschaffen, welche mit dem
ilegium der Notenausgabe und Münzprägung ausgestattet sind, wobei naturgemäss
isse Cautelen bestehen, welche die Grenzen der Ausübung dieses Privilegs
en. Auf diese Weise ist es möglich, den Geldumlauf im Staate den Anforde-
gen entsprechend zu reguliren. Zugleich mit diesem Rechte übernimmt nämlich
derartiges Noteninstitut gewisse Verpflichtungen, welche angepasst den wirth-
ftlichen Bedürfnissen des Staates, bestimmt sind, das Creditwesen im Innern
lben zu ordnen. Zu diesen gehört neben der Inaugurirung eines billigen Hypo-
ar- und Bodencredites, der Personalcredit, die Belehnung von Warrants, der
bard und das Escomptewesen, sowie auch andere den Credit fördernde Insti-
nen. Im Falle eines grösseren Geldbedarfes strömt daher derjenige Theil des
fähigen Wechselmateriales, welcher bestimmt ist, die Baarmittel der Banken zu
zen zum Reescompte in die Notenbank, welche von ihrem Rechte der Noten-
sion Gebrauch machend, den Bedürfnissen Rechnung zu tragen in der Lage ist.
Privatcapital kann also jederzeit von dieser Einrichtung Gebrauch machen und
gegen gute Wechsel Geld beschaffen. Auf diese Weise bildet daher das Wechsel-
feuille einer Bank eine jederzeit leicht flüssig zu machende Reserve. Aber auch
gibt es eine gewisse Grenze, welche von einem Privat-Bankinstitute nicht
chritten werden darf, ohne einiges Bedenken der öffentlichen Meinung hervor-
fen, denn es wird offenbar dessen Creditfähigkeit in dem Momente gefährdet,
wahrgenommen werden kann, dass die Mittel desselben auf längere Zeit fest-
nt sind. Die Einreichung eines allzugrossen, mit dem Giro einer und derselben
firma versehenen Wechselmateriales an den Schaltern der Notenbank, muss
aus diesem Grunde ebenso vermieden werden, wie ein die finanzielle Leistungs-
keit übersteigendes Reportengagement.

Aber auch von Seite des Noteninstitutes müssen im eventuellen Falle Maass-
men ergriffen werden, um eine übermässige Inanspruchnahme der Circulations
hintanzuhalten, da in einer solchen die Symptome einer beginnenden U

speculation zu erblicken sind. Die von der Bank ausgegebenen Noten repr Schuldscheine derselben, deren Einlösung jederzeit durch den entsprechenden werth erfolgen muss. Das Institut ist daher bemüssigt in Bezug auf die N gabe ebenfalls eine bestimmte Grenze einzuhalten, über welche hinaus es si engagiren darf. Dieselbe besteht bei den Notenbanken derjenigen Staaten, Goldwährung besitzen, in einem mit der Staatsverwaltung vereinbarten, zum schnittlichen Notenumlauf in einem bestimmten Verhältnisse stehenden Bed minimum in Gold, nebst einer fixirten Baarreserve, deren Niveau jederzeit a erhalten werden muss. Die Oesterreichisch-ungarische Bank besitzt derzeit d der steuerfreien Notenausgabe bis zu einem gewissen im Verhältnisse zur denen Metalldeckung stehenden Betrage. Was darüber hinaus bis zu einer von der Staatsverwaltung fixirten Grenze an Banknoten in Umlauf unterliegt einer percentuellen Besteuerung. Sowie nun die Bank von die Bank von Frankreich und die Deutsche Reichsbank sich gegen ein allzustarken Goldabfluss hervorgebrachte Schmälerung ihrer Baarreserve zu schützen wissen, dass sie ihren Discontzinsfuss entsprechend erhöhen auch bei der Oesterreichisch-ungarischen Bank dem Umstande einer eve übermässigen Inanspruchnahme der Umlaufsmittel Rechnung getragen, ind selbe in dem Momente, wo die Grenze der steuerfreien Notenausgabe von de schreitung bedroht ist, zu demselben Mittel greift, um der Nothwendigk besteuerten Notenemission sich zu erwehren. Die Erhöhung des Discontz tritt also dann ein, wenn der allgemeine Creditanspruch aus dem Rahmen lässigkeit auszutreten beginnt und bildet daher eine solche Maassnahme ein welches in Function tritt, sobald die Anspannung der wirthschaftlichen Kräfte nisserregende Dimensionen annimmt. Diese Maassregel ist also berufe Reescompt des einlaufenden Wechselmateriales zu erschweren und auf dies jene, aus etwaiger Ueberspeculation entspringenden Creditansprüche einzud

Die Geldpolitik der Privatbanken muss also dahin gerichtet sein, die ments bezüglich ihrer Dauer, der eigenen finanziellen Leistungsfähigkeit entsp temporär anzupassen. Dies geschieht in der Weise, dass die Investitionsfrist g Capitalien von Fall zu Fall normirt wird. Hiedurch wird es möglich, die W einer etwaigen unvorhergesehenen Inanspruchnahme der Bankmittel abzusch und auf diese Art deren Beweglichkeit aufrechtzuerhalten. Aber auch den A rungen des Geldmarktes wird, soweit es die Grenze der Zulässigkeit erlaub lichst Rechnung getragen, indem die Bankverwaltungen, vermöge einer g leitenden Voraussicht, jederzeit auf die verschiedenen Veränderungen am Markte vorbereitet, grösseren Creditansprüchen Genüge zu leisten sich bemüh

Untersuchungen über die analytisch-geometrische Darstellung des Absterbegesetzes.

I.

Eine jener Fragen, welche die Fachgelehrten unserer Zeitepoche beschäftigen, t diejenige der graphischen Darstellung des Absterbegesetzes mit Zugrundelegung eometrisch analytischer Formen. Der Werth der Lösung dieses Problemes ist ein aheliegender, wenn man bedenkt, dass in demselben der Schlüssel zur allgemeinen eometrischen Darstellung der versicherungs-technischen Functionen liegt und mit er Aufrollung dieser Frage überhaupt, einem sowohl praktisch-technischen als auch issenschaftlichen Interesse Genüge geleistet wird. Wohl ist der Versuch, welcher on uns hier in dieser Beziehung angestellt wird, nicht der erste und ist es sogar ereits gelungen, die Curve der Lebenden, sowie auch diejenige der ferneren wahrcheinlichen Lebensdauer aus mehreren Curventheilen zusammenzusetzen, deren leichungen bekannt sind, doch ist es trotzdem schwer möglich, diesen Umstand für ie praktische Versicherungstechnik nutzbar zu machen, weil durch die jeweilig entprechende zum Zwecke der Herbeiführung einer Osculation nöthig werdende Drehung er den verschiedenden Curvengleichungen zugrunde gelegten Axensysteme, die anatische Darstellung der einzelnen Curventheile in bedeutendem Maasse complicirt ird, wodurch eine zweckmässige Verwendung der sich ergebenden Rechnungsformen sgeschlossen ist. In einer unserer früheren Abhandlungen, unter dem Titel: „Unterchungen über die Beschaffenheit der Prämienreserve" gelangten wir sogar mit Hilfe er eigenen Interpolationsmethode zu dem Resultate einer einzigen allgemein igen algebraischen Gleichung für die Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebenser, welche wohl blos zwischen den Altersgrenzen vom 18. bis zum 99. Lebensre den Anforderungen entspricht, doch geschieht dies in continuirlichem Sinne d mit überraschender Genauigkeit. Diese Gleichung ist aber derart complicirt, dass e praktische Verwendung derselben dem Zwecke nicht Genüge zu leisten vermag. r setzen daher unsere Forschungen auf diesem Gebiete mit der Absicht fort, endh zu einer Curvengleichung zu gelangen, welche auch den Anforderungen bezüg- der Einfachheit der Form vollends entspricht.

Im Laufe unserer diesbezüglichen Untersuchungen sind wir nun auch thatsäch- auf ein ganzes Curvensystem gestossen, welches angesichts seiner geometrisch- lytischen Beschaffenheit geeignet erscheint, den Anforderungen jener Frage in er Hinsicht Rechnung zu tragen. In Folgendem sei nun das Wesen desselben einer gemeinen Betrachtung unterworfen. Denken wir uns in einem rechtwinkeligen rdinatensysteme eine beliebige Curve derart gezogen, dass deren Fläche von der dinatenaxe allein oder von beiden Axen begrenzt wird; zur Abscissenaxe in einer iebigen Entfernung sei ferner eine Paralelle gezogen. Es wird dann jede Gerade, lche je einen Curvenpunkt mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes verdet, mit jener Parallelen zum Schnitte gelangen. Zieht man nun durch jeden ser Schnittpunkte neuerdings eine parallele Gerade, jedoch zur Ordinatenaxe und ngt dieselbe mit der vom entsprechenden Curvenpunkte zur Ordinatenaxe gefällten

$$v = \frac{2r}{\left(\frac{u}{b}\right)^2 + 1}$$

bei r und b constante Grössen bezeichnen.

Gehen wir nun daran, jene dieser Gleichung entsprechende Curve auf ihre nere Beschaffenheit zu untersuchen. Durch Differentiation der Form 2) ergibt sich Tangente der fraglichen Curve in dem Ausdrucke

$$v' = -\frac{4\,r\,u\,b^2}{(u^2+b^2)^2}$$

lcher nach abermaliger Differentiation die Form

$$v'' = -\frac{4\,r\;b^2}{(u^2+b^2)^2} + \frac{16\,r\,u^2\;b^2}{(u^2+b^2)^3}$$

fert. Setzt man nun den Werth des zweiten Differentialquotienten $v'' = 0$, so hält man den Werth von u im Wendepunkte der Curve, das ist

$$u_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

d dieser in die Gleichung 2) substituirt liefert

$$v_1 = \frac{3}{2}\,r$$

Aus der Form 3) ergibt sich nun auch der Werth der Tangente im Wendepunkte

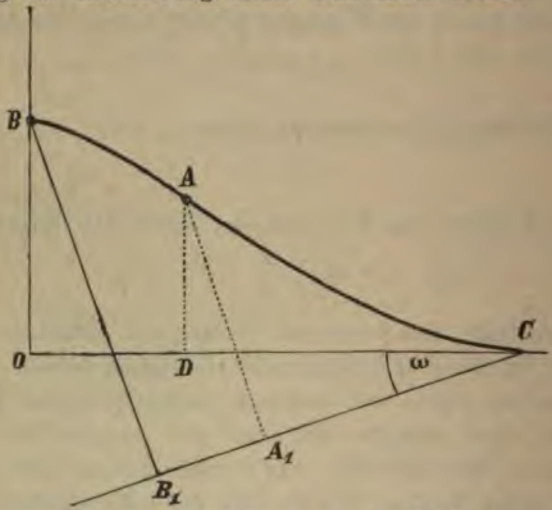
$$tg\,\varphi = v' = -\frac{r}{b} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}$$

lcher für unsere Aufgabe eine besondere Wichtigkeit besitzt, weil derselbe den sten Anhaltspunkt für die Bedingungen der Osculation bietet.

Ziehen wir nun die Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer in Be- icht, so finden wir, dass dieselbe mit der hier dargestellten Curve unter nach- henden Bedingungen übereinstimmt. Für's erste müssen sich die Wendepunkte der iden Curven vollständig decken; ferner muss der Neigungswinkel der Tangente bei iden Curven übereinstimmen und schliesslich müssen die Krümmungsverhältnisse r übrigen Curventheile in allen Punkten mit einander correspondiren. Zu diesem hufe muss die Beschaffenheit der gegebenen Curve in Bezug auf jene Bedingungen tgestellt werden, auf deren Grundlage die Constanten in der Gleichung 1) ermittelt rden können. In einer der früheren Abhandlungen ist die Curve der ferneren hrscheinlichen Lebensdauer zur Darstellung gebracht, welche zwischen den Alters- enzen vom 18. bis zum 99. Lebensjahre einer geometrisch-analytischen Form unter- rfen worden war. Indem wir uns nun auch in diesem Falle blos auf die Unter- chung innerhalb der genannten Grenzen beschränken, gehen wir daran, die ein- nen Anhaltspunkte, welche die Osculation der gegebenen Curve einerseits und der bestimmenden andererseits bedingen, näher zu bezeichnen. Da ist vor allen Dingen fernere wahrscheinliche Lebensdauer im 18. Lebensjahre, welche innerhalb der gebenen Grenzen als maximal sich ergibt und die wir der Einfachheit halber mit bezeichnen wollen. Ferner ist auch diejenige im 99. Lebensjahre von Belang, lche hier als minimal erscheint und gleich Null ist, weshalb wir dieselbe blos in

der ihr zugehörigen Abscisse x_0 zur Darstellung bringen. Weiters gelangt der W punkt dieser Curve in Betracht, und mögen die zur Bestimmung desselben d den Coordinaten mit x_1 und y_1 bezeichnet werden. Schliesslich mag der Nei winkel der Tangente im Wendepunkte $y' = tg\,\varepsilon$ lauten.

Um nun der gegebenen Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdau Anschmiegung an die zu bestimmende, in allen Punkten zu ermöglichen, muss an eine eventuelle Drehung des Axensystemes derselben als auch auf dessen zontale und verticale Verschiebung gedacht werden, zu welchem Behufe wi Drehungswinkel ω in Rechnung bringen, so dass der Neigungswinkel im W punkte um den Drehungswinkel ω grösser oder kleiner wird. Auf diese Weis sich also, falls die Drehung um den Minimalpunkt der ferneren wahrschei Lebensdauer veranlasst wird, folgende Veränderung der Coordinaten vollziehen. stehende Figur mag zur Erläuterung dieses Umstandes dienen.



Dem Gesagten zufolge ist also $OB = y_0$, ferner $OD = x_1$ und DA und endlich $OC = x_0$. Während nun die Drehung um den Punkt C sich vo ist der Winkel $OCB_1 = \omega$ der in Betracht gezogene Drehungswinkel. Bezeichn daher die durch die Drehung veränderten Coordinaten x und y mit ξ bezw ergeben sich folgende Relationen:

8)
$$\begin{aligned} \eta_1 &= (x_0 - x_1)\,\mathrm{Sin}\,\omega + y_1\,\mathrm{Cos}\,\omega \\ \xi_1 &= x_1\,\mathrm{Cos}\,\omega - (y_0 - y_1)\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ \xi_0 - \xi_1 &= (x_0 - x_1)\,\mathrm{Cos}\,\omega - y_1\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ \eta_0 - \eta_1 &= (y_0 - y_1)\,\mathrm{Cos}\,\omega + x_1\,\mathrm{Sin}\,\omega \end{aligned}$$

wobei $BB_1 = \eta_0$, $B_1A_1 = \xi_1$, $A_1A = \eta_1$ und $B_1C = \xi_0$ bezeichnet.

Der Neigungswinkel der Tangente im Wendepunkte A wird eine dem Dre winkel ω entsprechende Veränderung aufweisen, indem derselbe die Form

9)
$$\eta' = tg\,(\varepsilon - \omega) = \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\omega}{1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega}$$

erhält, in welcher der Winkel ω die Anforderungen der Osculation regelt.

Zur Conversion öffentlicher Anleihen.

Dem Wesen der Conversion öffentlicher Anleihen ist vom finanztechnischen Standpunkte eine ganz besondere Wichtigkeit beizumessen, weil das seit mehreren Decennien sich äussernde Sinken des allgemeinen Zinsfusses diese Frage immer mehr in den Vordergrund drängt. Das mobile Capital, welches heute mehr als je die fix verzinslichen Werthpapiere für die Anlage allen anderen vorzieht und in seiner stetig wachsenden Anhäufung eine immer stärkere Nachfrage nach solchen hervorruft, hiedurch eine höhere Bewerthung derselben veranlassend, ist auf diese Weise selbst der Urheber des sich beim Schuldner herausbildenden Bestrebens den Zinsfuss seiner Darlehensschuld den vorwaltenden Umständen gemäss herabzusetzen. Aber nicht allein das mobile Capital selbst ist es, welches eine Restrinction der Capitalsverwerthung verursacht, sondern auch der Umstand, dass die Securität der meisten fix verzinslichen Darlehen im Laufe der Zeit eine bessere geworden ist, indem die wirthschaftlichen Verhältnisse vieler Staaten bedeutend günstiger sich gestaltet haben. Die Prämissen, welche also zur Zeit der Contrahirung verschiedener Darlehen bestanden haben, sind völlig andere geworden, wodurch jene Bedingungen, welche früher einen bestimmten Zinsfuss mit Hinblick auf die in demselben enthaltene Risikoprämie als gerechtfertigt erscheinen liessen, aufgehoben wurden. An die Stelle der früheren Prämissen treten andere, welche in ihrer Art eine ganz entgegengesetzte Wirkung auf die Beschaffenheit des Darlehens ausübend, eine förmliche Verschiebung des Interessenverhältnisses zwischen Gläubiger und Schuldner hervorrufen. Während zur Zeit der Darlehenscontrahirung die Nachfrage nach Capital eine grössere war, als dessen Angebot, wodurch die Bedingungen einer solchen erschwert wurden, ist heute das Verhältniss zwischen Angebot und Nachfrage ein umgekehrtes. Hiezu gesellt sich noch ein im Laufe der Zeit bedeutend günstiger gewordenes Securitätsverhältniss, durch dessen Einfluss der Cours den Nominalwerth der betreffenden Darlehenstitres am öffentlichen Geldmarkte zu übersteigen beginnt, was auf eine Verzinsungsgrundlage schliessen lässt, welche mit Rücksicht auf die Beschaffenhenheit des Darlehens allzu hoch bemessen erscheint. Dieser Umstand ist nun geeignet, beim Schuldner das Verlangen nach einer entsprechenden Herabsetzung des Darlehenszinsfusses zu wecken, d. h. derselbe gelangt zu der Erkenntniss, dass er auf Grund seines besser gewordenen Credites sich billiger Geld zu beschaffen vermag. Die nächste Folge hievon ist, dass er den alten Darlehensvertrag kündigt und dem Gläubiger die erst im Laufe von mehreren Jahren zu tilgende Schuld auf einmal entrichtet, zugleich aber eine neue Schuld unter günstigeren Bedingungen contrahirt. Die Conversion eines Anlehens besteht also in einer finanziellen Transaction, bei welcher der Schuldner ein Schuldverhältniss auflöst, um ein neues unter günstigeren Bedingungen einzugehen.

Die Voraussetzungen, welche die Conversion eines Darlehens bedingen, sind aber nicht immer auch geeignet, das Gelingen einer solchen zu verbürgen, weshalb auch vorher alle Umstände erwogen werden müssen, welche für dieselbe von Einfluss sind. Eine finanzielle Operation hängt nämlich auch sonst von verschiedenen Umständen ab, welche neben ihrer finanziellen Natur auch juristischer Beschaffenheit sein können. So muss in juristischer Beziehung der Wortlaut des Textes der jewei-

Schuldverschreibung im Principe eine Conversion zulassen, da sonst verbriefte der Gläubiger verletzt werden würden. Vom finanziellen Standpunkte hinmuss in Betracht gezogen werden, ob das Ersparniss, welches durch eine Con- zu erreichen ist, ausgiebig genug ist, um eine derartige Transaction, welche bedeutenden Kosten verbunden zu sein pflegt, rentabel zu gestalten. Schliesslich darauf Bedacht zu nehmen, dass mit der Kündigung der alten Titres zuauch die Begebung der neuen ermöglicht wird, indem gewisse momentane Vorwelche mit der Uebernahme der neuen Titres in Verbindung gebracht werden, den Besitzer der alten höher verzinslichen Schuldverschreibungen zum Umtausche für neue minder verzinsliche veranlassen.

Sind nun alle diese Umstände erwogen, müssen noch andere, welche für das Gelingen einer solchen Transaction maassgebend sind, berücksichtigt werden. So ist der Zeitpunkt für die Durchführung derselben von besonderer Wichtigkeit, indem es durchaus nicht gleichgiltig sein kann, ob auf dem offenen Markte das Geld flüssig oder knapp ist, oder mit anderen Worten, ob Nachfrage oder Angebot des Capitals vorherrschend ist. Ferner hängt sehr viel von der momentanen Stimmung des Marktes selbst ab, dessen Aufnahmsfähigkeit mit dieser enge verbunden ist. Dies Alles muss überlegt werden, bevor an die Durchführung einer derartigen finanziellen Transaction geschritten werden kann und da zur Beurtheilung aller dieser Factoren fachmännische Kenntniss und Umsicht nöthig ist, so wird, falls es sich um bedeutende Capitalien handelt, die finanzielle Durchführung zumeist einem Bankinstitute übertragen, welches mit Hilfe seiner geschäftlichen Verbindungen in der Lage ist, solche Operationen in geeigneter Weise und mit Erfolg zu vermitteln. Die Bank leitet dann die Durchführung der ganzen Transaction in der Weise ein, dass sie die zu begebenden neuen Titres mit einem vereinbarten fixen Course vom Darlehenscontrahenten entweder in ihrer Gesammtheit fix, oder theils fix, theils in Option mit der Verpflichtung übernimmt, bis zu einem bestimmten Zeitpunkte dieselben auf den Markt zu bringen. Sache des Institutes ist es dann, die Umstände wahrzunehmen, unter denen es möglich ist, die Begebung der Titres mit einem entsprechenden Nutzen durchzuführen. Zugleich übernimmt das Bankinstitut die Besorgung der Einlösung der gekündigten alten Titres, wofür der Schuldner gewöhnlich einen separaten Pauschalbetrag leistet. Etwaige beim Umtausche an den Capitalisten zu gewährende Vortheile werden bei Uebertragung des Geschäftes an das Institut besonders vereinbart und vergütet.

Die Frage, auf welche Art ein ausgiebiges Ersparniss bei einer Conversion zu erzielen ist, bildet den rein finanztechnischen Theil einer solchen Transaction und lässt sich von verschiedenen Gesichtspunkten einer Lösung zuführen. Die verschiedenartige Beschaffenheit der Anlehen involvirt auch eine solche bezüglich der Conversionsbedingungen und lässt sich mit Rücksicht auf diese auch einem entsprechenden Modus derselben unterwerfen.

Im Allgemeinen zerfallen die Anlehen in zwei grosse Kategorien, der tilgbaren und untilgbaren, von denen die erstere wieder verschiedene Arten aufweist. Man unterscheidet einfache Anlehen, deren Tilgung während einer bestimmten Dauer vor-

gesehen ist, indem von Jahr zu Jahr eine gleiche oder steigende Anzahl von Schuld-appoints in der Höhe eines gewissen Betrages eingelöst wird und die im Umlaufe verbleibenden auf Grundlage eines vorher stipulirten Zinsfusses verzinst werden. Ferner gibt es sogenannte verlosbare Anleihen, deren Tilgung mit Gewinnstprämien verbunden ist. Diese können wieder verzinsliche oder unverzinsliche sein, indem bei letzteren die Gewinnstchance als Aequivalent für die Verzinsung geboten wird. Bei erzinslichen, verlosbaren Anleihen werden die Kosten der Gewinnstprämien zumeist us dem Ertrage bestritten, der aus der stipulirten Unterwerthigkeit der kleinsten reffer resultirt. Nachdem wir nun die Umstände, welche für die Conversion der rschiedenen Anleihen von Belang sind, in Betracht gezogen haben, versuchen wir in kurzen Umrissen die finanztechnische Frage der jeweiligen Beschaffenheit des nlehens entsprechend einer Untersuchung zu unterwerfen. Während die Conversion ner untilgbaren Anleihe blos auf dem Wege einer Kürzung des Zinsfusses allein r Durchführung gelangen kann, lässt die tilgbare zwei vortheilhafte Conversions-ten zu. Die allgemeinste Form ist diejenige der Kürzung des Zinsfusses in Verbindung it der Verlängerung der Tilgungsfrist zum Zwecke der Erzielung kleinerer Tilgungs-oten. Neben dieser Form kommen auch Conversionen auf Grund einfacher Kür-ng des Zinsfusses vor, wobei von einer Veränderung der Tilgungsfrist abgesehen rd. Von besonderem Interesse ist die Conversion verzinslicher Losanlehen, weil selbe ein Novum bildet, welches erst in jüngster Zeit praktisch zur Anwendung bracht wird. Der Convertirungsvorgang bei verzinslichen Lospapieren gestaltet sich rart, dass dieselben mit den zugehörigen Coupons gegen gleichwerthige, jedoch nder verzinsliche Rententitres mit Coupons umgetauscht und gleichzeitig alle stipu-ten Prämien auf einmal verlost werden. Der Losbesitzer erscheint hiedurch, wenn n von der Herabsetzung des Zinsfusses absieht nicht verkürzt, denn es ist gleich-tig, ob die Ziehungen im Laufe einer Anzahl von Jahren successive erfolgen oder f einmal der Reihe nach vorgenommen werden.

Fiele zum Beispiel ein Treffer auf ein Lospapier bei derjenigen Ziehung, lche erst nach zehn Jahren hätte vorgenommen werden sollen, so würde die für nselben entfallende Summe den auf zehn Jahre discontirten wirklichen Treffer-trag repräsentiren. Indem auf diese Weise der Eigenschaft des Lospapieres durch e derartige Entkleidung der Gewinnsthoffnung Genüge geleistet wird, bleiben die t kleinsten Treffern gezogenen Lose unter Berücksichtigung ihres Werthes als ein-he Obligationen zurück, deren Verzinsung bis zu ihrem thatsächlichen Fälligkeits-tpunkte hätte vorgenommen werden müssen. Diese werden nun ohne sonstige Be-chtheiligung des Besitzers in minderverzinsliche tilgbare Rententitres convertirt, lem man es wie bei einer jeden anderen derartigen Transaction dem Besitzer frei-llt, den Umtausch der alten höher verzinslichen Obligationen gegen neue minder-rzinsliche vorzunehmen, falls es derselbe nicht vorzieht, sich für deren Baarein-sung zum Nominalwerthe zu entscheiden.

Es bleibt nun noch das Wesen der rein finanztechnischen Untersuchung übrig, elche in erster Linie die Frage der durch die Conversion zu ersparenden Summe trifft. Diesbezüglich sei auf eine unserer früheren Abhandlungen unter dem Titel:

„Fragmente finanzieller Disciplinen" (III. Lief., S. 29) hingewiesen, in welcher der Beschaffenheit der gewöhnlichen Verzinsungs- und Tilgungs-Modalitäten bei öffentlichen Anleihen Rechnung getragen wird. Im Allgemeinen pflegt die Grundlage derselben darin zu bestehen, dass die Zinsen am Schlusse eines jeden Semesters entrichtet werden, während die Capitalsrückzahlung von je $a = K : n$ Gulden am Schlusse eines jeden Jahres erfolgt, wobei n die präliminirte Tilgungsfrist und K den nominellen Darlehensbetrag bezeichnet. Handelt es sich nun darum, unter Zugrundelegung jener durch die Conversion in Ersparung zu bringenden Summe und des im vorhinein festgesetzten Maasses der Zinsfussherabsetzung die etwa erforderliche Veränderung der Tilgungsfrist zu ermitteln, so sind die in jener Abhandlung berechneten Formen geeignet, den diesbezüglichen Anforderungen Genüge zu leisten. Zu diesem Zwecke wird vor allen Dingen der noch zu tilgende Nominalbetrag jener zu convertirenden Schuld ermittelt, indem vom ursprünglichen Nominalbetrag die bereits getilgten Quoten in Abzug gebracht werden. Bezeichnet man daher die von der Tilgungsfrist bereits verstrichene Anzahl ganzer Jahre mit λ, so ist

$$m = n - \lambda$$

die noch in Betracht kommende restliche Tilgungsfrist. Da nun K den ursprünglichen Nominalbetrag und $a = K : n$ die jährlich zu leistende Tilgungsquote darstellt, so wird

$$K_1 = m\,a = \frac{m}{n}\,K$$

den noch zu tilgenden Nominalbetrag repräsentiren. Demgemäss wäre nach Form 1) der genannten Abhandlung

$$\alpha) \qquad K'_1 = \frac{K_1}{q}\left[p + \frac{q-p}{n} \cdot \frac{v^{2m}-1}{v^{2m}(v^2-1)}\right]$$

der effective Capitalswerth der noch zu tilgenden Schuld, wobei bei $Q = 100\,q$ den effectiven und $P = 100\,p$ den nominellen Zinsfuss bezeichnet, indem zur Abkürzung $1 + \frac{q}{2} = v$ angenommen ist. Rechnet man nun zum effectiven Capitalswerth K'_1 den Baarwerth des durch die Conversion zu ersparenden Betrages, welchen wir mit E bezeichnen wollen hinzu, so ergibt sich

$$K'_1 + E = K'_2$$

als neuer effectiver Capitalswerth, während der nominelle K_1 unverändert bleibt. In Folge dessen wird der Cours $C = K'_2 : K_1$.

Wird daher der nominelle Zinsfuss $P = 100\,p$ in $P_1 = 100\,p_1$ convertirt, so lässt sich auf Grund der Form 7) jener Abhandlung der dem nominellen Zinsfusse P_1 entsprechende effective Zinsfuss $Q_1 = 100\,q_1$ ermitteln, wobei wieder der Kürze halber $1 + \frac{q_1}{2} = v_1$ bezeichnen mag. Auf Grund dessen liefert schliesslich die Form 9) jener Abhandlung unter Substitution der entsprechenden veränderten Factoren die zu ermittelnde neue Tilgungsfrist m_1, mit deren Hilfe dann auch die neue Tilgungsquote $a_1 = K_1 : m_1$ sich ergibt.

ersuchungen über die analytisch-geometrische Darstellung des Absterbegesetzes.

II.

Auf Grundlage der in der vorigen Abhandlung aufgestellten Relationen gelangt nun zur allgemeinen Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Gleichung der ell gegebenen Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer enthalten ist, n $u = \alpha + \xi$ und $v = \beta + \eta$ angenommen wird, wodurch man sowohl der ontalen als auch der verticalen Verschiebung Genüge leistet. Dieselbe lautet folgendermaassen

$$\alpha + \xi = b\sqrt{\frac{2r}{\beta + \eta} - 1}$$

n α und β bisher noch unbestimmte constante Grössen bezeichnen, und ξ und η noch unbestimmten, jedoch constanten Winkel ω in sich schliessen. Wir haben lso hier mit fünf verschiedenen constanten Grössen r, b, α, β, und ω zu thun he ermittelt werden müssen, um den gestellten Anforderungen Genüge zu leisten.

Auf diese Art sind auch fünf verschiedene Bedingungen zu erfüllen falls die lation der gegebenen Curve einerseits und der zu bestimmenden andererseits glicht werden soll. Die ersten beiden Bedingungen bilden die Gleichungen der n Grenzpunkte der gegebenen Curve. In dem ersteren wo $\xi = 0$ ist ergibt sich Bedingung

$$\beta + \eta_0 = \frac{2r}{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 + 1}$$

r im zweiten, wo $\eta = 0$ ist, gelangt man zur Bedingung

$$\alpha + \xi_0 = b\sqrt{\frac{2r}{\beta} - 1}$$

Im Uebrigen bilden die Coordinaten und der Neigungswinkel der Tangente des depunktes die weiteren Bedingungen, demnach ergibt sich

$$\alpha + \xi_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$\beta + \eta_1 = \frac{3}{2} r$$

$$tg\,(\varepsilon - \omega) = -\frac{r}{b} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}$$

welch' letztere Bedingung sich aus dem Umstande ergibt, dass der Neigungs der Tangente im Wendepunkte der gegebenen Curve mit demjenigen der zu b menden übereinstimmen muss, daher die Relation $tg\ \varphi = tg\ (\varepsilon - \omega)$ zur G gelangt.

Mit Hilfe dieser fünf Gleichungen ist es nun möglich, die Werthe jen Constanten, welche die Osculation der gegebenen und gesuchten Curve beding bestimmen. Verbindet man nämlich die Gleichungen I und IV, indem m letztere von der ersteren subtrahirt, so ergibt sich die Relation

$$11)\qquad \eta_0 - \eta_1 = r\left(\frac{2}{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 + 1} - \frac{3}{2}\right)$$

aus welcher mit Hilfe der Gleichungen III und V die Werthe α und b el werden können. Auf diese Weise gelangen anstatt dieser beiden, die Werthe $tg\ (\varepsilon - \omega)$ in Rechnung, so dass man schliesslich zu der Gleichung zweiten

$$12)\qquad r^2 + \frac{2}{3} r \cdot \xi_1\, tg\ (\varepsilon - \omega) + \frac{4}{9}\, \frac{(\eta_0 - \eta_1)\, \xi_1^2\, tg^2\ (\varepsilon - \omega)}{(\eta_0 - \eta_1) + \xi_1\, tg\ (\varepsilon - \omega)} = 0$$

gelangt. In der gleichen Weise ergibt sich durch Subtraction der Formen II u die Relation

$$13)\qquad \xi_0 - \xi_1 = b\left(\sqrt{\frac{2r}{\beta} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

aus welcher wieder die Werthe β und b zu eliminiren sind.

Anstatt dieser gelangen hier die Werthe η_1 und $tg\ (\varepsilon - \omega)$ in Rechnun erhält man analog zu jenem Resultate abermals eine Gleichung zweiten G jedoch von der Form

$$14)\qquad r^2 - \frac{2}{3} r \cdot (\xi_0 - \xi_1)\, tg\ (\varepsilon - \omega) + \frac{4}{9}\, \frac{\eta_1\, (\xi_0 - \xi_1)^2 \cdot tg^2\ (\varepsilon - \omega)}{\eta_1 + (\xi_0 - \xi_1)\, tg\ (\varepsilon - \omega)} = 0$$

Da nun die beiden Gleichungen 12) und 14) ein und derselben Curve hören, so muss der Werth von r für beide ein identischer sein und es handel also darum, dieser Anforderung gerecht zu werden und die gemeinschaftlichen zeln für die beiden zu ermitteln. Subtrahirt man daher die Gleichung 12) v Gleichung 14), so ergibt sich als Rest die Gleichung

$$15)\qquad r = \frac{2\, tg\ (\varepsilon - \omega)}{3\, \xi_0}\left(\frac{\eta_1\, (\xi_0 - \xi_1)^2}{\eta_1 + (\xi_0 - \xi_1)\, tg\ (\varepsilon - \omega)} - \frac{(\eta_0 - \eta_1)\, \xi_1^2}{(\eta_0 - \eta_1) + \xi_1\, tg\ (\varepsilon - \omega)}\right)$$

welche sich als einzige gemeinschaftliche Wurzel dieser beiden Gleichungen z *Grades ergibt.*

Substituirt man daher den in Form 15) ausgedrückten Werth für r in eine ser quadratischen Gleichungen, so gelangt hiedurch r ausser Rechnung und man t es dann blos mit einer Gleichung zu thun, in welcher der Winkel ω einzig und ein die unbekannte Grösse bildet, indem sowohl η_1 und ξ_1 als auch η_0 und ξ_0 sich näss den Formen 8) durch trigonometrische Functionen des Winkels ω und durch bekannten Grössen x_1, y_1, x_0 und y_0 ausdrücken lassen, während der Winkel ε nfalls bestimmt vorausgesetzt wird. Die auf diese Weise resultirende Form lautet n folgendermaassen

$$\left(\frac{\eta_1(\xi_0-\xi_1)^2}{\eta_1+(\xi_0-\xi_1)\,tg(\varepsilon-\omega)} - \frac{(\eta_0-\eta_1)\,\xi_1^2}{(\eta_0-\eta_1)+\xi_1\,tg(\varepsilon-\omega)}\right)^2 + \frac{\eta_1(\xi_0-\xi_1)^2\,\xi_0\,\xi_1}{\eta_1+(\xi_0-\xi_1)\,tg(\varepsilon-\omega)} + \frac{\xi_1^2\,\xi_0\,(\xi_0-\xi_1)(\eta_0-\eta_1)}{(\eta_0-\eta_1)+\xi_1\,tg(\varepsilon-\omega)} = 0$$

s welcher sich mittelst Rechnung die Gleichung dritten Grades

$$tg^3(\varepsilon-\omega) + A_1\,tg^2(\varepsilon-\omega) + A_2\,tg(\varepsilon-\omega) + A_3 = 0$$

gibt, worin die Werthe von A_1, A_2 und A_3 folgendermaassen sich präsentiren

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = \eta_0\,\dfrac{(\xi_0-\xi_1)^2+\xi_0\,\xi_1}{\xi_0\,\xi_1\,(\xi_0-\xi_1)} \\ A_2 = \dfrac{\eta_1(\eta_0-\eta_1)}{\eta_0}\left[\eta_1\cdot\dfrac{2(\xi_0-\xi_1)^2+\xi_1^2}{\xi_1^2\cdot(\xi_0-\xi_1)^2} + (\eta_0-\eta_1)\,\dfrac{(\xi_0-\xi_1)^2+2\,\xi_1^2}{\xi_1^2\cdot(\xi_0-\xi_1)^2}\right] \\ A_3 = \dfrac{\eta_1^2(\eta_0-\eta_1)^2}{\eta_0}\cdot\dfrac{(\xi_0-\xi_1)^3+\xi_1^3}{(\xi_0-\xi_1)^3\,\xi_1^3} \end{array}\right.$$

Berücksichtigt man nun die in den Formen 8) ausgedrückten Werthe

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (x_0 - x_1)\,\mathrm{Sin}\,\omega + y_1\,\mathrm{Cos}\,\omega \\ \xi_1 &= x_1\,\mathrm{Cos}\,\omega - (y_0 - y_1)\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ \xi_0 - \xi_1 &= (x_0 - x_1)\,\mathrm{Cos}\,\omega - y_1\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ \eta_0 - \eta_1 &= (y_0 - y_1)\,\mathrm{Cos}\,\omega + x_1\,\mathrm{Sin}\,\omega \end{aligned}$$

ie auch die aus denselben hervorgehenden

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y_0\,\mathrm{Cos}\,\omega + x_0\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ \xi_0 &= x_0\,\mathrm{Cos}\,\omega - y_0\,\mathrm{Sin}\,\omega \end{aligned}$$

l substituirt diese in die einzelnen Coëfficienten A_1, A_2 und A_3, so erhält man gesichts des Umstandes, dass in denselben die Potenzen im Zähler und Nenner rchwegs die gleichen sind, bestimmte Formen, in welchen der unbekannte Winkel ω s in seiner Tangente vertreten ist. Die übrigen in diesen Formen enthaltenen erthe x_1 und y_1, sowie auch x_0 und y_0 sind als gegeben vorausgesetzt.

Es handelt sich also nur noch darum den aus einer Bekannten und einer kannten zusammengesetzten Werth $tg\,(\varepsilon - \omega)$ entsprechend zu zerlegen, um hier die Tangente des Winkels ω selbstständig in Rechnung zu bringen.

Dieser Anforderung wird nun durch die bereits in Form 9) ausge Relation

$$tg\,(\varepsilon - \omega) = \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\omega}{1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega}$$

Rechnung getragen, so dass man schliesslich zu einer Gleichung gelangt, in einzig und allein $tg\,\omega$ als Unbekannte fungirt, während die Coëfficienten du aus bekannt vorausgesetzten Werthen bestehen.

Zieht man die Potenzen der einzelnen hier in Betracht kommenden F in Betracht, so findet man, dass sich hier eine Gleichung eilften Grades er dass man für den Winkel ω eilf verschiedene Wurzeln erhält.

Da nun die Beschaffenheit der allgemeinen Curve eine derartige ist, da der Grösse des Winkels ω auch die Krümmung derselben beeinflusst wird, s der sonstige Verlauf der zu bestimmenden Curve den Anhaltspunkt für die der jeweilig in Betracht zu ziehenden reellen Wurzel liefern, welchen Umsta noch einer näheren Erörterung zu unterziehen gedenken.

Vorderhand ist es nothwendig, bezüglich der Aufstellung der gesuchten chung zum Resultate zu gelangen. Zu diesem Behufe mag für die Gleichu der entsprechende gemeinschaftliche Nenner ermittelt werden, welcher sich Berücksichtigung der hier in Betracht kommenden Formen folgendermaassen prä

$$(1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega)^3\, \xi_0 \cdot \xi_1^3 (\xi_0 - \xi_1)^3 \cdot \eta_0 \operatorname{Sec}^8 \omega$$

so dass in Folge dessen die Gleichung 17) die Form 20)

$$\begin{aligned}
&(tg\,\varepsilon - tg\,\omega)^3\, \xi_0 \cdot \xi_1^3 (\xi_0 - \xi_1)^3\, \eta_0 \operatorname{Sec}^8 \omega \, + \\
&+ (tg\,\varepsilon - tg\,\omega)^2 (1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega)\, \eta_0^2 \left((\xi_0 - \xi_1)^2 + \xi_0\,\xi_1\right) \xi_1^2 (\xi_0 - \xi_1)^2 \operatorname{Sec}^8 \omega \, + \\
&+ (tg\,\varepsilon - tg\,\omega)(1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega)^2\, \eta_1 (\eta_0 - \eta_1)\, \xi_0\, \xi_1 (\xi_0 - \xi_1) \operatorname{Sec}^8 \omega \, \times \\
&\qquad \times \left[\eta_1 (\xi_1^2 + 2\,(\xi_0 - \xi_1)^2) + (\eta_0 - \eta_1) \left((\xi_0 - \xi_1)^2 + 2\xi \right.\right. \\
&+ (1 + tg\,\varepsilon \cdot tg\,\omega)^3\, \eta_1^2 (\eta_0 - \eta_1)^2 \left((\xi_0 - \xi_1)^3 + \xi_1^3\right) \xi_0 \operatorname{Sec}^8 \omega = 0
\end{aligned}$$

annimmt, welche nach entsprechender Substitution rechnungsmässig durchg und nach Potenzen der Unbekannten $tg\,\omega$ geordnet, das gesuchte Resultat

[illegible]eber die relative Werthbestimmung verzinslicher Lospapiere.

I.

Eine jener actuellen Fragen, welche das Interesse des Capitalisten besonders
Anspruch nehmen, ist die Ermittelung des relativen Werthes von Lospapieren mit
cksicht auf deren Beschaffenheit vom Standpunkte der Securität sowie auch des
senertrages einerseits und der Gewinnstchance andererseits. In einer Beziehung
h zur Anlage als fix verzinsliches Werthpapier besonders eignend, besitzt das
papier neben den Eigenschaften einer mehr oder weniger gut fundirten Obligation
h den Vortheil der Gewinnsthoffnung, welche wohl durch einen entsprechenden
Verhältnisse zu gewöhnlichen Rentenobligationen sich äussernden Zinsenentgang
auft wird, immerhin jedoch eine besondere Anziehungskraft auf das anlagesuchende
pital ausübt. Abgesehen davon, dass im verzinslichen Lospapier das Princip einer
baren Rente allgemein zum Ausdrucke gelangt, was schon an und für sich von
ntlichem Einflusse auf die Classirung eines solchen ist, besitzt dasselbe die
nthümlichkeit, den Besitzer viel seltener zu wechseln als eine gewöhnliche Obli-
n, welcher Umstand einzig und allein dem Wesen der Gewinnsthoffnung zuzu-
iben ist. Dass in Folge dessen ein Lospapier viel geringeren Werthschwankungen
esetzt ist, steht ausser Frage, umsomehr muss diese Stabilität im Werthe
enen Lospapieren sich geltend machen, welche durch besonders gute Fundirung
seits und durch einen für deren Besitzer günstigen Verlosungsplan sich aus-
nen. Von hervorragendem Einflusse ist in letzterer Beziehung die Stetigkeit der
erbeträge während der gesammten Verlosungsdauer, da in diesem Falle der
ute Werth der Gewinnstchance nahezu stabil bleibt; hingegen wird bei
etwa im abnehmenden Sinne stipulirten Treffercombination dieser Werth im
en Verhältnisse beeinflusst. Wohl ist auch die bei den meisten Loskategorien
tracht kommende Abnahme der mitspielenden Lose für die relative Werth-
mmung der Gewinnstchance von wesentlichem Belange, doch macht sich die-
zumeist erst in den letzten Ziehungsstadien in ausgiebiger Weise bemerkbar.
egenüber kommt jedoch bei Loskategorien, wo die Gewinnstchance bei den mit
ten Treffern gezogenen Losen durch Ausfolgung von Gewinnstscheinen auch
hin aufrecht erhalten bleibt, dieser Umstand ganz ausser Betracht, indem blos
it grösseren Treffern gezogenen Lose die weitere Spielchance einbüssen. Während
ch im ersteren Falle mit der Abnahme der an den Ziehungen theilnehmenden
die Gewinnsthoffnung für jedes einzelne im selben Verhältnisse eine grössere
bleibt dieselbe im letzteren Falle eine nahezu unveränderte, weil das gezogene
daselbst blos der Eigenschaft einer Obligation entkleidet wird, während dessen
nnsthoffnung auf einen grösseren Treffer gewährleistet bleibt.

Neben der Gewinnstchance eines Loses ist jedoch auch eine Verlustchance in
cht zu ziehen, welche sich darin manifestirt, dass ein Los mit dem kleinsten
r gezogen werden kann. Jene mit kleinsten Treffern ausgestatteten Loskategorien
n nämlich zumeist einen ihren thatsächlichen Courswerth unterbietenden kleinsten
erbetrag in *Aussicht, so dass die Differenz* zwischen diesen beiden als möglicher

Verlust angesehen werden muss. Wohl steht diese den möglichen Verlust repr
tirende Quote in keinem Verhältnisse zu der Höhe einer eventuellen Gewinnstq
wird jedoch erwogen, dass die Wahrscheinlichkeit eines derartigen Verlustes
vielfach grössere ist, als die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnstes, so gelangt m
dem Schlusse, dass es nothwendig ist, bei der Werthbestimmung der Gewinnst
diesen Umständ gleichfalls in Rechnung zu ziehen. Auf diese Weise ergibt si
der Eigenthümlichkeit des Spielplanes der jeweiligen Loskategorie die Grundlag
Werthbestimmung der eigentlichen Spielchance, welche sich daher einestheils a
Gewinnst- anderentheils aus der Verlustchance zusammensetzt, so dass es m
wird, die relative Schätzung eines Lospapieres, abgesondert von dessen son
Beschaffenheit als tilgbare Obligation, in entsprechender Weise durchzuführen.

Hat man nun einerseits den eigentlichen Werth der Spielchance erhobe
bleibt andererseits blos die rein finanztechnische Frage der dem Lospapiere
wohnenden Beschaffenheit einer tilgbaren Rentenobligation übrig. Dass nun ein
papier thatsächlich eine solche ist, erhellt schon aus dem Umstande, dass mit
Ziehung eine bestimmte Anzahl von Lostitres aus dem Verkehre gezogen wir
dem dieselben durch die entsprechenden Treffer getilgt werden. Wird nun erw
dass die Tilgung nicht im Nominalwerthe, sondern zum Mindesten im Ausm
des auf ein Lospapier entfallenden kleinsten Treffers erfolgt, so erscheint es ge
fertigt, den kleinsten Trefferbetrag als eigentliche Grundlage der Werthbeme
anzunehmen. Was beim Courswerth unter diesen Betrag oder über diesen hin
Betracht kommt, ist auf Rechnung mehr oder weniger guter Verzinsungs- und S
ritäts-Bedingungen einerseits und des capitalisirten Werthes der Gewinnsthof
andererseits zu setzen.

Was nun die Frage der allgemeinen Untersuchung der Werthe einer S
chance anbelangt, so mag zum besseren Verständnisse der specielle Fall einer
kleinsten Treffern ausgestatteten Loskategorie diesbezüglich hier Raum finden.

Der Verlosungsplan einer auf dieser Grundlage beruhenden Combinatio
gewöhnlich derart eingerichtet, dass die nach Gruppen oder Serien von je hu
Stück eingetheilte Gesammtzahl der Lose, mit fortlaufenden Seriennummern bezei
wird, so dass jede Serie wieder die Losnummern von 1 bis 100 in sich schl
Bei jeder Ziehung wird eine im vorhinein bestimmte Anzahl Serien gezogen,
denen entweder alle oder blos die erstgezogenen mit grösseren Treffern ausge
sind, wobei gewöhnlich die zu allererst gezogene Seriennummer für den Haupt
gilt, jede weitere hingegen für je einen entsprechenden Nebentreffer in Bet
kommt, und zwar entfällt jedesmal der Treffer auf die der Seriennummer zugeh
neuerdings gezogene Losnummer, während alle übrigen Losnummern der gezo
Serie als kleinste Treffer zu betrachten sind. Auf diese Weise ergeben sich fü
Wahrscheinlichkeit eines Treffers folgende Normen:

Nehmen wir an, es würden bei einer bestimmten Ziehung n Seriennum
gezogen werden, von denen jedoch blos eine bestimmte Anzahl t mit grös
Treffern ausgestattet wäre, deren jeweiligen Werth wir mit den Buchstaben A_1,
A_2 .. A_t bezeichnen wollen, wobei A_1 den Haupttreffer repräsentiren mag. An der Zie

ürden alle noch nicht gezogenen Lose, deren Anzahl in M Serien bestehen mag eilnehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Seriennummer eines bestimmten Loses ezogen wird, ist also in dem Verhältnisse der zu ziehenden Seriennummern n und r an der Ziehung überhaupt theilnehmenden Serien M ausgedrückt, also durch den usdruck $W = n : M$ zur Darstellung gebracht, wobei also die Losnummer gar icht in Betracht kommt, also auf das betreffende Los ebenso der Haupttreffer e ein kleinster Treffer fallen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf eine bestimmte riennummer überhaupt ein grösserer Treffer fällt, ist in der Form $W_1 = t : M$ gedrückt, während die Wahrscheinlichkeit, dass auf eine bestimmte Seriennummer r Haupttreffer fällt, in der Form $W_2 = 1 : M$ sich präsentirt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Los dessen Seriennummer gezogen ist, auch der Losnummer gezogen wird, ist in dem Verhältnisse $w = 1 : 100$ dargestellt, nach ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Serien- und Losnummer eines timmten Loses überhaupt gezogen wird, ferner die Wahrscheinlichkeit, dass ein immtes Los mit einem grösseren Treffer überhaupt, also unter den t Serien- mern gezogen wird und schliesslich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Los mit Haupttreffer oder einem bestimmten nur einmal vorkommenden Nebentreffer gen wird, in der beziehungsweisen Form

$$W \cdot w = \frac{n}{100 \cdot M}, \qquad W_1 \cdot w = \frac{t}{100\, M}, \qquad W_2 \cdot w = \frac{1}{100\, M}$$

Zieht man nun in Betracht, dass von den mit je einem grösseren Treffer aus- atteten Serien die übrigen 99 Lose mit kleinsten Treffern oder besser gesagt en, hingegen bei den übrigen gezogenen Serien durchwegs Nieten, also 100 Lose kleinsten Treffern gezogen werden, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass bestimmtes Los, dessen Seriennummer gezogen ist, die Treffernummer verfehlt, em Ausdrucke

$$v = 1 + \frac{t}{n}\left(\frac{99}{100} - 1\right)$$

zwar besteht dieselbe erstens aus der Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes dessen Seriennummer in den mit Treffern gezogenen t Serien vorkommt, die fernummer verfehlt, welche in dem Ausdrucke $v_1 = 99 : 100$ zur Darstellung ngt und zweitens aus der Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Los, dessen ennummer unter den übrigen $n - t$ gezogenen trefferlosen Serien vorkommt, die fernummer verfehlt. Diese letztere Wahrscheinlichkeit repräsentirt nun angesichts Umstandes, dass bei den $n - t$ Serien überhaupt kein grösserer Treffer vorkommt Gewissheit, welche in $v_2 = 1$ zum Ausdrucke kommt. Es ist daher

$$v = \frac{t}{n} \cdot v_1 + \frac{n - t}{n} \cdot v_2$$

nach erfolgter Substitution der entsprechenden Werthe mit obiger Form vollständig reinstimmt.

Multiplicirt man nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Seriennummer eines timmten Loses gezogen wird, mit der Wahrscheinlichkeit, dass dessen Losnum-

die gezogene Treffernummer verfehlt, so ergibt sich in diesem Producte die
scheinlichkeit, mit welcher ein bestimmtes Los mit einer Niete gezogen wird
durch folgenden Ausdruck zur Darstellung gelangt:

$$V = v \cdot \frac{n}{M} = \frac{1}{M}\left(n - \frac{t}{100}\right)$$

Bei jedem Lose wird also die Spielchance durch folgende Wahrscheinlic
zum Ausdrucke kommen. Erstens die Wahrscheinlichkeit des Haupttreffers, z
die Wahrscheinlichkeit eines kleineren Treffers und drittens die Wahrschein
einer Niete. Während aber die beiden ersteren Wahrscheinlichkeiten eine Ge
hoffnung darstellen, repräsentirt die letzte die Aussicht auf einen Verlust, i
der jeweilige Courswerth des Lospapieres den stipulirten Betrag eines kl
Treffers übersteigt.

Bezeichnet man daher diese Differenz zwischen Courswerth und kl
Treffer mit dem Buchstaben a, so lässt sich dieser Umstand folgendermaassen
nungsmässig zum Ausdrucke bringen. Der Werth einer Gewinnsthoffnung läs
dermaassen ausdrücken, dass man den in Aussicht gestellten Gewinnstbetrag
Wahrscheinlichkeit denselben zu erreichen, multiplicirt.

Es ist daher der Werth der Gewinnsthoffnung, den Haupttreffer zu mac

$$A_1 \cdot w \cdot W_2$$

der Werth der Gewinnsthoffnung, den nächst kleineren Treffer zu machen,

$$A_2 \cdot w \cdot W_2$$

u. s. w. Demnach der Gesammtwerth aller Gewinnsthoffnungen

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \cdot \cdot \cdot + A_i)\, w \cdot W_2$$

Sowie nun eine Gewinnsthoffnung einen positiven Werth oder Werthzu
repräsentirt, so stellt die Aussicht auf einen Verlust einen negativen Werth
Werthentgang dar. Aus diesem Grunde wird die Wahrscheinlichkeit, dass ei
stimmtes Los mit einer Niete gezogen wird, mit dem sich aus diesem Um
ergebenden Verluste multiplicirt, den eigentlichen Werthentgang ausmachen, w
in der Form

$$\frac{a}{M}\left(n - \frac{t}{100}\right)$$

dargestellt ist. Stellt man nun diesen Werthentgang dem oben zur Darstellung gebr
Werthzuwachs entgegen, so ergibt sich als thatsächlicher Werth der Spiel
eines solchen Lospapieres für eine Ziehung

$$S = \frac{1}{M}\left[\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdot \cdot \cdot + A_i\right)\frac{1}{100} - \left(n - \frac{t}{100}\right) a\right]$$

Je geringer nun die Anzahl M der an einer Ziehung theilnehmenden
wird, desto grösser gestaltet sich daher der Werth der Spielchance S, welche
mit jeder weiteren Ziehung förmlich von den gezogenen Losen auf die nichtgezo
vererbt wird.

tersuchungen über die analytisch-geometrische Darstellung des Absterbegesetzes.

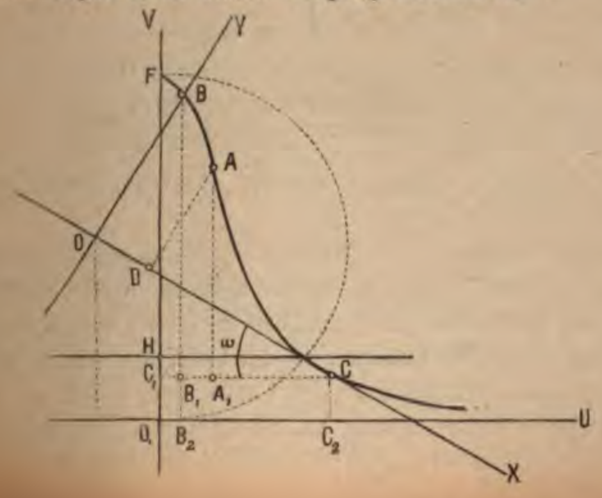
III.

Nachdem in der vorigen Abhandlung der Weg vorgezeichnet wurde, auf welchem jeweilige Ermittlung jener die Osculation bedingenden Constanten erfolgt, mag die Aufstellung der endgiltigen Gleichung für die gegebene analytisch zur Darung zu bringende Curve vollzogen werden.

In Anbetracht der Drehung, welche zum Zwecke einer zwischen der gegebenen e einerseits und der analytisch zu bestimmenden andererseits hervorzurufenden lation veranlasst wird, gelangt die letztere der Beiden mit Hinblick auf ihre dinaten in eine schiefe Lage zu jenem Coordinatensysteme, welches der gegebenen e zu Grunde liegt. Ist also den Bedingungen der Osculation in entsprechender se Genüge geleistet worden, so ergibt sich die Nothwendigkeit, die Lage der benen Curve derart zu verändern, damit die Coordinaten der zu bestimmenden nehr identisch mit jener verlaufenden Curve, wieder in ihre ursprüngliche Rich- zurückgelangen. Dieser Anforderung wird nun dadurch Rechnung getragen, dass Winkel ω, in welchem die Drehung zum Zwecke der herbeizuführenden Osculation veranlasst wurde, auch das Maass der Rückwärtsdrehung in die ursprüng- Lage bezeichnet.

Ist nämlich die Beschaffenheit der gegebenen Curve eine derartige, dass die mit der in der Gleichung 10) ausgedrückten, erst durch Ermittelung ihrer anten analytisch zu bestimmenden Curve nur nach entsprechender Drehung um Winkel ω in allen ihren Punkten osculirt, so wird durch Zurückdrehung des systemes der gegebenen, auf diese Weise analytisch verschobenen Curve, in das system der analytisch zugrunde gelegten, der mathematischen Anforderung insoentsprochen, als die der gegebenen Curve zugehörigen Coordinaten durch analytisch-geometrischen Process keine Veränderung erfahren.

Nachstehende Figur stellt diesen Vorgang bildlich dar



indem eine durch die Gleichung 1) resp. 10) analytisch zur Darstellung gebra
Curve, welche in ihrem Verlaufe mit der gegebenen übereinstimmt, durch Zur
drehung ihres zugehörigen Axensystemes in jene Lage gebracht wird, in welcher
dieselbe ursprünglich befand. Hierin bezeichnet nun das Axensystem $X\,Y$ das
gegebenen Curve $B\,C$ entsprechende, während des Axensystem $U\,V$ das dem b
hungsweisen Curvensysteme zugrundegelegte darstellt.

Es bezeichnet in Folge dessen der Winkel $D\,C\,C_1 = \omega$ den in Bet
kommenden Drehungswinkel, $B_1\,C_1 = B_2\,O_1 = \alpha$ und $C\,C_2 = C_1\,O_1 = \beta$
constanten Abstände von den Coordinatenaxen V und U, während $O_1\,H = b$
$O_1\,F = 2\,r$ die bereits in der Form 1) in Betracht gezogenen, der Curve
hörigen Constanten repräsentiren. Berücksichtigt man nun die kürzesten Entfern
des Punktes O von den Axen U und V, d. i. $O\,V = p$ und $O\,U = q$, so er
sich die Relationen, welche hier die entsprechende Wiederherstellung der ursp
lichen Coordinatenrichtung für die gegebene Curve bedingen, in den Formen

21) $$u = \xi + \alpha = p + y \operatorname{Sin} \omega + x \operatorname{Cos} \omega$$
$$v = \eta + \beta = q + y \operatorname{Cos} \omega - x \operatorname{Sin} \omega$$

worin p und q die constanten Coordinaten des dem Axensysteme $X\,Y$ entspre
den Anfangspunktes O mit Rücksicht auf das Axensystem $U\,V$ repräsentiren
sich folgendermaassen darstellen lassen

22) $$p = \alpha + \xi_0 - x_0 \operatorname{Cos} \omega$$
$$q = \beta + x_0 \operatorname{Sin} \omega$$

In den Formen 21) gelangen daher die Unbekannten u und v resp. ξ u
durch x und y zum Ausdrucke, so dass man auf diese Weise eine reine Bezieh
zwischen x und y erhält, in welcher die gesuchte Gleichung der in ihren einze
Punkten gegebenen Curve zur Darstellung gebracht ist.

Demgemäss geht aus den Formen 1) resp. 10) folgendes Resultat hervor:

Substituirt man nämlich die Werthe 21) im beziehungsweisen Sinne in
dieser beiden Gleichungen, so ergibt sich

23) $$p + y \operatorname{Sin} \omega + x \operatorname{Cos} \omega = b \sqrt{\frac{2\,r}{q + y \operatorname{Cos} \omega - x \operatorname{Sin} \omega} - 1}$$

worin p, q, r, b und der Winkel ω bestimmte constante Grössen bedeuten. Hier
resultirt nun eine Gleichung dritten Grades von der Form

24) $$[(p + y \operatorname{Sin} \omega + x \operatorname{Cos} \omega)^2 + b^2]\,(q + y \operatorname{Cos} \omega - x \operatorname{Sin} \omega) - 2\,r\,b^2 = 0$$

in welcher sich das endgiltige Resultat unserer diesbezüglichen mathemathisc
Ausführungen ergibt.

Nachdem wir also allgemein die Methode der analytisch-geometrischen D
stellung einer Curve festgestellt haben, deren allgemeine Beschaffenheit innerh
bestimmter Grenzen mit derjenigen Curvenart übereinstimmt, welche in der Gleichung
zum Ausdrucke gelangt, sind wir nunmehr in der Lage, den speciellen Fall betreff
die geometrisch-analytische Darstellung der Curve der ferneren wahrscheinlic
Lebensdauer einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Da jedoch dieselbe n
Maassgabe der jeweilig zugrundegelegten Mortalitätstafel einen entsprechenden Unt

ed in ihrem Verlaufe aufweisen muss, so ist es nothwendig zur Präcisirung des
es eine bestimmte Sterblichkeitstafel als Grundlage anzunehmen und wollen wir
er die bereits in unseren früheren Abhandlungen öfters angewendete Tafel der
englischen Gesellschaften auch diesmal als Basis annehmen.

Während also das jeweilige Alter die Abscisse der zu bildenden Curve dar-
lt, repräsentirt die auf dieser Grundlage bestimmte, diesem Alter jeweilig ent-
chende, fernere wahrscheinliche Lebensdauer deren Ordinate. Auf diese Weise
ben sich für die Bestimmung des Curvenverlaufes ebensoviele Punkte, als Alters-
sen in Betracht gezogen werden, so dass man wohl die Curve graphisch darzu-
len in der Lage ist, das Wesen ihrer geometrisch-analytischen Beschaffenheit
ch, welches in der Ermittelung der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer als
hematisch ausgedrückte Function des Alters besteht, kann nur auf dem Wege
r entsprechenden Vergleichungsmethode, unter Zugrundelegung einer ähnlichen,
ytisch bereits bestimmten Curve, zum Ausdrucke gebracht werden.

In nachfolgender Tabelle sind die Coordinaten der einzelnen Punkte dieser
ellen Curve in ihren jeweilig entsprechenden Werthen zum Ausdrucke gebracht

Tafel

der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer als Function des Alters
(auf Grundlage der Sterblichkeitstafel der 17 englischen Gesellschaften).

Wahrscheinliche fernere Lebensdauer	Differenz derselben in zweien aufeinanderfolgen-Jahren	Lebensalter	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer	Differenz derselben in zweien aufeinanderfolgenden Jahren	Lebensalter	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer	Differenz derselben in zweien aufeinanderfolgenden Jahren
42·37112	0·69545	45	23·18642	0·71335	72	7·16846	0·41078
41·67567	0 69749	46	22 47307	0·70772	73	6·75768	0·39526
40·97818	0·69904	47	21·76535	0·70179	74	6·36242	0·38275
40·27914	0·70066	48	21·06356	0·69530	75	5·97967	0·36793
39·57848	0·70236	49	20·36826	0·68854	76	5·61174	0·35437
38·87612	0·70368	50	19·67972	0·68126	77	5·25737	0·34035
38·17244	0·70512	51	18·99846	0·67320	78	4·91692	0·32668
37·46732	0·70660	52	18·32526	0·66534	79	4·59024	0·31372
36·76072	0 70778	53	17·65992	0·65626	80	4·27652	0·30147
36·05294	0·70904	54	17·00366	0·64744	81	3·97505	0·29029
35·34390	0 70996	55	16·35622	0 63878	82	3·68476	0·28178
34·63394	0·71103	56	15·71744	0·62791	83	3·40298	0·27358
33·92291	0·71176	57	15·08953	0·61817	84	3·12940	0·26748
33·21115	0·71265	58	14·47136	0·60851	85	2·86192	0·26159
32·49850	0·71324	59	13 86285	0·59633	86	2·60033	0·25595
31·78526	0·71395	60	13·26652	0·58495	87	2·34438	0·25057
31·07131	0 71480	61	12 68157	0·57249	88	2·09381	0 24381
30·35651	0·71319	62	12 10908	0·55925	89	1·85000	0·23590
29·64332	0·71216	63	11·54983	0·54577	90	1·61410	0·22733
28·93116	0·71383	64	11·00406	0·53162	91	1·38677	0·21667
28·21733	0·71565	65	10·47244	0·51708	92	1·17010	0·20490
27·50168	0·71751	66	9·95536	0·50229	93	0·96520	0·18259
26·78417	0·71956	67	9·45307	0·48640	94	0·78261	0·16461
26·06461	0·72044	68	8·96667	0·47244	95	0·61800	0·13151
25·34417	0·72088	69	8·49423	0·45698	96	0·48649	0·10187
24·62329	0·71979	70	8·03725	0·44187	97	0·38462	0·10462
23·90350	0·71718	71	7·59538	0·42692	98	0·25000	0·10000

Wir beabsichtigten ursprünglich die Grenzen der analytisch zu bestimmen
e *zwischen dem 18. und 99.* Lebensjahre festzustellen. Angesichts

standes jedoch, dass die Abscisse des Wendepunktes der zugrundegelegten oscul
den Curve kleiner ist, als diejenige, welche der Curve der ferneren wahrscheinl
Lebensdauer innerhalb dieser Grenzen mit Rücksicht auf ihren Wendepunkt
spricht, ist es nothwendig die Grenze des Anfangspunktes der Curve au
22. Lebensjahr zu verschieben. Aber auch in Betreff des Maximalalters ist
boten, eine Verschiebung eintreten zu lassen, weil die fernere wahrscheinliche L
dauer im 99. Lebensjahre thatsächlich nicht Null ist und ist es daher nothw
um einen Fehler in Betreff des sonstigen Verlaufes der Curve zu vermeide
101. Lebensjahr als äusserste Altersgrenze anzunehmen.

Die hier zu bestimmende Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdau
daher zwischen den Grenzen vom 22. bis zum 101. Lebensjahre einer analy
Darstellung unterworfen. Mit Bezug hierauf werden folgende Bedingungen
werden müssen, wenn die in der Form 1) ausgedrückte Curve mit der hier
tracht gezogenen Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer osculiren s

Nach obiger Tabelle entspricht die Abscisse $x + k$ dem Alter und die
nate y der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer, während die Differenz der le
in zweien aufeinanderfolgenden Jahren die Tangente des jeweiligen Neigungsw
in dem betreffenden Punkte darstellt.

Dem Wendepunkte einer derart construirten Curve entsprechen etw
Ordinaten

$$x_1 + k = 42{\cdot}6 \qquad \text{und} \qquad y_1 = 25{\cdot}1$$

während in diesem Punkte der Neigungswinkel der Tangente zur Abscissenaxe
den Winkel ε zum Ausdrucke kommt, dessen beiläufige Grösse in der tri
metrischen Function

$$tg\ \varepsilon = -0{\cdot}72$$

dargestellt ist. Wir können hier nämlich nur mit beiläufigen Werthen rechnen
der Verlauf einer durch aufeinanderfolgende Punkte bestimmten Curve zu
Anhaltspunkte für die genaue Ermittelung des Wendepunktes einerseits und
Neigungswinkels der demselben zugehörigen Tangente andererseits bietet.

Der hier in Betracht kommende Curventheil beginnt bei der Grenze
$k = 22$ Jahren, welcher Punkt auch als Anfangspunkt des zugehörigen Coordi
systemes gedacht werden muss, so dass obiger Tabelle gemäss die Curve vo
Ordinatenaxe, in dem Punkte $y_0 = 39{\cdot}57848$ geschnitten wird.

Was nun die äusserste Grenze des Lebensalters also hier das 101. Lebe
betrifft, so muss in demselben die Ordinate Null werden, so dass deren Absci
dem Werthe

$$x_0 = 101 - 22 = 79$$

zum Ausdrucke gelangt.

In gleicher Weise wird die Abscisse des Wendepunktes vom Anfangspunk
Axensystemes angefangen gerechnet werden müssen, so dass sich dieselbe i
Werthe $x_1 = 42{\cdot}6 - 22 = 20{\cdot}6$ ergibt.

[U]eber die relative Werthbestimmung verzinslicher Lospapiere.

II.

Der Werth der Spielchance, welcher in der vorigen Abhandlung allgemein für [d]en mit Serienziehungen ausgestatteten Spielplan zur Darstellung gebracht wurde, [ze]rfällt also den bisherigen Auseinandersetzungen gemäss in den positiven Werth der [Ge]winnstchance und in den negativen Werth der Verlustchance. Angesichts des [Um]standes nun, dass mit jeder Ziehung eine bestimmte Anzahl von Losserien [de]r Theilnahme an den weiteren Ziehungen verlustig wird, steigert sich sowohl [die] Gewinnst- als auch die Verlustchance in umgekehrtem Verhältnisse zu [der] an der jeweiligen Ziehung theilnehmenden Losanzahl. Wird ferner er[wog]en, dass die meisten Spielpläne derart eingerichtet sind, dass auch die [zu v]erlosenden Serien in ihrer Anzahl in den späteren Jahren immer zunehmen, so [geht] daraus hervor, dass das Wachsthum der Spielchance in gleichem Verhältnisse [mit] der Tilgung des Losanlehens zunimmt, und zwar umsomehr, als der durch die [Ver]luststchance repräsentirte Werthentgang in seinem Verhältnisse zum Werthe der [Gew]innstchance ein nahezu unveränderter bleibt.

Da also eine jede bis zur völligen Tilgung des Losanlehens stipulirte Ziehung [ein]en bestimmten Werth der Spielchance repräsentirt, so wird die Summe aller [die]ser auf den gegenwärtigen Zeitpunkt entsprechend discontirten Werthe den Baar[wert]h der Gesammt-Spielchance darstellen.

Dieser Baarwerth aller Spielchancen bildet nun den Hauptbestandtheil des [Meh]rwerthes eines Lospapieres gegenüber dem Obligationswerthe desselben. Wird [fe]r[ne]r berücksichtigt, dass jener Obligationswerth thatsächlich in der jeweiligen Höhe [des k]leinsten Trefferbetrages zum Ausdrucke gebracht ist, so ergibt sich hieraus die [Concl]usion, dass ein mit dem kleinsten Treffer gezogenes Los, wenn von kleinen [Agio]avancen desselben abgesehen wird, in Wirklichkeit blos den Baarwerth der [Gesa]mmtspielchance als Verlust aufzuweisen hat.

Ausser dem nackten rechnungsmässigen Werthe der Spielchance, muss aber [auch] dem eingebildeten Werthe derselben Rechnung getragen werden, welcher darin [lieg]t, dass die Gewinnsthoffnung eines Loses im Publicum viel höher angeschlagen [wird,] als dies dem mathematischen Calcul gemäss entspricht. Es wird hier nämlich [neben] der rechnungsmässigen Wahrscheinlichkeit auch der Zufall einer Werth[schät]zung unterworfen,

In diesem Umstande liegt auch hauptsächlich die Ursache der besonderen An[zieh]ungskraft, welche das Lospapier auf das anlagesuchende Capital ausübt, was auch [die E]rscheinung einer oft übermässigen Bewerthung einzelner Loskategorien erklär[lich m]acht. Der private Capitalist trennt sich nur im äussersten Falle von seinem [Be]sitze und die nächste Folge hievon ist, dass sich der grösste Theil des Los[capita]les in festen Händen befindet. Der höhere Courswerth eines Lospapieres ist [m]anchmal blos der besonderen Beliebtheit desselben im Publicum zuzuschreiben [und] kann hiedurch die rechnungsmässige Werthbestimmung eines solchen in keiner [Weise] beeinflusst werden.

Sehr viel Aehnlichkeit mit dieser durch Serien- und Nummernziehungen g zeichneten Loskategorie besitzt diejenige, welche neben einer bestimmten grösserer Treffer ebenfalls eine verhältnissmässig grosse Anzahl kleinster aufweist, nur ist hier nicht die gezogene Serien- und Losnummer sondern die folge der gezogenen Losnummern allein für einen entfallenden grösseren maassgebend.

Neben jenen mit Serien- und Nummernziehungen ausgestatteten Spiel bei welchen zugleich in der entsprechenden Anzahl grösserer und kleinster die Tilgung des Losanlehens vorgesehen ist, kommen diejenigen mit Prämie Amortisationsziehungen ausgestatteten in Betracht, bei denen eine bestimmte von grösseren und kleineren Treffern für jede Prämienziehung stipulirt ist; die Auslosung bei der Amortisationsziehung die Entkleidung des Lospapieres Eigenschaft der Obligation bedingt. Ausser dem diesfalls in Betracht ge Amortisationswerthe des Loses erhält der Besitzer desselben einen Gewinns welcher an allen weiteren Prämienziehungen theilzunehmen berechtigt. H behält ein bei der Prämienziehung mit einem Treffer gezogenes Los auch wei Werth der einfachen Obligation. Erst dann, wenn ein solches Lospapier sow der Prämienziehung als auch bei der Amortisationsziehung als verlost er erlischt dessen Werth nach beiden Richtungen.

Soweit es sich in diesem Falle um verzinsliche Losanlehen handelt, i der Obligationswerth einerseits im Amortisationswerthe, andererseits im Wer Gewinnstscheines ausgedrückt, indem der letztere die von der Verlustchan kleidete Spielchance im Allgemeinen repräsentirt. Der Werth des Gewinnsts ist hier gewissermaassen als Theilbetrag des Obligationswerthes zu betrachte dem also bei der Amortisationsziehung die Verlustchance allein in Betracht äussert sich in der Prämienziehung blos die Gewinnstchance. Der Werth, der Gewinnstschein eines derartigen Loses besitzt, ist daher ein grösserer, jenige der Spielchance eines solchen vor dessen Amortisation, weil durch die der in Aussicht gestandene Verlust thatsächlich eingetreten ist, so dass der Ge schein von einem solchen nicht mehr belastet wird.

Freilich kann Angesichts des Umstandes, dass die Zahl der an den Pr ziehungen Betheiligten, eine sehr geringe Abnahme erfährt, die Gewinnstchan als im Zunehmen befindlich betrachtet werden, wie dies bei den früheren L gorien der Fall ist. Wird ferner erwogen, dass hier zumeist auch die Höhe d gesetzten Trefferbeträge in rapider Weise abnimmt, so gelangt man zu der sion, dass die Gewinnstchance hier nicht nur keine Steigerung erfährt, sonder von Zeit zu Zeit eine Verringerung aufweist.

Dieser Umstand tritt umsomehr bei jenen Loskategorien in den Vorde bei welchen der Spielplan derart eingerichtet ist, dass die Gewinnsthoffnun Loses überhaupt nicht erlischt, solange die Amortisation des gesammten Losa *nicht erfolgt* ist. Es können auf diese Weise auf einen und denselben Gewinns *mehrmals* höhere Gewinne entfallen, wie dies beispielsweise bei den vierperc

ngarischen Hypothekenlosen der Fall ist. Hier bleibt die Anzahl der an den Prä-
ienziehungen betheiligten Interessenten eine vollständig unveränderte.

Die Gewinnstchance dieser Loskategorieen ist daher im Verhältnisse zu anderen
ne minderwerthige, indem die Wahrscheinlichkeit eines Treffers hier eine nahezu
ler gänzlich unveränderte bleibt, während dieselbe bei Losen, deren Spielplan mit
rien- und Nummernziehungen ausgestattet ist, von Ziehung zu Ziehung sich steigert.

Da nun der Gewinnstschein eines solchen Lospapieres die Summe der ent-
rechend discontirten Werthe aller Gewinnstchancen repräsentirt, so lässt sich der
rth desselben folgendermaassen darstellen: Bezeichnet der Buchstabe G den Werth
Gewinnstchance für eine einzelne Ziehung, n die Anzahl der noch zu gewärtigen-
Ziehungen bis zur fälligen Tilgung des Losanlehens, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ die bis
len betreffenden Ziehungen zu verstreichenden Fristen und $Q = 100\,q$ den zu-
ndegelegten Discontirungszinsfuss, so ist unter Voraussetzung gleicher Werthe der
elnen Gewinnstchancen der Werth des Gewinnstscheines

$$= G\left((1+q)^{-\lambda_1} + (1+q)^{-\lambda_2} + (1+q)^{-\lambda_3} + \ldots + (1+q)^{-\lambda_n}\right)$$

Nachdem wir nunmehr die Beschaffenheit der verzinslichen Losanlehen einer
emeinen Untersuchung unterworfen haben, so wollen wir mit einigen Worten
a diejenige der Unverzinslichen kennzeichnen.

Diese theilen sich in solche, deren Spielchance in ihrem rechnungsmässigen
-the eine derartige Höhe erreicht, dass in derselben auch der Werth einer ent-
chenden Verzinsung inbegriffen ist und in jene, bei denen die Höhe des kleinsten
ffers einen theilweisen Ersatz für die entfallenden Zinsen bietet und im Uebrigen
Aufrechterhaltung der Gewinnsthoffnung dazu beiträgt, den Besitzer derselben
den Zinsenentgang gewissermaassen zu entschädigen.

Bei dieser Gelegenheit mag auch derjenigen Kategorie unverzinslicher Lose
ähnung gethan werden, bei denen die besondere Höhe der grossen Treffer aus-
aggebend ist. Dieselben repräsentiren neben einem sehr kleinen unverzinslichen
ctivwerthe eine stetige Promesse.

Hier spielt nun die Verlustchance eine besondere Rolle, so dass sich dies-
üglich die Frage aufwirft, in welchem Verhältnisse sich dieselbe jeweilig
Gewinnstchance befindet. Es kommt hier hauptsächlich darauf an, in welcher
ise die grossen Treffer, angesichts des Verlustes, welcher mit dem kleinsten
ffer verbunden ist, dotirt sind. Aber nicht nur die Höhe der Trefferbeträge allein
dern auch die Anzahl der grösseren Treffer selbst, ist maassgebend für die gün-
e Beurtheilung des zugrundegelegten Spielplanes. Das Verhältniss der grösseren
ffer zur Gesammtsumme der jeweilig zu verlosenden Titres innerhalb einer
hung muss der Höhe des mit dem kleinsten Treffer verbundenen Verlustes ent-
echen, da sonst der Werth der Spielchance seine Bedeutung verliert.

Der Werth der Spielchance wird durch die Differenz zweier Producte reprä-
tirt. Während die Factoren des einen Productes durch die Gewinnstwahrschein-
hkeit und den Gewinnstbetrag zur Darstellung gelangen, bilden die Verlustwahr-
ichkeit *und der Verlustbetrag* die Factoren des anderen Productes. Das entspre

chende Verhältniss dieser vier Factoren ist daher maassgebend für die mehr od
minder günstige Beschaffenheit des Spielplanes selbst und für den Werth der Spi
chance insbesondere.

Wird nun erwogen, dass dieses Verhältniss im Laufe der Tilgungsperiode ei
Verschiebung zu Ungunsten des Losbesitzers erleiden kann, so ist es nothwen
dasselbe auch in Bezug auf die Reihenfolge der Ziehungen, und zwar hinsichtl
der grösseren Trefferbeträge einerseits und der jeweilig auf einmal zur Verlos
gelangenden Titres andererseits einer genaueren Beurtheilung zu unterziehen.

Manche Loskategorien weisen nämlich insbesondere nach der ersten Ziehun
periode ein auffallendes Sinken der höheren Trefferbeträge, verbunden mit e
rapiden Vermehrung der kleinsten Treffer von Ziehung zu Ziehung auf. Dieser V
gang gilt hauptsächlich dem Zwecke, dem Losmateriale, dessen Abstossung
nämlich in der ersten Zeit bewerkstelligt werden soll, eine gewisse Anziehungsk
zu verleihen. Ist sodann diesem Umstande Rechnung getragen, so sinkt die Spi
chance plötzlich auf ein desto tieferes Niveau, je grössere Vortheile bezüglich d
selben während der Emissionsperiode geboten wurden.

Hier vollzieht sich also eine derartige Verschiebung zwischen Gewinnst-
Verlustchance, indem der Gewinnstbetrag einerseits vermindert und die Ve
wahrscheinlichkeit andererseits vergrössert wird.

Wenn also der Modus einer in bestimmten Perioden zunehmenden Amortis
bei Loskategorien gehandhabt wird, bei denen durch die Amortisation selbst
Werth der Spielchance in gleichem Verhältnisse zu dieser sich steigert, so ist
unter der Voraussetzung einer Aufrechterhaltung der höheren Trefferbeträge s
deshalb zulässig, weil das in diesem Falle naturgemässe Wachsthum der Spielch
hiedurch nur unterstützt wird, für eine einzelne Ziehung jedoch der durch die V
mehrung der kleinsten Treffer hervorgebrachte ungünstige Einfluss auf dieselbe
kaum nennenswerther Bedeutung ist.

Anders verhält sich dies bei jenen Loskategorien, wo die Amortisation
Loses die Gewinnstchance desselben in keiner Weise beeinträchtigt, indem der
gefolgte Gewinnstschein zur Betheiligung an den wieteren Ziehungen berecht
Hier wird die Gewinnstchance bei allen präliminirten Prämienziehungen nur
unbedeutende Veränderung erleiden. Hingegen wird im gleichen Verhältniss
der zunehmenden Amortisation der Titres die Verlustchance derselben gestei
Während also bei sonstigen Loskategorien die Verlustchance blos eine succes
Steigerung erfährt, stets in einem bestimmten Verhältnisse zur Gewinnstchance
bleibend, entwickelt sich hier die Verlustchance derart, dass sie schliesslich
Gewinnstchance überflügelt.

Während man also gewöhnt ist, dass sonst Lospapiere im letzten Tilg
stadium, ihrer Spielchance zufolge hoch im Course steigen, erblickt man hie
umgekehrten Vorgang, indem allgemein die mit Prämien- und Amortisationszieh
ausgestatteten Lose während der letzten Ziehungsperiode eine Courseinbusse er
Dies wird aber umso mehr der Fall sein müssen, wenn die für die Prämienzieh
stipulirten Trefferbeträge eine successive Werthherabsetzung erleiden.

ntersuchungen über die analytisch-geometrische Darstellung des Absterbegesetzes.

IV.

Während wir in der vorigen Abhandlung über dieses Thema die Werthe fest-tellt haben, welche für die Coordinaten der beiden Grenzpunkte einerseits und des sprechenden Wendepunktes andererseits bei der Curve der ferneren wahrschein-en Lebensdauer unter Zugrundelegung der Sterblichkeitstafel der 17 englischen ellschaften sich ergeben, können wir nun darangehen, die weiteren Anhaltspunkte Ermittlung jener für die analytisch-geometrische Darstellung derselben in racht kommenden fünf Constanten einer entsprechenden Anwendung zu unter-fen.

Bevor wir jedoch an die vollständige Aufrollung dieser Frage gehen, ist es oten, dem Wesen der Tangente im Wendepunkte dieser Curve einige Aufmerk-keit zu schenken. Nachdem unsere Tabelle Altersunterschiede von ganzen Jahren weist, so dass die Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Abscissenwerthe einander gleich sind und durch den Werth 1 repräsentirt werden, andererseits ch die Differenz zweier entsprechenden aufeinander folgenden Ordinatenwerthe r stetigen Veränderung im Curvenverlaufe unterworfen ist, so muss unter der aussetzung, dass die Krümmung der Curve innerhalb jener kleinen Intervalle, he zwischen je zweien aufeinanderfolgenden Punkten bestehen, unberücksichtigt st, der jeweilige Quotient zwischen der Ordinaten- und Abscissen-Differenz den ufigen Werth der Tangente des Neigungswinkels in je zweien aufeinander-nden Punkten bilden. Da nun unter den gegebenen Umständen die Abscissen-renz stets 1 ist, so wird dieser Quotient einzig und allein durch die Ordinaten-renz zum Ausdrucke gelangen und erklärt sich auf diese Weise der in der vorigen andlung für die Tangente im Wendepunkte zur Geltung gebrachte beiläufige th $tg\,\varepsilon = -0{\cdot}72$. Mit Rücksicht hierauf wird der Winkel $\varepsilon = 144^\circ\,14'\,46''$ ergeben, so dass unter Heranziehung der bereits genannten Werthe folgende ositionen bestehen:

$$y_0 = 39{\cdot}58, \quad y_1 = 25{\cdot}1, \quad x_1 = 20{\cdot}6, \quad x_0 = 79$$
$$x_0 - x_1 = 58{\cdot}4, \quad y_0 - y_1 = 14{\cdot}48 \quad \text{und} \quad \varepsilon = 144^\circ\,14'\,46''$$

Führt man daher mit Hilfe der Formen 8) und 19) die Substitution dieser the in die Gleichung 20) zum Zwecke der rechnungsmässigen Aufstellung der-n als Gleichung eilften Grades nach der Unbekannten $tg\,\infty$ vollständig durch, unterzieht diese einer entsprechenden Lösung, so ergibt sich als einzige reelle zel in diesem Falle

$$tg\,\infty = 1{\cdot}327\ldots$$

d die übrigen zehn Wurzeln insgesammt immaginärer Natur sind. Demzufolge er Drehungswinkel $\infty = 53^\circ\ldots$ sein müssen, wenn die Osculation der ien Curve *einerseits und der* zu bestimmenden andererseits unter den dies-

fälligen Voraussetzungen möglich sein soll. Der Neigungswinkel der Tangente Wendepunkte der analytisch gegebenen Curve muss daher

$$\varepsilon - \omega = 91^0\ 14'\ 46''$$

sein, wenn deren Beschaffenheit bezüglich ihres Verlaufes und ihrer Krümmun verhältnisse, der durch aufeinanderfolgende Punkte dargestellten, analytisch bestimmenden Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer entsprechen Dieser Winkel, dessen Tangente durch den Werth

$$tg\ (\varepsilon - \omega) = -45{\cdot}9725$$

repräsentirt wird, lässt auf eine bedeutende Krümmung der Curve in ihrem unt Verlaufe schliessen, da derselbe auf eine zur Ordinatenaxe nahezu parallele Richt der Curve in ihrem Wendepunkte hindeutet, was angesichts des Umstandes, zugleich ein assymptotischer Verlauf derselben zur Abscissenaxe stattfindet, eine sprechende Schwenkung der Curve in ihrem unteren Verlaufe involvirt. Dieser U stand ist nun auch maassgebend für die weitere Aufrollung dieser Frage. Auf G des ermittelten Werthes von $tg\ \omega$ ergeben sich den Formen 8) und 19) gemäss Werthe der transformirten Coordinaten

$$\eta_0 = 86{\cdot}918, \qquad \eta_1 = 61{\cdot}74, \qquad \xi_1 = 0{\cdot}817, \qquad \xi_0 = 15{\cdot}917$$

sowie $\eta_0 - \eta_1 = 25{\cdot}178$ und $\xi_0 - \xi_1 = 15{\cdot}1$

welche in die Form 15) substituirt, für den Radius des bildenden Kreises den W

$$r = 41{\cdot}5$$

liefern. Berücksichtigt man nun den Umstand, dass durch die Transformation Coordinaten der Curve der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer unter Zugrund legung eines derartig grossen Winkels, wie derselbe hier in $\omega = 53^0 \ldots$ sich erg der Werth der Abscisse x_1 auf den verhältnissmässig sehr kleinen Werth $\xi_1 = 0$ reducirt wird, welcher auf den zweiten Summanden innerhalb der Klammern Form 15) insofern einen Einfluss übt, als dessen Werth infolge der empfindli Beschaffenheit seiner Function eine grosse Genauigkeit der Rechnung erford welche insbesondere auf den Winkel ω Anwendung finden muss, von dem nebst übrigen Coordinatenwerthe auch ξ_1 abhängt, so wird es erklärlich, wenn wir Behauptung aufstellen, dass sich die Rechnung auf ihre Genauigkeit in sich sel controlirt.

Die Werthe der übrigen Constanten lassen sich nun auf Grund der nun ermittelten feststellen, wobei mit Rücksicht auf obigen Umstand die Formen I- eine gegenseitige Regulirung der resultirenden Zahlenwerthe ermöglichen.

Da die Werthe von $tg\ (\varepsilon - \omega)$ und r bereits festgestellt sind, so liefert Form V den gesuchten Werth der Constante $b = 1{\cdot}173\ldots$, und die Form nachdem jetzt auch η_1 bekannt ist, den Werth $\beta = 0{\cdot}448$, während die Relation angesichts des Umstandes, dass auch ξ_1 nummerisch zum Ausdrucke gebracht wur den Werth für $\alpha = -0{\cdot}13$ liefert. Da nun ein negatives α in diesem Falle *möglich ist,* weil die zugrundegelegte Curve sich blos in der positiven Sphäre bew *so muss* dieses Resultat aus der Ungenauigkeit der Rechnung entspringen

ȧss wird zum Mindesten $\alpha = 0$ sein und demzufolge werden auch die Werthe anderen Constanten eine Ausgleichung erfahren müssen. Die Formen I und II en nun eine Gegenprobe für die gefundenen Werthe zu, so dass eine genauere ittelung derselben durch deren abwechselnde Substitution in die entsprechenden men auf dem Wege der Ausgleichung herbeigeführt werden kann. Annähernd ben sich also die Werthe der gesuchten Constanten in folgender Weise:

$= 53^0 \ldots, \; r = 41{\cdot}5 \ldots, \; b = 1{\cdot}173 \ldots, \; \alpha = 0$ und $\beta = 0{\cdot}448 \ldots$

Auf Grund dieser Resultate ergeben sich nun mittelst Zuhilfenahme der rthe

$$\text{Sin}\; \omega = 0{\cdot}7986 \qquad \text{und} \qquad \text{Cos}\; \omega = 0{\cdot}6018$$

weiteren zur Aufstellung unserer speciellen Gleichung der Curve der ferneren rscheinlichen Lebensdauer nöthigen Anhaltspunkte. Unter Zugrundelegung der men 22) lassen sich die Werthe p und q rechnungsmässig feststellen und er- en wir demgemäss

$$p = -\,41{\cdot}626 \qquad \text{und} \qquad q = 62{\cdot}540$$

dass der Aufstellung der gesuchten Gleichung nichts mehr im Wege steht, und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 24) schliesslich die Form

$$(0{\cdot}7986 \,.\, w_x + 0{\cdot}6018\, x - 41{\cdot}626)^2\, (0{\cdot}6018\, w_x - 0{\cdot}7986\, x + 62{\cdot}54) + \\ + 1{\cdot}376\, (0{\cdot}6018\, w_x - 0{\cdot}7986\, x + 62{\cdot}54) - 114{\cdot}21 = 0$$

bt, in welcher als Bezeichnung der ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer anstatt r Werth w_x gesetzt ist.

Es ist also auf diese Weise das Absterbegesetz durch eine rve dritten Grades zum Ausdrucke gebracht.

Inwiefern nun dieser Umstand geeignet ist, in Verbindung mit der bekannten ation

$$L_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{w_x}}}{w_x}$$

Ermittlung der Curve der Lebenden beizutragen, hängt von der Integra- tät derjenigen Function ab, welche sich unter Zuhilfenahme jener Gleichung ten Grades nach vollzogener Elimination von x aus der letzteren Form, unter n Integralzeichen ergibt. Diese Frage scheint wichtig genug zu sein, um dieselbe er besonderen Untersuchung zu unterwerfen und wollen wir in den weiteren Aus- rungen auf dieselbe zurückkommen.

In unseren früheren Untersuchungen betreffend die „Theorie und näherungs- se Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes" gelangten wir zu er Relation, welche eine Analogie mit der letzteren aufweist, indem die Bezie-

hung zwischen den discontirten Zahlen der Lebenden und der Mise einer lebe
länglichen Leibrente durch Vermittlung des Alters in der Form

$$D_x = \frac{e^{-\int \frac{dx}{M_x}}}{M_x}$$

zur Darstellung gebracht ist. Angesichts dieses Umstandes muss also diejenige Cur
bei welcher die Mise einer lebenslänglichen Leibrente die Function des Alters bild
eine ähnliche Beschaffenheit besitzen, wie die Curve der ferneren wahrscheinlich
Lebensdauer.

Unsere Ausführungen in der letzterwähnten Abhandlung weisen auch thatsä
lich darauf hin, indem durch dieselben unsere diesbezügliche Annahme bestät
wird. Unter Zugrundelegung der Tabelle der 17 englischen Gesellschaften befin
sich der Wendepunkt dieser Curve etwa im Alter von $x_1 = 62$ Jahren, während
entsprechende Mise $y_1 = 9{\cdot}78$ ist. Der in diesem Wendepunkte in Betracht ko
mende Neigungswinkel der zugehörigen Tangente ist beiläufig $\varepsilon = 162{\cdot}5^0$. Es s
hier also, unter Berücksichtigung einer entsprechenden Wahl der beiden äussere
Grenzpunkte der bezüglichen Curve, welche analogerweise durch y_0 einerseits und
andererseits zum Ausdrucke gelangen, alle Voraussetzungen gegeben, welche für
geometrisch-analytische Darstellung derselben nöthig sind, so dass auch in di
Falle die allgemeine Form 24) die Grundlage der gesuchten Gleichung bildet,
welcher blos die constanten Grössen p, q, r, b und ∞ durch die speciellen Krü
mungsverhältnisse der Curve bedingt sind.

Auf diese Weise ergibt sich als allgemeine Relation zwischen dem Alter u
der Mise einer lebenslänglichen Leibrente die Form:

$$[(p + M_x \operatorname{Sin} \infty + x \operatorname{Cos} \infty)^2 + b^2] (q + M_x \operatorname{Cos} \infty - x \operatorname{Sin} \infty) - 2 r b^3 = 0$$

und zwar ist in der Form 24) einfach für y die Bezeichnung der Mise M_x geset
während x in unveränderter Weise das Alter darstellt.

Nun gelangten wir aber in jener wiederholt genannten Abhandlung über d
Prämienreserve zu der Relation

$$p_x = S\left(\frac{1}{M_x} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

worin S die zugrundegelegte Versicherungssumme und r den Aufzinsungsfactor da
stellt, also p_x blos von der einzigen Variablen M_x abhängt. Wird daher M_x a
Function von p_x und dieser beiden Constanten in Betracht gezogen, und die
Ausdruck in obige Gleichung substituirt, so ergibt sich eine directe Beziehun
zwischen der Todesfall-Versicherungsprämie p_x und dem Alter x.

Die Verlustchance verlosbarer Werthpapiere.

Die Amortisation fix verzinslicher tilgbarer Anleihen geschieht gewöhnlich in Weise, dass in gewissen gleich grossen Zeitintervallen je eine bestimmte Anzahl oints derselben durch Verlosung aus dem Verkehre gezogen wird. Durch Rückattung des Nominalwerthes der jeweilig verlosten Titres wird auf diese Art das ehen successive getilgt und ergibt sich in Folge dessen bei einem etwaigen den ninalwerth übersteigenden Courswerthe für den Besitzer ein mehr oder minder ser Verlust, welcher umso empfindlicher ist, je günstiger die Verzinsungs- und rritätsbedingungen des Darlehens sich gestalten, da dieselben auf den jeweiligen rswerth der Titres einen entscheidenden Einfluss ausüben

Eine besondere Art der Tilgung verzinslicher Anlagewerthe bildet der mit sseren Gewinnstprämien verbundene Amortisationsmodus, dessen Wesen darin eht, dass eine jede Amortisationsziehung mit einem oder mehreren grösseren fern ausgestattet ist. Die zur Dotirung der Trefferbeträge nöthigen Mittel werden durch Zugrundelegung eines verhältnissmässig niedrigeren Zinsfusses und auf Wege einer langsameren Tilgung aufgebracht.

Durch diesen Vorgang wird nun einem einfachen tilgbaren Anlehen der Cha-er eines Losanlehens aufgeprägt, indem eine auf Kosten des Obligationswerthes haffene Gewinnstchance, in Function tritt. Ob nun eine durch günstigere Ver-ungsbedingungen oder durch die etwaige Gewinnstchance hervorgebrachte den inalwerth übersteigende Coursavance in Betracht kommt, so bildet dieselbe stets enige Aequivalent, welches ein bei der Amortisationsverlosung gezogenes Werther durch Einlösung im Nominalwerthe an Werthverlust erleidet.

Wie wir bereits in der „die relative Werthbestimmung verzinslicher Lospapiere" effenden Abhandlung hervorgehoben haben, bildet die Verlustchance einen grirenden Theil der Spielchance im Allgemeinen, indem wohl das jeweilige Zinsenarniss in erster Linie zur Bildung der grossen Trefferbeträge herangezogen wird, grosse Zahl kleiner durch Amortisation hervorgebrachter Coursverluste jedoch nicht geringen Theile zur Ergänzung derselben beiträgt.

Dieser Umstand ist nun maassgebend für die zweideutige Beschaffenheit der elchance im Allgemeinen. Während bei einem Lospapier auf der einen Seite die wartschaft auf einen grösseren Treffer winkt, steht auf der anderen Seite ein eutend wahrscheinlicherer Verlust in Aussicht, welcher wohl im Verhältnisse zum aigen Gewinne unbedeutend ist, doch dafür desto eher eintreten kann. Während o in der Gewinnstchance eines jeden Lospapieres ein gewisser Werth positiver schaffenheit erblickt werden muss, bildet die mit demselben verbundene Verlustauce einen solchen im negativen Sinne, welcher sich in dem Producte der Wahreinlichkeit des Verlustes einerseits und des jeweiligen Verlustbetrages andererts manifestirt. Da nun diese Wahrscheinlichkeit in dem Verhältnisse zwischen r jeweilig zur Verlosung gelangenden und der an der Ziehung überhaupt theilhmenden Anzahl der Lostitres zum Ausdrucke gelangt, so bildet der aus dem erhältnisse dieser beiden Zahlen sich ergebende Quotient, multiplicirt mit der i acht *kommenden Differenz* zwischen dem momentanen Courswerthe einersei

dem Nominalwerthe, beziehungsweise dem kleinsten Treffer andererseits, den W
welcher der Verlustchance im negativen Sinne beizumessen ist. Wird also d
einer Ziehung überhaupt theilnehmende Anzahl Lose mit dem auf diese
ermittelten, ziffermässig ausgedrückten, absoluten Werthe der Verlustchance
plicirt, so ist in diesem Producte der Gesammtbetrag aller durch diese Zi
hervorgebrachten Coursverluste dargestellt.

Das Risiko, welches also jeder Losbesitzer in der jeweiligen Verlustchan
geht, kann also auf diese Weise einer genauen Schätzung unterzogen werden
ist daher naheliegend, dass dasselbe auch von einem Anderen getragen werden
wenn dieser eine solchermaassen geschätzte Gegenleistung zugesichert erhäl
gelangt hier also das Versicherungsprincip vollständig zur Geltung, indem
Entrichtung einer entsprechenden Prämie ein bestimmtes Risiko, welches so
Besitzer des Loses selbst tragen müsste, vom Versicherer übernommen und ge
werden kann.

Durch die Einführung der Versicherung auf dieses Gebiet wird ein
Moment in das Wesen der auf dem Wege der Amortisation durch Verlosung
gendon Darlehenstilgung gebracht, indem das auf der Verlustchance beruhende
des Coursverlustes auf die Gesammtheit der Versicherten überwälzt wird.
welcher Tragweite dieser Umstand für die Coursentwicklung vieler über Pari n
der Werthpapiere im Allgemeinen und der meisten Lospapiere insbesondere ist
sich unschwer ermessen, wenn man die Bedingungen in Erwägung zieht, welch
solche zu fördern in der Lage sind.

Ein der Verlustchance durch Versicherung entledigtes Lospapier ist von
plötzlich sich vollziehenden Werthveränderung, welche mit dem Wesen des kle
Treffers verbunden ist, thatsächlich befreit, und erreicht auf diese Weise jene
lität des Werthes, welche einem Anlagepapiere als vornehmste Eigenschaft
über dem Spielpapiere eigen sein soll. Und diese Stabilität des Werthes
mittelst welcher jene der freien Coursentwicklung entgegenstrebende Eigenthü
keit des auf dem Wege der Verlosung tilgbaren, über Pari notirenden, fix v
lichen Anlagepapieres einerseits und des Lospapieres andererseits, aus dem
geräumt und wirkungslos gemacht wird. Im Allgemeinen ist die Eliminirun
Verlustchance auch auf die Rentabilität der Lospapiere von besonderem Ein
Es gibt nämlich Capitalisten, welche einen Theil ihres Vermögens in Lospa
anlegen und durch den Verkauf der Spielchance eine gute Verzinsung ihres
tales erzielen. Die Usance beim Verkaufe der Spielchance bringt es aber mi
dass die mit derselben verbundene Verlustchance zu Lasten des Sp
käufers fällt. Dadurch bleibt aber die Verzinsung seines Capitales in ge
Beziehung von der Spielchance abhängig und wird auf diese Weise zu einer s
kenden. Erst durch die Inanspruchnahme der Versicherung gegen Coursverlust in
Verlosung, wird das jährliche Erträgniss der Lose im relativen Sinne ein
mässiges und vom Zufalle unabhängiges.

Selbst was die Beschaffenheit des Spielplanes der einzelnen Loskategorien
langt, ist der Einfluss der Versicherung von besonderem Belang. Bei m

sen, deren Serien- und Nummernziehungen getrennt vorgenommen werden, wird rch die Versicherungs-Institution erst die Möglichkeit geboten, die Spielchance zu werthen und auf diese Weise deren Rentabilität zu steigern. Da nämlich die ienziehung oft Monate früher als die Prämienziehung stattfindet, so bleibt während ser ganzen Zeit die Entscheidung zwischen einem Gewinn oder Verlust in Schwebe, dass die Ausgabe von Promessen aus diesem Grunde unthunlich ist, weil der messen-Besitzer bei gezogener Serie sich während dieser Zeit nicht in den Besitz Loses setzen kann, da er sonst auch den eventuellen Verlust tragen müsste. rch die Versicherung wird aber das Los der Verlustchance entkleidet und auf diese ise jenes Hinderniss aus dem Wege geräumt.

Es ist nun die Frage, ob die zur Versicherung gelangende Quote auch that- hlich immer den Gegenstand eines Risikos bilden kann.

Wer das Wesen der Effectengattungen, deren Besitz mit der Gefahr eines durch losung sich ergebenden Coursverlustes verbunden ist, und jene auf dieselben ein- kenden Verhältnisse zu beobachten Gelegenheit hatte, wird sich nicht verhehlen nen, dass deren Coursnotirung über Pari keine ephemere Erscheinung, sondern natürliche Folge von Ursachen ist, deren Bestand von unabsehbarer Dauer zu scheint, abgesehen von dem Umstande, dass dieselben in mancher Beziehung mit dem allgemeinen wirthschaftlichen Processe, welcher in der sinkenden denz des Zinsfusses sich vollzieht, in einem directen Zusammenhange stehen und diese Weise die Annahme einer stetig sich vollziehenden Steigerung der Nach- e nach fix verzinslichen Werthpapieren hinreichender Securität zulassen.

Dieser Umstand ist geeignet, jene etwaigen Voraussetzungen, welche ein durch rsvariationen hervorgebrachtes zeitweiliges Schwinden des zu tragenden Risikos Grundlage haben, vollständig zu wiederlegen, und könnte mit einer empfindlichen abilität eines solchen, blos im äussersten Falle und unter ausserordentlichen ständen gerechnet werden.

Destomehr ist die Erscheinung einer successiven zunehmenden Differenz zwischen jeweiligen Courswerthe und dem Nominalwerthe, bezw. dem kleinsten Treffer in racht zu ziehen, da eine solche bei vielen Loskategorien sich schon als natür- e Folge der Beschaffenheit des Spielplanes ergibt, indem eine stetige Abnahme an den jeweiligen Ziehungen theilnehmenden Lose vorgesehen ist, wodurch der rth der Gewinnstchance eine entsprechende Steigerung erfährt, was auf die Ent- klung des Courswerthes von einschneidendem Einflusse ist. Dass hiedurch die in racht kommende Verlustquote im Falle einer Niete ebenfalls eine grössere werden s, lässt sich nicht bestreiten und wird auf diese Weise das in Betracht kom- nde Risiko im selben Verhältnisse ein grösseres. Es ist daher nothwendig, auch für die Versicherung zu leistende Prämie der in Aussicht stehenden Verlust- te entsprechend von Fall zu Fall zu modificiren.

Diesfalls bietet die mathematische Beschaffenheit der Verlustchance die Hand- e, indem dieselbe das Product zweier Factoren bildet, von denen der erstere die hnungsmässig ermittelte Wahrscheinlichkeit des Verlustes und der zweite die g zu *berücksichtigende Verlust*quote darstellt. Nachdem aber die zu leistende

Nettoprämie durch den ziffermässigen Werth der Verlustchane thatsächlich re-
sentirt wird, so ist dieselbe auf diese Weise von der Höhe der Verlustquote abhän
wodurch der Anforderung einer sowohl dem Risiko als auch der Schadensumme a
messenen Prämienleistung entsprochen ist.

Aber noch ein anderer Umstand ist geeignet, die Aufmerksamkeit hinsicht
der Prämienleistung einerseits und des zu übernehmenden materiellen Risikos an
rerseits in Anspruch zu nehmen. Jene Loskategorien, bei welchen die Verlosung
Serien erfolgt, bilden in dieser Beziehung den Gegenstand besonderer Einflussna
in Bezug auf das Wesen des materiellen Risikos, welches hier neben dem Gefah
Risiko, eine besondere Rolle spielt. Es ist nämlich bei jedem Risiko neben se
qualitativen Beschaffenheit auch die quantitative in Betracht zu ziehen, we
letztere wir einfach das materielle Risiko nennen wollen. Handelt es sich näm
um die Versicherung einer ganzen Losserie, so wird die Wahrscheinlichkeit
Coursverlustes, also die qualitative Beschaffenheit die gleiche bleiben, als ob nur
Los zur Versicherung gelangen würde. Hingegen wird die Verlustquote, welche u
diesen Umständen das quantitative Risiko bildet, eine hundertmal grössere werd
als dies beim einzelnen Lose der Fall ist. Wohl wird auch die zu leistende Pr
ebensovielmal grösser, und ist hierin also scheinbar kein Unterschied zu erblick
wird jedoch erwogen, dass in diesem Falle auf ein einzelnes Risiko eine vi
grössere Schadensumme entfällt, als auf andere Einzelnrisken, so ergibt sich
Conclusion, dass hiedurch eine Störung derjenigen Normen eintritt, welche durch
mathematische Theorie der grossen Zahlen zum Ausdrucke kommen. In dieser
nämlich der allgemeine Begriff des Principes einer annähernd gleichmässigen Risi
vertheilung zum Ausdrucke gebracht, deren Wesen darin besteht, dass weder
qualitative noch die quantitative Beschaffenheit der einzelnen Risken allzugr
Unterschiede aufweisen darf

Würden also durchwegs nur ganze Losserien in Versicherung übernom
werden, so wäre hiedurch gleichfalls dem Principe der gleichmässigen Risken
theilung entsprochen. Da jedoch im Allgemeinen nur einzelne Lose mit verschied
Losnummern zur Versicherung gelangen und infolge dessen blos die Cumulir
einer geringen Anzahl derselben unter gleicher Seriennummer stattfindet, so w
die Einreihung einer ganzen Losserie in eine derartige Riskenkategorie ein Fehl
welcher sich in dem Momente rächen müsste, als der Zufall gerade die in ihr
ganzen Losumfang vertretene Seriennummer zur Verlosung bringen würde.

In der Versicherungspraxis wird ein den gewöhnlichen Durchschnitt der übrig
Versicherungssummen übersteigender Versicherungsbetrag (Excedent) durch Ret
cession auf andere Versicherer übertragen, von denen wieder jeder das Risiko
diejenige Capitalsquote übernimmt, welche dem Durchschnitte der sonstigen V
sicherungen entspricht.

Es wäre also auch hier die Rückversicherung das einzige Mittel, welches
Uebernahme ganzer Losserien in Versicherung gestatten würde. Solange jedoch di
Versicherungsart nicht durch eine grössere Anzahl diesbezüglicher Institute v
treten ist, wird die Versicherung ganzer Serien undurchführbar bleiben.

...e praktische Methode zur Ermittlung der Portefeuille-Vortragszinsen im Escompte.

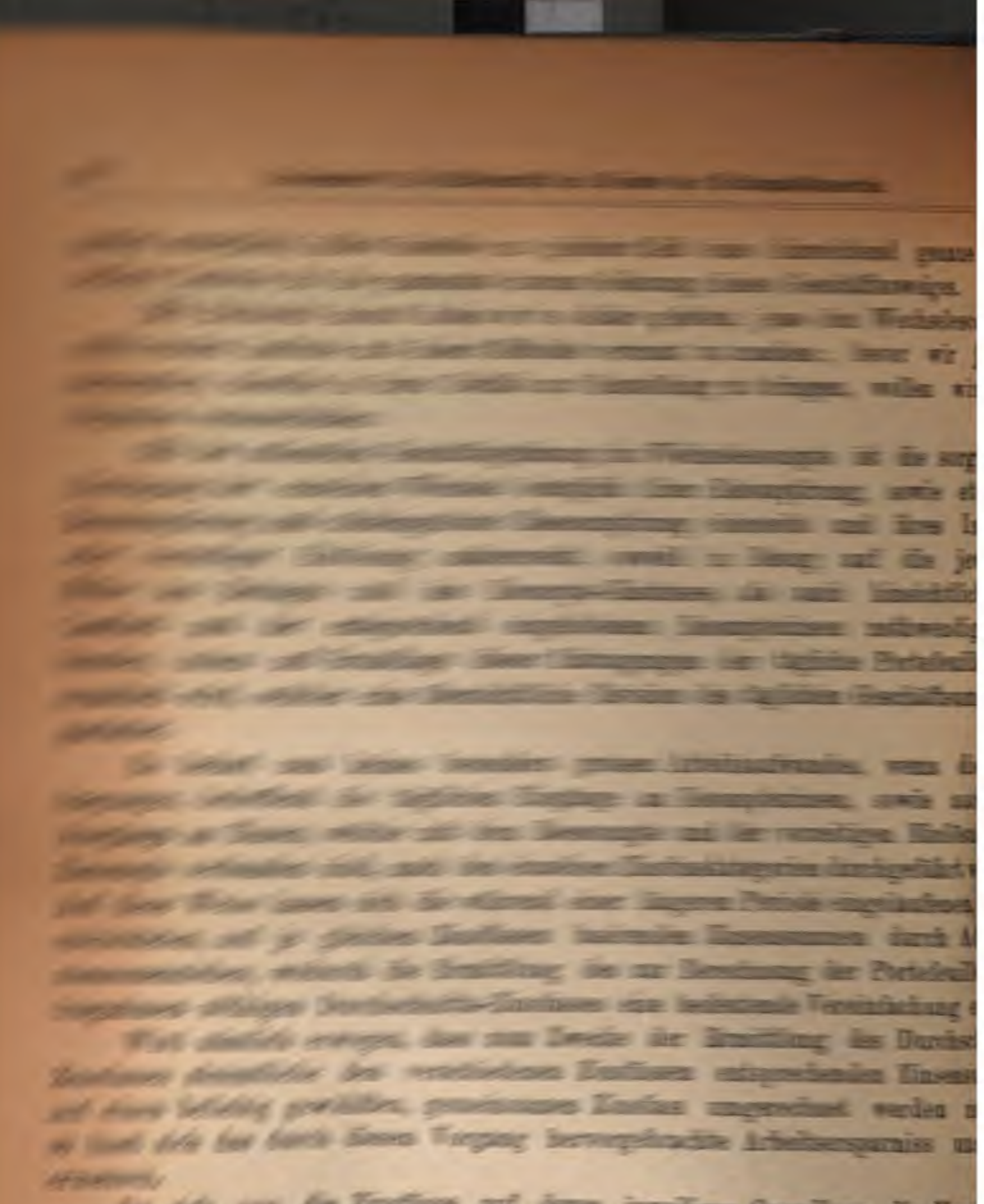
I.

In einer der früheren Abhandlungen unter dem Titel: „Der Durchschnittszins- im Escompte" wurde das Wesen einer, die durchschnittliche Capitals-Verzinsung ...echselescompte, betreffenden Methode auseinandergesetzt. Jener mit der Beant-...ung dieser Frage verbundene praktische Werth musste jedoch insolange ein ...cher bleiben, als die Verwendung einer derartigen Methode in Bezug auf deren ...mässigkeit im Rahmen der bankmässigen Gebarung nicht näher präcisirt worden So wissenswerth es im Allgemeinen für die Leitung eines Bankinstitutes oder ...vereines sein mag, mit welchem Zinsfusse sich das im Laufe einer bestimmten durch den Wechselescompte in Anspruch genommene Capital durchschnittlich ...ast, so kann die Beantwortung dieser Frage erst in zweiter Linie von Belang und zwar insoferne, als es sich um die Beurtheilung der Prosperität des Es-...tegeschäftes im Allgemeinen und die relative Entwicklung desselben überhaupt ...elt. Besondere Wichtigkeit erlangt die Frage der Durchschnitts-Verzinsung erst wenn dieselbe bei der Construction der Bilanz in Anwendung kommt und sich ...in praktischer Weise bewährt.

Eine der wichtigsten Fragen bei der Durchführung des Rechnungsabschlusses ...ejenige der Ermittlung der Portefeuille-Vortragszinsen. Da nämlich die Escompte-...n im Vorhinein eingehoben werden, die Laufzeit der einzelnen im Portefeuille befindenden Wechsel jedoch mehr oder weniger über den Abschlusszeitpunkt ...släuft, so werden die Escomptezinsen, welche für jene in die nächste Geschäfts-...de hinausreichende Laufzeit im Vorhinein entrichtet wurden, aus dem wirk-...n Zinsenertrage ausgeschieden und entsprechend reservirt werden müssen. Es ...en also blos diejenigen Zinsen bilanzmässig in Rechnung kommen können, ...ne im Laufe der betreffenden Bilanzirungsperiode thatsächlich fällig wurden, ...end die der überströmenden Laufzeit entsprechenden, also noch nicht fälligen, Portefeuille verbleiben, um als Portefeuille-Vortragszinsen in die nächste Ge-...ftsperiode übertragen zu werden.

Der gewöhnliche Weg für die Ermittlung der Portefeuille-Vortragszinsen besteht ...einiglich in der Specialisirung der Zinsen jedes einzelnen Wechsels nach dessen ...llig in die nächste Geschäftsperiode überströmenden Laufzeit, welcher Vorgang ...h bei grösserem Geschäftsumfange mit besonderem Arbeitsaufwand verbunden ist Der Creditverein der Niederösterreichischen Escompte-Gesellschaft bedient sich zu diesem Behufe einer Methode*), deren Wesen auf der Grundlage des Durch-...itts-Zinsfusses beruhend, geeignet ist, der Anforderung einer raschen und ver-...ichen Durchführung in jeder Hinsicht Rechnung zu tragen. Abgesehen von dem ...tande, dass diese Methode die rationelle Ermittlung eines der wichtigsten Bilanz-

*) Herr Josef R a c h, Oberbuchhalter dieses Institutes, ein hervorragender Fachmann auf ...em Gebiete, ist *der geistige Urheber* derselben.



[illegible] Grundlage die Ver[illegible] erfolgt, bei gleich grossen Capitalsposten zu einander verhalten, wie die bezie[illegible] weisen Zinsenposten, so wird der jeweilige wirkliche Zinsfuss und die auf [illegible] desselben thatsächlich eingehobene Zinsensumme die Handhabe zur Ermittlung [illegible] auf Grund des beliebig gewählten, gemeinsamen Zinsfusses, sich ergebenden Z[illegible] summe bieten.

Mit Hilfe dieser beiden, in ihrer Beschaffenheit unterschiedlichen Zinsens[illegible] wird sodann den Anforderungen, welche mit der Frage des Durchschnitts-Zins[illegible] verbunden sind, insofern Rechnung getragen, als die addirten Summen der tha[illegible] lich eingehobenen, bezw. entrichteten Zinsenbeträge einerseits und jener, welc[illegible] Grund des gemeinsam angenommenen Zinsfusses sich ergeben andererseits, zu [illegible] verschiedenen Resultaten führen, deren Quotient mit dem angenommenen Zin[illegible] multiplicirt, den gesuchten Durchschnitts-Zinsfuss liefert.

Demgemäss empfiehlt sich folgender Vorgang für die diesbezüglichen [illegible] tragungen: Jeder im Escompteverkehre des betreffenden Institutes vorkom[illegible]

ı besitzt seine eigene Rubrik, und zwar sowohl mit Bezug auf die Zinsen-
e, welche im Escompte und in der vorzeitigen Einlösung des Reescomptes
ı, als auch mit Rücksicht auf die Zinsenausgänge, die durch den Reescompte
ı vorzeitige Einlösung im Escompte sich ergeben.
ie täglich ein- und ausgehenden Zinsen werden nach ihren entsprechenden
sen abgesondert in die betreffenden Rubriken eingetragen, so dass jederzeit
f gleichen Zinsfüssen basirenden Escompte- und Reescompte-Zinsen durch
n der täglichen Posten ermittelt werden können. Zu besserem Verständniss
Art dieser Eintragungen hier durch eine Tafel veranschaulicht.

ıtum	Zinseneingang bei einem Zinsfusse von					Zinsenausgang bei einem Zinsfusse von				
	p_1 %	p_2 %	p_3 %	p_4 %	etc.	p'_1 %	p'_2 %	p'_3 %	p'_4 %	etc.
ıme . .	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	. . .	Z'_1	Z'_2	Z'_3	Z'_4	. . .

Diese Eintragungen können der besseren Uebersicht halber monatlich abge-
sen und durch Uebertrag fortgesetzt werden. Zu Beginn dieser Eintragungen
edoch die aus der letzten Bilanz resultirenden Portefeuille-Vortragszinsen zu
sichtigen und als Zinseneingang zu behandeln.
Wird nun der beliebige Zinsfuss der Einfachheit der Rechnung halber mit
ngenommen, so erhält man die auf Grund desselben sich ergebenden Zinsen-
e mit Hilfe der Proportion:

$$Z : p = Z^{(6)} : 6$$

p den jeweiligen wirklichen Escompte- oder Reescompte-Zinsfuss, Z die ent-
enden thatsächlich eingehobenen, bezw. entrichteten Zinsen und $Z^{(6)}$ die frag-
ı auf 6% umgerechneten Zinsen darstellt.
Es entsprechen daher den Zinsen Z_1 jene von $Z_1^{(6)}$ den Zinsen Z_2, jene von $Z_2^{(6)}$
w.
Werden daher schliesslich die thatsächlich eingehobenen Zinsensummen ohne
icht auf ihrem zugrundegelegten Zinsfuss addirt und von denselben die ent-
ten Zinsenbeträge subtrahirt, und derselbe Vorgang bei den entsprechenden durch
chnung auf 6% erzielten Zinsenposten beobachtet, so erhält man zwei ver-
lene Resultate, deren Quotient mit dem angenommenen Zinsfusse multiplicirt,
Durchschnitts-Zinsfuss liefert, d. h.

$$\frac{\ldots + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \cdots) - (Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 + Z'_4 + \cdots)}{\ldots + Z_2^{(6)} + Z_3^{(6)} + Z_4^{(6)} + \cdots) - (Z'^{(6)}_1 + Z'^{(6)}_2 + Z'^{(6)}_3 + Z'^{(6)}_4 + \cdots)} \cdot 6 = q_x$$

Ist nun dieser Anforderung entsprochen, so bieten die Ausweise der täglichen
feuillestände die weitere Handhabe in dieser Hinsicht. Das Wesen derselben
ıtirt sich *in folgender Weise:*

Portefeuillestand am	Stücke	Betrag
Stand vom letzten Tage		
dazu Escomptirung		
„ Rückeinlösung reescomptirter Wechsel .		
ab davon		
Incasso		
Einlösungen		
Reescomptirung		
Stand heute		

Da nun der tägliche Portefeuillestand das täglich zu verzinsende Capital Institutes thatsächlich repräsentirt, so wird die Summe aller in Betracht zu zieh den täglichen Portefeuillestände zum Durchschnitts-Zinsfusse auf einen Tag verm den im Laufe der betreffenden Periode fälligen Zinsenertrag ergeben.

Bezeichnet man daher die jeweiligen täglichen Portefeuillestände S_1, S_2, S_3, S_4 . . . S_n, wobei die Anzahl der die Geschäftsperiode umfass Tage n ist, ferner die thatsächlich fällig gewordenen Zinsen mit $\Sigma [Z]$ zum Unter schiede von den überhaupt eingehobenen Zinsen ΣZ, so ergeben sich folge Formen:

Da der Durchschnitts-Zinsfuss mit q_x bezeichnet wurde, so wird die Su der im Laufe der betreffenden Geschäftsperiode fällig gewordenen Zinsen durch eintägigen auf Grund des Durchschnitts-Zinsfusses berechneten Zinsen sämmtli in derselben enthaltenen täglichen Portefeuillestände zum Ausdrucke gelangen, d

$$\Sigma [Z] = (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n) \frac{q_x}{36.000} = \frac{q_x}{36.000} \cdot \sum_{n=n}^{n=1} S_n$$

Zieht man nun von der überhaupt eingehobenen Zinsensumme die auf d Weise ermittelte Summe der thatsächlich fällig gewordenen Zinsen ab, so repräs der Rest die im vorhinein entrichteten, jedoch noch nicht fälligen Zinsenbeträge, we unter den Namen Portefeuille-Vortragszinsen in der Form

$$V = \Sigma Z - \Sigma [Z]$$

zur Darstellung gelangen.

Der ganze Vorgang lässt sich daher folgendermaassen zusammenfassen:

1. Ermittlung des Durchschnitts-Zinsfusses für die betreffende Geschäftsperi
2. Summirung der täglichen Portefeuillestände innerhalb dieser Periode.
3. Ermittlung der eintägigen Zinsen auf Grundlage des Durchschnitts-Zinsfu von der Capitalssumme sämmtlicher täglicher Portefeuillestände.
4. Subtraction dieser Zinsen von der abzüglich der Zinsenrückvergütun überhaupt eingehobenen Zinsensumme.

ur Theorie und näherungsweisen Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsstockes.

VI.

In den bisherigen Abhandlungen über dieses Thema (Lief. V.) haben wir das sen der Prämienreserve vom theoretischen Standpunkte einer eingehenden Unterhung unterzogen und sind zu einer ganzen Reihe interessanter Resultate gelangt, che uns in die Lage setzen, das ganze Gebiet der Lebensversicherungstechnik n Standpunkte der analytisch-geometrischen Auffassung einer dem praktischen ecke dienenden, rationellen Behandlung zu unterziehen. Wohl dürfte derzeit manche ge bezüglich der einzelnen versicherungstechnischen Functionen noch der Lösung ren, bezw. nicht in jener befriedigenden Weise zur Beantwortung gelangt sein, dies hinsichtlich einer umfassenden theoretischen Behandlung eines derartigen blemes erforderlich wäre, doch sind jene daselbst auf mathematischem Wege ittelten und solchermaassen aufgestellten Normen immerhin geeignet, der weiteren chung in dieser Hinsicht eine verlässliche Grundlage zu gewähren.

Mit Rücksicht darauf wollen wir uns in unseren weiteren Ausführungen nunr darauf beschränken, die praktische Seite dieser Frage, welche im Titel dieser andlungen angedeutet ist, in Berücksichtigung zu ziehen und gehen nunmehr das Wesentliche der Prämienreserve in diesem Sinne über.

In der vorigen diesbezüglichen Abhandlung (Form 37) gelangten wir zu der die einfache Todesfallversicherung giltigen im continuirlichen Sinne sich äussern- Reserveformel

$$^{a+m}\text{Res.}\,(p_a) = S\left(1 - \frac{M_{a+m}}{M_a}\right)$$

che bei näherer Betrachtung als Gleichung einer Geraden erscheint, und zwar er der Voraussetzung, nach welcher der Quotient der beiden lebenslänglichen brenten M_{a+m} und M_a als einzige Variable angesehen wird. Wird der Einfacht halber die Versicherungssumme $S = 1$ gesetzt, so schneidet jene in dieser Gleichung gedrückte Gerade sowohl die Ordinaten- als auch die Abscissen-Axe in der Entnung 1 vom Anfangspunkte des Coordinatensystemes und ist zu beiden Coordinatenn unter dem Winkel von 45° geneigt, wobei es gleichgiltig ist, ob die Prämienerve als Ordinate und der genannte Quotient als Abscisse oder umgekehrt fungiren. besteht nämlich zwischen diesen Beiden in diesem Falle eine Wechselbeziehung, lche aus dem Umstande entspringt, dass die Summe der Prämienreserve und jenes otienten stets 1 ist.

Diese merkwürdige Eigenschaft lässt nun die Anwendung der bekannten trigonoetrischen Fundamentalform

$$\text{Sin}^2\,\varsigma + \text{Cos}^2\,\varsigma = 1$$

dem Sinne zu, dass

$$^{a+m}\text{Res.}\,(p_a) = \text{Sin}^2\,\varsigma \quad \text{und} \quad \frac{M_{a+m}}{M_a} = \text{Cos}^2\,\varsigma$$

gesetzt wird. Ermittelt man nun die Prämienreserven in zweien hintereinander folg-
den Jahren, so ergeben sich diesen Werthen entsprechend zwei verschiedene Win-
ς_1 und ς_2.

Soll nun die Prämienreserve für einen innerhalb dieses Jahresintervalles lieg-
den Zeitpunkt ermittelt werden, so wird mit Hilfe der Bogen-Differenz der bei-
Winkel ς_1 und ς_2 der diesem Zeitpunkt proportional entsprechende Winkel ς_{1-2} f-
gestellt, mittelst dessen nicht nur die gesuchte Prämienreserve, sondern auch
mit dem Alter correspondirende lebenslängliche Leibrente sich ergibt. Auf d-
Weise ist der continuirlichen Beschaffenheit der vorliegenden Prämienreserve-F-
auch praktisch entsprochen.

Aber auch in anderer Beziehung ist die Beschaffenheit dieser Formel geeig-
den praktischen Anforderungen Rechnung zu tragen.

Der genannte Quotient der jeweilig in Betracht kommenden lebenslängli-
Leibrenten lässt sich ausdrücken durch die Form

$$\frac{M_{a+m}}{M_a} = 1 - {}^{a+m}\text{Res}\,(p_a)$$

demzufolge ist nun auch

$$\frac{M_{a+m+\triangle m}}{M_{a+m}} = 1 - {}^{a+m+\triangle m}\text{Res}\,(p_{a+m})$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen mit einander erhält man

$$\frac{M_{a+m+\triangle m}}{M_a} = \left(1 - {}^{a+m}\text{Res}\,(p_a)\right)\left(1 - {}^{a+m+\triangle m}\text{Res}\,(p_{a+m})\right)$$

und demzufolge, da analogerweise

$$\frac{M_{a+m+\triangle m}}{M_a} = 1 - {}^{a+m+\triangle m}\text{Res}\,p_a$$

ist, das Resultat:

$${}^{a+m+\triangle m}\text{Res}\,(p_{a+m})\left[1 - {}^{a+m}\text{Res}\,(p_a)\right] = {}^{a+m+\triangle m}\text{Res}\,(p_a) - {}^{a+m}\text{Res}\,($$

das heisst in Worten ausgedrückt: Der Zuwachs, welchen die Prämi-
reserve einer durch m Jahre bestehenden Todesfall-Versi-
rung nach Ablauf einer weiteren bestimmten Periode
erfährt, ist gleich der Reserve einer nach Ablauf des m-
Versicherungsjahres abgeschlossenen neuen Versicher-
derselben Person nach $\triangle m$ Jahren, weniger dem Producte di-
Reserve mit der ursprünglichen, der m jährigen Versicher-
entsprechenden.

Ist daher die Reserve einer im Alter a abgeschlossenen und durch m Ja-
bestehenden Versicherung bekannt und soll der Zuwachs derselben nach weiter-
Ablauf von $\triangle m$ Jahren ermittelt werden, so wird vor allen Dingen die Rese-
einer im Alter $a + m$ abgeschlossenen und durch $\triangle m$ Jahre bestehenden Versic-
rung festgestellt. Die Differenz zwischen dieser und dem Producte derselben mit
ursprünglichen bekannten Reserve repräsentirt den nach Ablauf von $\triangle m$ Jahren s-
ergebenden Zuwachs der Prämienreserve.

Zum Beispiel der Reservezuwachs einer im Alter von 20 Jahren abgeschlossenen 8 Jahre bestehenden Todesfallversicherung soll auf Grundlage der ein Jahr ier berechneten, also nach 7jährigem Bestande sich ergebenden Reserve ermittelt den.

Unter der Voraussetzung, dass die Versicherungssumme $S = 1$ ist, ergibt sich der Tabelle der 17 englischen Gesellschaften auf Grund eines $3\frac{1}{2}$percentigen fusses berechnet

$$^{27}\text{Res}\,(p_{20}) = 0{\cdot}05388 \qquad \text{und} \qquad ^{28}\text{Res}\,(p_{20}) = 0{\cdot}06253$$

Nimmt man nun die oben aufgestellte Formel zur Grundlage der Berechnung, rhält man auf Grund der Berechnung von

$$^{28}\text{Res}\,(p_{27}) = 0{\cdot}00914$$

Resultat

$$0{\cdot}00914 - 0{\cdot}00914 \times 0{\cdot}05388 = 0{\cdot}00865$$

Zuwachs der Prämienreserve im Zeitraume eines Jahres, u. zw. vom 7. bis zum standesjahre der Versicherung, welches offenbar mit obigen Zahlen vollständig einstimmt.

Von besonderer Wichtigkeit ist hier nun der Umstand, dass für alle im Zeitkte der Reserve-Ermittlung gleichalterigen Personen die Reserve für eine einige Versicherung die gleiche ist, welche infolge dessen einen gemeinsamen Factor die Ermittlung des Reservezuwachses bildet, so dass sich diese Form für die chnung desselben im collectiven Sinne anwenden lässt.

Setzt man nämlich die Summe der jeweiligen Versicherungsdauer und des rs zur Zeit des Versicherungsabschlusses als constant voraus, womit die gleiche rsclasse im Zeitpunkte der Reserve-Ermittlung gekennzeichnet ist, so wird für n Bestandesdauer-Zuwachs von 1 Jahre, die diesbezügliche Relation für den ervezuwachs in der Form

$$^{u+1}\text{Res}\,p_u\,[1 - {}^{u}\text{Res}\,(p_{u-m})] = {}^{u+1}\text{Res}\,(p_{u-m}) - {}^{u}\text{Res}\,(p_{u-m})$$

Ausdrucke gelangen, worin $u + 1$ das jeweilig gemeinsame Alter des Vererten zum Zeitpunkte der Prämien-Ermittlung darstellt.

Bezeichnet man daher das jeweilige Beitrittsalter mit $a, b, c, d \ldots$ so werden einzelnen Versicherungen folgenden Reservezuwachs während eines Jahres lviren.

$$^{u+1}\text{Res}\,(p_u)\,[S_1 - S_1\,{}^{u}\text{Res}\,(p_a)] = Z_1$$
$$^{u+1}\text{Res}\,(p_u)\,[S_2 - S_2\,{}^{u}\text{Res}\,(p_b)] = Z_2$$
$$^{u+1}\text{Res}\,(p_u)\,[S_3 - S_3\,{}^{u}\text{Res}\,(p_c)] = Z_3$$

u. s. w.

Werden daher die Versicherungsbeträge aller im Zeitpunkte der Reserve-Ermittng gleichalterigen Personen, ohne Rücksicht auf die Bestandesdauer der jeweiligen rsicherungen *summirt und hievon* die Summe der ein Jahr vorher nach Maassg

der versicherten Beträge ermittelten Prämienreserven abgezogen, so bildet das P[roduct] duct dieser Differenz mit der Prämienreserve einer einjährigen Versicherung [der] entsprechenden Altersclasse den Gesammt-Reservezuwachs während eines Ja[hres], das heisst

$$^{u+1}\text{Res}(p_u)\left[(S_1+S_2+S_3\cdots)-(S_1\,{}^u\text{Res}(p_a)+S_2\,{}^u\text{Res}(p_b)+S_3\,{}^u\text{Res}(p_c))\right]=Z$$

worin Z den jeweiligen Reservezuwachs repräsentirt.

Es sei zum Beispiel der im Laufe des letzten Jahres sich ergebende Präm[ien-] Reservezuwachs aller derzeit 36jährigen versicherten Personen zu ermitteln.

Folgende Tabelle stellt die auf gewöhnlichem Wege vorgenommene Be[rech-] nung dieses Zuwachses auf Grundlage der Tafel der 17 englischen Gesellsch[aften] bei $3^1/_2$percentiger Verzinsung dar.

Beitritts-Alter	Versicherungsdauer	Versicherter Betrag	Prämienreserve zu Beginn des letzten Jahres	Prämienreserve nach Ablauf des letzten Jahres	Reservezuwachs im Laufe des letzten Jahres
20	16	1.000	130·58	141·37	10·79
23	13	3.000	333·76	366·93	33·17
26	10	2.000	178·20	200·90	22·70
27	9	5.000	404·98	462·30	57·32
29	7	10.000	636·30	753·00	116·70
29	7	1.000	63·28	75·30	12·02
30	6	2.000	108·56	132·18	23·62
30	6	5.000	271·46	330·45	58·99
32	4	12.000	410·53	555·24	144·71
	Summe:	41.000	2537·65	3017·67	480·02

Auf Grundlage der oben dargestellten Formel ergibt sich hingegen folg[ende] Rechnung.

Die Prämienreserve einer zu Beginn des letzten Jahres abgeschlossenen [Ver-]sicherung im jetzigen Zeitpunkte ist

$$^{36}\text{Res}(p_{35}) = 0{\cdot}01248$$

folglich der Reservezuwachs im Laufe des letzten Versicherungsjahres

$$(41.000 - 2537{\cdot}65)\,0{\cdot}01248 = 480{\cdot}01$$

welches Resultat mit dem obigen nahezu vollständig übereinstimmt.

ne praktische Methode zur Ermittlung der Portefeuille-Vortrags-zinsen im Escompte.

II.

Nachdem wir in der vorigen Abhandlung das Wesen dieser Frage allgemein tert haben, wollen wir zu besserem Verständniss ein praktisches Beispiel durch-ren. Zu diesem Behufe ist es nothwendig, vorerst die in diesem Falle erforder-en Suppositionen aufzustellen, welche einerseits in der Voraussetzung einer im ten Jahresschlusse bilanzirten und andererseits einer seither vorgeschrittenen teren Geschäftsperiode bestehen.

Aus der abgeschlossenen Geschäftsperiode des abgelaufenen Jahres sind natur-näss blos jene, mit ihrer Laufzeit in die neue Periode überströmenden Wechsel-ten für unsere Frage von Belang und werden dieselben zum Zwecke einer ver-ichsweisen Untersuchung einzeln angeführt werden müssen, da in den jeweiligen ligkeiten (Scadenzen) derselben eine Handhabe zur Prüfung der Richtigkeit erer Methode gelegen ist.

Nehmen wir daher an, es wären folgende Wechselposten vermöge ihrer Scadenz der Geschäftsperiode des letzten Jahres in die am 1. Jänner neu begonnene überströmend zu berücksichtigen.

Nr.	Betrag	Verfallstag	Zinsfuss p %	Portefeuille-Vortrags-zinsen	Dieselben auf Grund eines beliebig gewählten Zinsfusses von 6% umgerechnet
50	5.000	5. Jänner	3	2·08	4·17
70	2.000	7. "	$3\frac{1}{2}$	1·36	2·33
120	7.000	12. "	$4\frac{1}{4}$	9·92	14·00
130	4.000	13. "	4	5·78	8·67
170	8.000	17. "	$4\frac{1}{2}$	17·00	22·67
220	1.000	22. "	$4\frac{3}{4}$	2·90	3·67
260	3.000	26. "	$3\frac{1}{2}$	7·58	13·00
320	4.000	1. Febr.	5	17·78	21·33
460	6.000	15. "	$5\frac{1}{4}$	40·25	46·00
610	7.000	2. März	$4\frac{1}{2}$	53·38	71·17
680	10.000	9. "	$3\frac{3}{4}$	70·83	113·33
750	4.000	16. "	4	33·33	50·00
	61.000			262·19	370·34

Diese in die neue Geschäftsperiode überströmenden Wechselposten ergeben en Durchschnittszinsfuss von

$$q_x = \frac{262{\cdot}19}{370{\cdot}34} = 4{\cdot}24796$$

cher auf $4\frac{1}{4}$ % abgerundet die Portefeuille-Vortragszinsen von fl. 262·32 ert.

Die in der neuen Geschäftsperiode zum Escompte eingereichten Wechselposten gen ferner folgende sein:

Nr.	Betrag	Escomptirt am	Fällig am	Escompte-Zinsfuss p%	Eingehobene Escompte-Zinsen
900	2000	1. Jänner	1. April	4	20·00
1040	4000	1. "	15. "	4	46·22
1110	5000	3. "	24. "	4¼	65·52
220	2000	6. "	28. Jänner	4¼	5·19
230	7000	8. "	31. "	4½	20·13
340	3000	11. "	14. Febr.	4½	12·75
170	1000	14. "	31. Jänner	4½	2·13
310	4000	16. "	16. Febr.	4½	15·50
530	7000	18. "	12. März	4½	46·38
540	3000	19. "	14. "	4	18 00
500	5000	21. "	12. "	4	27·78
200	4000	26. "	15. Febr.	4	8·89
330	6000	27. "	1. März	4	22·00
440	4000	29. "	14. "	4	19·56
590	2000	31. "	31. "	4	13·11

Reescomptirt wurden:

Nr.	Betrag	Reescomptirt am	Fällig am	Reescompte-Zinsfuss p%	Vergütete Reescompte-Zinsen
1110	5.000	14. Jänner	24. April	4	55 56
530	7.000	20. "	12. März	4	39 67
610	7.000	20. "	2. "	4	31·89
680	10.000	24. "	9. "	3½	42·78

Dies liefert nun eine unserer Methode entsprechende tabellarische Zusammenstellung von folgender Beschaffenheit:

Datum	Zinseneingang bei einem Zinsfusse von			Zinsenausgang bei einem Zinsfusse von		
	4%	4¼%	4½%	3½%	4%	
1. Jän.	66·22	262·32*)	—	—	—	
3. "	—	65·52	—	—	—	
6. "	—	5·19	—	—	—	
8. "	—	—	20·13	—	—	
11. "	—	—	12·75	—	—	
14. "	—	—	2·13	—	55·56	
16. "	—	—	15·50	—	—	
18. "	—	—	46·38	—	—	
19. "	18·00	—	—	—	—	
20. "	—	—	—	—	71·56	
21. "	27·78	—	—	—	—	
24. "	—	—	—	42·78	—	
26. "	8·89	—	—	—	—	
27. "	22·00	—	—	—	—	
29. "	19·56	—	—	—	—	
31. "	13·11	—	—	—	—	
	175·56	333·03	96·89	—42·78	—127·12	= 436·58
Bei 6%	263·34	470·16	129·19	—73·34	—190·68	= 598·67

*) Portefeuille-Vortragszinsen aus der vorjährigen Geschäftsperiode.

Sollen nun beim Monatsabschluss am 31. Jänner die Portefeuille-Vortrags- ermittelt werden, so wird folgender Vorgang beobachtet.

Der für die abgelaufene Monatsperiode sich ergebende Durchschnittszinsfuss ist

$$q_x = \frac{436\cdot58}{598\cdot67} \cdot 6 = 4\cdot3755\,\%$$

Die täglichen Portefeuillestände im Laufe des Monates Jänner sind nach- le:

Täglicher Portefeuillestand.

Datum	Stücke	Escompte	Einlösung	Re-escompte	Betrag
1. Jän.	12	6000	—	—	61.000
2. "	14	—	—	—	67.000
3. "	14	5000	—	—	67.000
4. "	15	—	—	—	72.000
5. "	15	—	5000	—	72.000
6. "	14	2000	—	—	67.000
7. "	15	—	2000	—	69.000
8. "	14	7000	—	—	67.000
9. "	15	—	—	—	74.000
10. "	15	—	—	—	74.000
11. "	15	3000	—	—	74.000
12. "	16	—	7000	—	77.000
13. "	15	—	4000	—	70.000
14. "	14	1000	—	5000	66.000
15. "	14	—	—	—	62.000
16. "	14	4000	—	—	62.000
17. "	15	—	8000	—	66.000
18. "	14	7000	—	—	58.000
19. "	15	3000	—	—	65.000
20. "	16	—	—	14000	68.000
21. "	14	5000	—	—	54.000
22. "	15	—	1000	—	59.000
23. "	14	—	—	—	58.000
24. "	14	—	—	10000	58.000
25. "	13	—	—	—	48.000
26. "	13	4000	3000	—	48.000
27. "	13	6000	—	—	49.000
28. "	14	—	2000	—	55.000
29. "	13	4000	—	—	53.000
30. "	14	—	—	—	57.000
31. "	14	2000	8000	—	57.000
				Summe . .	1,954.000

Demnach die eintägigen Zinsen der Summe sämmtlicher Portefeuillestände und des obigen Durchschnittszinsfusses

$$\frac{1954000 \,.\, 4\cdot3755}{36000} = 237\cdot50$$

die innerhalb des Monates thatsächlich fällig gewordenen Zinsen repräsentiren. ieht man nun diese von der eingehobenen und nach A[illegible] en verbleibenden Zinsensumme von fl. 436·58 ab, [illegible] Vortragszinsen *am 31. Jänner* im Betrage von f[illegible]

Dieses Resultat muss nun, wenn es richtig ist, mit der Summe der Zinse die überströmende Laufzeit sämmtlicher Wechselposten übereinstimmen.

Im Portefeuille befinden sich nun folgende erst nach dem 31. Jänner fä Wechsel und sind für dieselben für ihre überströmende Laufzeit an Zinsen einnahmt worden:

Escompte.

Nr.	Betrag	Fällig am	Zinsfuss p %	Zinsen	
320	4.000	1. Febr.	5	0·56	
460	6.000	15. "	$5\frac{1}{4}$	13·13	
610	7.000	2. März	$4\frac{1}{2}$	26·25	
680	10.000	9. "	$3\frac{3}{4}$	38·54	
750	4.000	16. "	4	19·56	
900	2.000	1. April	4	13·34	
1040	4.000	15. "	4	32·89	
1110	5.000	24. "	$4\frac{1}{4}$	49·00	
340	3.000	14. Febr.	$4\frac{1}{2}$	5·25	
310	4.000	16. "	$4\frac{1}{2}$	8·00	
530	7.000	12. März	$4\frac{1}{2}$	35·00	
540	3.000	14. "	4	14·00	
500	5.000	12. "	4	22·23	
200	4.000	15. Febr.	4	6·67	
330	6.000	1. März	4	19·34	
440	4.000	14. "	4	18·67	
590	2.000	31. "	4	13·11	335·54
	80·000				

hievon ab Reescompte

Nr.	Betrag	Fällig am	Reescompte-Zinsfuss p' %	Zinsen	
1110	5.000	24. April	4	46·11	
530	7.000	12. März	4	31·11	
610	7.000	2. "	4	23·33	
680	10.000	9. "	$3\frac{1}{2}$	35·97	136·52
	29·000	Daher Portefeuille-Vortrags-Zinsen. . .			199·02

was mit obiger Summe bis auf einige Hundertel übereinstimmt, welche gering Differenz aus der Unzulänglichkeit der in Rechnung gebrachten Decimalen ents

Der praktische Werth dieser Methode tritt jedoch desto mehr hervor, w sich um tausende von Wechselposten handelt, wo ein Fehler sich leichter einschl kann, und die Controle für die Richtigkeit der Rechnung hiedurch einen h Werth erreicht.

etrachtungen über die Effectenbelehnung vom Standpunkte des bankmässigen Verkehres.

II.

Die bisherigen Auseinandersetzungen über dieses Thema betrafen hauptsächlich allgemeine Wesen des bankmässigen Verkehres im Lombard und Report, wobei esondere jene Umstände eine Berücksichtigung erfuhren, welche aus dem Prin- von Angebot und Nachfrage entspringend, die Ursache aller Veränderungen en, die der Lombard- und Report-Zinsfuss durch die mehr oder weniger intensive spruchnahme der jeweiligen Bankmittel überhaupt erfährt. Sowie nun diese In- pruchnahme eine veränderliche ist, indem dieselbe in kürzeren oder längeren ioden eine Verstärkung oder Abschwächung erleidet, so ist auch der Zinsfuss den sprechenden wirthschaftlichen Fluctuationen gemäss einer Veränderung insofern erworfen, als derselbe im ungekehrten Verhältnisse zur Geldflüssigkeit sich egt und somit von dieser im directen Sinne abhängt.

In gewissen Zeitperioden des Jahres gewinnt der allgemeine Bedarf an Baar- ld eine ausserordentliche Ausdehnung. Die flüssigen Mittel der Bankinstitute rden im erhöhten Maasse in Anspruch genommen, wodurch naturgemäss eine mehr r minder grosse Geldknappheit hervorgerufen wird. Die nächste Consequenz einer chen ist, dass die Banken ihre Reserven flüssig machen, welche zumeist in bank- igen Wechseln bestehen, die durch Reescompte in Baargeld umgesetzt werden. Noteninstitut ist genöthigt, um den erhöhten Anforderungen Genüge leisten zu nen, eine grössere Rigorosität im Lombard- und Escomptegeschäfte walten zu sen und erhöht succesive seinen Discont- und Lombardzinsfuss, was natürlich zur ge hat, dass auch die Privatinstitute, bei denen die Flüssigmachung der Reserven olge dieses Umstandes mit grösseren Opfern verbunden ist, zu derselben Maass- hme greifen wie die Notenbank. Dieser Process dauert nun solange an, bis jene gewissen Zeiten in grösserem Umfange sich ergebenden Zinsenfälligkeiten der lagepapiere hier ausgleichend einwirken, wenn nicht schon früher durch eine ein- retene Reaction die wirthschaftliche Spannung nachlässt.

Auf diese Weise erklärt sich nun die oft in verhältnissmässig kurzen Zeit- umen sich ergebende mehrfache Veränderung des Bankzinsfusses, die sich je nach Einflüssen vollzieht, welche bald zu Gunsten, bald zum Nachtheile des flüssigen ldstandes sich geltend machen.

Man hat es daher manchmal bei einem jeden Lombardgeschäfte mit drei, vier d mehr Zinsfüssen zu thun, welche den verschiedenen Theilperioden der Verzin- ngsfrist zu Grunde liegen. Bei einem halbwegs grösseren Geschäftsumfange bildet n dieser Umstand die Quelle complicirter rechnerischer Arbeit, da infolge der sich innerhalb eines verhältnissmässig kurzen Zeitraumes mehrmals wiederholenden nsfussveränderung ein und dasselbe Darlehen auf Grundlage mehrerer, verschiedenen ittterminen entsprechender Zinsfüsse aufgezinst werden muss, um die jeweiligen zur Einlösung *oder Prolongation* aufgelaufenen Zinsen festzustellen.

Der unverhältnissmässig grosse Müheaufwand, welcher jedem einzelnen Darlehensposten in einem solchen Falle gewidmet werden muss, lässt sich unschwer ermessen, insbesondere wenn man die Bestimmungen in Betracht zieht, welche im gewöhnlichen bankmässigen Geschäftsverkehre den Lombard und Report regeln. Die in dieser Beziehung maassgebenden Bestimmungen der Oesterreichisch-ungarischen Bank mögen hier zu diesem Behufe Raum finden.

„Bei Veränderung des Bankzinsfusses findet der neue Zinsfuss auf alle neuen, sowie alle früheren Darlehen, welche vor mindestens 15 Tagen zugezählt wurden, sofort Anwendung. Bei Darlehen für welche die Zinsen im Vorhinein entrichtet wurden, tritt der neue Zinsfuss erst vom Zeitpunkte der nächsten Prolongation in Kraft. Die Darlehen werden auf mindestens drei Monate gewährt, können jedoch auch früher ganz oder theilweise zurückgezahlt oder nach Maassgabe der Deckung erhöht werden. Die Bank ist jedoch berechtigt, Ansuchen um Vorschüsse überhaupt abzulehnen, dieselben nur in einem geringeren Betrage oder für eine kürzere als die angesprochene Frist zu gewähren".

Hieraus ist zu ersehen, das neben verschiedenen Zinsfüssen auch unterschiedliche Capitalsbeträge mit ein und denselben Darlehen verbunden sein können, und zwar wenn eine einmalige oder öftere Rückzahlung, bezw. Erhöhung des Darlehens erfolgt.

Die sich auf diese Weise ergebende Complication der rechnerischen Arbeit hat den Anstoss zu eingehenden Untersuchungen betreffs einer Vereinfachung derselben gegeben und wollen wir hier einige Methoden dieser Art anführen.

Die allgemeine Formel für die Verzinsung eines Capitales lautet bekanntlich

$$1)\qquad Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

worin Z die Zinsen, K das Capital, p den Zinsfuss in Percenten und t die Zeit in Jahreseinheiten bezeichnet. Soll nun die Zeit in Tagen zum Ausdrucke gelangen, so wird die Form in folgende übergehen

$$2)\qquad Z = \frac{K \cdot p \cdot \tau}{36.000}$$

worin τ die entsprechende Frist in Tagen also $\frac{\tau}{360}$ den entsprechenden Theil des Jahres ausdrückt.

Setzen wir bei einem Darlehen die veränderten Zinfüsse mit $p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots$ dargestellt voraus, während die denselben entsprechenden Termine durch $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \ldots$ zum Ausdrucke gelangen, so wird die folgende Form hier maassgebend sein

$$3)\qquad Z = \frac{K}{36.000}(p_1 \tau_1 + p_2 \tau_2 + p_3 \tau_3 + p_4 \tau_4 \ldots)$$

so dass man blos die einzelnen Zinsfüsse mit den entsprechenden Zeittermінen zu multipliciren braucht und die Summe dieser Producte, welche als eine einzige Zahl sich ergibt, liefert mit dem Capitale multiplicirt und durch 36.000 dividirt die gesuchten Zinsen.

Zum Beispiel: Am 15. September wurde ein Darlehen von 500 Gulden auf drei Monate gegen ein Dépôt mit 4% insen gewährt, der Lombardzinsfuss veränderte sich ährend dieser Zeit in folgender Weise: am 2. October uf $4^1/_2$, am 28. October auf 5 und am 24. November auf $5^1/_2\%$, ieviel betragen die Zinsen?

Vom	15. September	bis	2. October	sind	17 Tage	zu 4 %	= 68
„	2. October	„	28. October	„	26 „	„ $4^1/_2\%$	= 117
„	28. October	„	24. November	„	27 „	„ 5 %	= 135
„	24. November	„	15. December	„	21 „	„ $5^1/_2\%$	= $115^1/_2$
							$435^1/_2$

Es ist daher

$$Z = \frac{2500 \times 435\cdot5}{36.000} = 30\cdot24$$

Ein weiteres Beispiel sei folgendes:

Am 3. October wurde gegen ein Dépôt auf die Dauer von rei Monaten ein Darlehen in der Höhe von 1500 Gulden ewährt. Die Zinsfussveränderungen waren dieselben ie bei obigem Beispiele, wieviel betragen die Zinsen?

Vom	3. October	bis	28. October	sind	25 Tage	zu $4^1/_2\%$	= $112^1/_2$
„	28. October	„	24. November	„	27 „	„ 5 %	= 135
„	24. November	„	3. Jänner	„	40 „	„ $5^1/_2\%$	= 220
							$467^1/_2$

her ergibt sich an Zinsen:

$$Z = \frac{1500 \times 467\cdot5}{36.000} = 19\cdot48$$

Eine andere Methode*), welche für sich den Vortheil einer leichteren Handabung in Anspruch nehmen kann, ist folgende:

Zerlegt man in der Formel 3) die Zinsfüsse p_1, p_2, p_3, p_4 u. s. w. in folender Weise

$$p_1 = p_1$$
$$p_2 = p_1 + \alpha$$
$$p_3 = p_1 + \beta$$
$$p_4 = p_1 + \gamma$$

u. s. w.

o ergibt sich folgende Form

$$Z = \frac{K}{36.000}\left[(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \cdot \cdot \cdot)\, p_1 + \alpha\,\tau_2 + \beta\,\tau_3 + \gamma\,\tau_4 \ldots\right]$$

orin die Producte $\alpha \cdot \tau_2$, $\beta \cdot \tau_3$, $\gamma \cdot \tau_4$ leichter im Kopfe zu berechnen sind, da — β, γ u. s. w. gewöhnlich Brüche darstellen, deren Zähler und Nenner über die hlen 1, 2, 3, 4 nicht hinauszugehen pflegen.

*) Herr Ernst Müller, Controlor der Oesterreichisch-ungarischen Bank, ist der eber derselben.

Zum Beispiel: Am 26. August 1890 wurde ein Darlehen 2400 Gulden bis zum 17. Jänner 1891 prolongirt. Der Z fuss war am 26. August 5%, am 5. September 5½%, 3. October 6%, am 17. October 6½% und ermässigte am 9. Jänner wieder auf 5½%, wieviel betragen die Zin

Dementsprechend ergibt sich:

Vom 26. Aug.	bis 5 Sept.	zu 5 %,	10 Tage,	Differenz gegen 5%	—
« 5. Sept.	« 3. Oct.	« 5½%,	28 «	« « «	28/2 = 1
« 3. Oct.	« 17. Oct.	« 6 %,	14 «	« « «	14/1 = 1
« 17. Oct.	« 9. Jän.	« 6½%,	84 «	« « «	126/1 = 12
« 9. Jän.	« 17. Jän.	« 5½%,	8 «	« « «	8/2 =
	daher zu 5%		144 Tage	und zu 1%	15

und ist daher $K = 2400$, $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 = 144$, $q_1 = 5$ und $\beta \tau_3 + \gamma \tau_4 + \delta \tau_5 = 158$ somit die Zinsen:

$$Z = \frac{2400}{36.000} (144 \times 5 + 158) = 58{\cdot}53$$

welche Rechnung bei entsprechender Abkürzungsmethode rasch zum Resultate

Der praktische Rechner bedient sich in geeigneten Fällen zu diesem des Vortheiles, die Zinsenrechnung zu 1% jeweilig abgesondert durchzuführe dann die beiden Resultate zu summiren. Dies ist jedoch nur von Vortheil, w beiden einzelnen Rechnungsposten eine ausgiebigere Abkürzung gestatten al durch Zusammenziehung derselben der Fall ist.

Ein anderes Beispiel unter den gleichen Veränderungen des Zinsfus folgendes:

Ein Darlehen von 4800 Gulden wurde am 31. August zum 19. Jänner prolongirt, wieviel betragen die Zins

Vom 31. Aug.	bis 5. Sept.	zu 5 %,	5 Tage,	Differenz gegen 5%	— T
« 5. Sept.	« 3. Oct.	« 5½%,	28 «	« « «	14
« 3. Oct.	« 17. Oct.	« 6 %,	14 «	« « «	14
« 17. Oct.	« 9. Jän.	« 6½%,	84 «	« « «	126
« 9. Jän.	« 19. Jän.	« 5½%,	10 «	« « «	5
		zu 5%	141 Tage	und zu 1%	159 T

daher die Zinsen:

$$Z = \frac{4800}{36.000} (141 \times 5 + 159) = 115{\cdot}20$$

Diese Methode, welche sich umso vortheilhafter erweist, jemehr Veränder der Bankzinsfuss erleidet, hat sich praktisch auf's Beste bewährt und ist di für den bankmässigen Verkehr ihrer leichten Handhabung wegen besonders gee

DIE MATHEMATIK

im

ienste der Nationalökonomie

unter Rücksichtnahme auf die

ktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik

einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik

für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet.

Supplementband zum gleichnamigen Werke.

Verfasst

von

D[R.] LUDWIG GROSSMANN

aber des Ersten Wiener mathematischen Bureau und Herausgeber der Fachschrift „Controle".

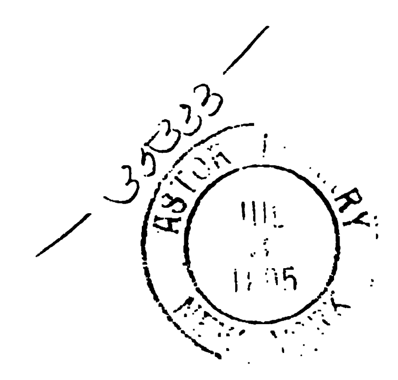
Siebente Lieferung.

WIEN 1895.

Im Selbstverlage des Verfassers.

III., Sofienbrückengasse Nr. 14.

Druck von Josef Bayer & Comp., Wien, I., Wollzeile 25.



VORREDE.

Als ich im Jahre 1891 das Lieferungswerk „Die Mathematik im Dienste Nationalökonomie“ zum vorläufigen Abschlusse brachte, war es mir ver-nt, dies mit dem beruhigenden Bewusstsein thun zu können, für die Lösung mir gestellten Aufgaben und die Erreichung jenes diesbezüglich mir ge-kten Zieles meine Kraft nicht vergeblich aufgewendet zu haben. Es war klar geworden, dass es blos eines solchen Impulses bedurft hatte, um den her fast stockenden Entwicklungsgang auf politisch-ökonomischem Gebiete dernd zu beeinflussen, nachdem selbst die spärlichen Fortschritte im prak-h-wirthschaftlichen Getriebe immer sichtbarer und intensiver den Mangel nz- und versicherungstechnischer Hilfsmittel hatten hervortreten lassen und Entbehren jener Initiative, welche die gegenseitige Ergänzung theoretischer enntniss und praktischer Auffassung erzeugt, offenbarten. Ich hatte erkannt, s dieses Werk mit seinem Zwecke der technischen Ausgestaltung ökono-cher Fragen von neuen Gesichtspunkten aus, geeignet sei, einem Bedürf-e abzuhelfen. Die anfangs schüchternen Versuche in der Anwendung der gebnisse wissenschaftlicher Forschung hatten sich bewährt und trugen in er Hinsicht zum technischen Ausbau der Institutionen sowohl des Ver-erungs-, als auch des Bankwesens bei, manche werthvolle Anregung betreffs r rationellen Ausgestaltung dieser wirthschaftlichen Einrichtungen bietend. d so wurde mir auch bald die hohe Befriedigung zutheil, die theoretischen ultate meiner bescheidenen Thätigkeit in ihrer praktischen Anwendung Erfolg begleitet zu sehen.

Entsprechende Würdigung fanden meine Arbeiten auch dadurch, dass in senschaftlichen Kreisen die neue Richtung, die ich hinsichtlich der For-ung auf dem Gebiete der Volkswirthschaftslehre mittelst entsprechender wendung der exacten mathematischen Wissenschaft eingeschlagen, Schule machen begann und solchermaassen in erspriesslicher Weise auf die gemeine Entwicklung der praktischen Nationalökonomie einwirkte.

All' dies musste geeignet sein, mich in meinen Bestrebungen aufzu-ntern und mich anzuspornen, auf dem betretenen Pfade weiterzuschreiten. r continuirliche Aufschwung der wirthschaftlichen Institutionen drängt mer neue actuelle Fragen politisch-ökonomischer Beschaffenheit in den rdergrund, stets weitere Anforderungen an die wissenschaftliche Forschung llend. Wenn ich daher jenen in diesem Werke vertretenen Disciplinen der lkswirthschaftslehre neuerdings meine Aufmerksamkeit zuwende, und das-be durch einen weiteren Band ergänze, so geschieht es, um dem sich geltend chenden Bedürfnisse einer fortgesetzten Ausgestaltung der technisch-ökono-schen Grundlagen Rechnung zu tragen.

Wien, am 1. Jänner 1895.

Der Verfasser.

INHALT.

Versicherungstechnik.

Finanztechnik.

Druckfehler und Correcturen:

Auf Seite 48, zweiter Absatz, dritte Zeile soll es lauten, anstatt: indem z etw Zahl . . ., richtig: indem z_1 etwa der Zahl . . .

Auf Seite 59 soll die Formel 20) richtig lauten

$$k = m \left[\frac{\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+\mu+1} - \mu \cdot \Sigma D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} \right]$$

Auf derselben Seite soll die Formel 21) richtig lauten

$$k = m \left[\frac{\Sigma\Sigma D_{x+a+1} + a\Sigma D_{x+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+\mu+n+1} - (\mu + a)\,\Sigma D_{x+}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} \right.$$

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

I.

Seitdem von uns in der ersten Lieferung dieses Werkes die Idee der Ver-
herung mit steigendem Gewinnantheile angeregt wurde, hat sich manche
ränderung auf dem Gebiete der Lebensversicherung vollzogen. Nicht nur
Assecuranz-Institute Oesterreich-Ungarns und Deutschlands, sondern auch
jenigen Frankreichs haben sich im Laufe des seither verflossenen Decenniums
eser Frage bemächtigt und dieselbe dem Wesen der Lebensversicherung
nstbar gemacht. Was wir durch diese Idee zu erreichen gedachten, war die
seitigung der Anomalie, welche in der gleichbleibenden Jahresprämie gegen-
er der mit dem Alter abnehmenden Erwerbsfähigkeit des Menschen liegt.
ohl wurde diesem Umstande bereits schon viel früher durch die Umwandlung
ursprünglich steigenden Jahresprämie, welche dem mit dem Alter zunehmen-
Risico entsprach (sogenanntes Umlageverfahren) in eine gleichbleibende Prämie
hnung getragen, doch konnte dies nur zum Theile der diesbezüglichen An-
derung genügen, denn die vollständige Ausgleichung dieses Gegensatzes wäre
durch Aufstellung einer mit dem jeweiligen Alter und der entsprechenden
werbsfähigkeit des Menschen im Einklange stehenden Abstufung der Jahres-
mie möglich. Eine solche Ausgestaltung des Prämientarifes war jedoch,
esehen von technischen Rücksichten, schon aus dem Grunde nicht durch-
rbar, weil bei einfacher Todesfallversicherung die Prämie im höheren Alter,
welchem das Risico ein relativ grosses wird, auf die jüngeren Jahrgänge
te überwälzt werden müssen, wodurch sich die Anfangsprämien zu hoch gestellt
die Acquisition bedeutend erschwert worden wäre. Aber auch in tech-
her Beziehung mussten diesbezüglich sich Bedenken geltend machen, weil
in ungleich grösserem Maasse sich vollziehende Prämienreserve-Ansammlung
Folge dieses Prämientarif-Systemes gewesen wäre und auch die mathe-
tische Ermittlung der Reserve bei abfallender Prämie manche technische
wierigkeit mit sich gebracht hätte. Was jedoch hauptsächlich von einer
rtigen Umgestaltung der technischen Grundlagen der Lebensversicherung
chrecken musste, war die Verwirrung, die mit einer solchen Umwälzung in
Lebensversicherungs-Institution verbunden gewesen wäre. Deshalb musste
einen Modus gedacht werden, welcher ohne solch' schweren Nachtheile für
Institution der Lebensversicherung mitzubringen, den genannten Anfor-
ungen genügen konnte.

Ein solcher liegt nun offenbar in dem Systeme der Versicherung mit
ndem Gewinnantheile, indem mit Hilfe eines entsprechenden Zuschlages
ahresprämie, der die Anfangsleistung in der nöthigen Weise zu erhöhen
et ist, eine in *arithmetischem* Sinne jährlich steigende Ermässigung der

weiteren Jahresprämien möglich wird, die in ihrer Wirkung der genann
Anforderung zu genügen vermag, ohne eine Verschiebung der technisch
Grundlagen herbeizuführen. Was etwa in Bezug auf die Anpassung der jährl
zu leistenden Lebensversicherungs-Prämien zur Erwerbsfähigkeit des Mensch
zu thun noch übrig blieb, wurde durch die in diesem Werke zuerst in An
gung gebrachte Combination der Lebens- und Invaliditäts-Ve
sicherung*) erreicht, indem im Falle der eingetretenen Invalidität,
weitere Prämienzahlung entfällt, wofür dem Versicherten ein weiterer klei
Zuschlag zur Jahresprämie auferlegt wird. Auf diese Weise erfährt die techni
zu Grunde gelegte gleichmässige Jahresprämie eine, wenn auch nicht prin
pielle, so doch im Wesen begründete und thatsächlich zum Ausdrucke kommen
Veränderung im Sinne jener dem natürlichen Verlaufe des menschlichen Leb
angepassten Leistungsfähigkeit, so zwar, dass eine der Erwerbsfähigkeit
sprechende Vertheilung der Lasten während der Versicherungsdauer erfol
Und indem solchermassen die Prämie künstlich mit den Bedingungen
individuellen Leistung in Einklang gebracht wird, erfährt das Bestreben
Versicherungsidee allen Verhältnissen des menschlichen Lebens anzupas
eine weitere Bethätigung.

Aber auch ein weiterer Vortheil für die Lebensversicherungs-Instit
musste sich aus dieser neuen Einrichtung ergeben. Durch die von der eig
lichen Prämie unabhängige Leistung des Gewinnantheil-Zuschlages w
nicht nur den Anfangsprämien eine breitere Basis und auf diese Weise
Amortisation des Risikos ein rascherer Verlauf gegeben, sondern auch
Stabilität der Versicherungen wurde hiedurch bedeutend gehoben, weil
Gründen der erst später erfolgenden, an die Bedingung einer längeren V
sicherungsdauer gebundenen Gegenleistung des steigenden Gewinnanthe
die vorzeitige Auflösung des Versicherungs-Vertrages einen Verzicht
erworbene Rechte involvirt. Hiedurch wird dem übermässigen, in den letz
Decennien besonders überhandnehmenden Storno ein Riegel vorgeschoben.
Versicherung mit steigendem Gewinnantheil bildet daher eine nicht nur
den Versicherten, sondern auch für den Versicherer besonders vortheilh
Form des Lebensversicherungsvertrages.

In nachfolgenden Ausführungen mögen nun die verschiedenen For
der Versicherung mit steigendem Gewinnantheil einer näheren Untersuch
unterzogen werden, da wir uns in jenem, diese interessante Frage zum er
Male behandelnden Aufsatze unter dem Titel: „Theorie und Lösu
der irreductibelen transcendenten Gleichungen u
deren Anwendung zur Berechnung einiger Assecura
Combinationen" (Siehe I. Lieferung 1886) nur mit den theoretis
Grundzügen der diesbezüglichen einschlägigen mathematischen Behelfe begnü
mussten. Erst nachdem unsere Idee sich in ihrer praktischen Anwendung bew
hatte und der Scharfblick des Assecuranz-Praktikers die geeignete Form her

*) *Siehe:* „Combination der Lebens- und Invaliditäts-Versicherung." V. Liefer
Seite 13.

iff, welche den Anforderungen auch in acquisitorischer Beziehung am besten entsprechen vermochte, gelangten nach und nach auch die einzelnen speillen Formen dieser Grundidee zur geeigneten versicherungstechnischen handlung.

Um die Ausführungen möglichst klar und verständlich zu gestalten, dürfte angezeigt sein, bevor auf die weiteren speciellen Fälle näher eingegangen rd, die wichtigsten grundlegenden Formen in ihrer Entwicklung nochmals recapituliren. Zu diesem Behufe möge folgende Darstellung des Principes, lches das Wesen des jährlich steigenden Gewinnantheiles betrifft, zur mathetischen Erläuterung desselben beitragen.

Eine Lebensversicherungs-Gesellschaft hat die Absicht, ihren Versicherten en Bonus in Form einer im Ausmaasse von $M\%$ der eingezahlten Prämien m Ausdrucke kommenden Gewinnbetheiligung zu gewähren, und zwar in m Sinne, dass dem Versicherten jährlich sovielmal $M\%$ der Jahresprämie ckerstattet werden, als die Anzahl der eingezahlten Prämien beträgt. Der rsicherte wird in diesem Falle also nach Ablauf seines ersten Versicherungsres $M\%$, nach Ablauf des zweiten $2 . M\%$, des dritten $3 . M\%$ u. s. f. veret erhalten. Zu diesem Zwecke wird natürlich die Prämie derjenigen Verherten, welche auf eine solche Gewinnbetheiligung reflectiren, mit einem sprechenden Zuschlage ausgestattet werden müssen und es ergibt sich nun Frage, wie hoch dieser Zuschlag mit Rücksicht auf den Percentsatz des igenden Gewinnantheiles und den der Rechnung zu Grunde gelegten Zinss, sein muss, um den Anforderungen dieser Leistung von Vornherein zu nügen.

In unserer ursprünglichen Abhandlung über dieses Thema glaubten wir se Combination in ihrer rechnungsmässigen Aufstellung in erster Linie auf einfache Todesfallversicherung anwenden zu müssen, indem wir den in chnung zu bringenden wichtigen Factor der Prämienzahlungsdauer durch Erlebenswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Alter ausdrückten, deren griff allgemein durch die Grösse w_t zur Darstellung gelangte.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass diese Combination in der sogenannten mischten Versicherung bessere Anwendung fand, um so mehr als hier an Stelle des variablen Factors einer wahrscheinlichen Prämienzahlungsdauer constanter, im vorhinein bestimmter tritt und überdies der durch den igenden Gewinnantheil von Jahr zu Jahr sich vollziehenden Verminderung r Prämienleistung eine bestimmte Grenze gesetzt wird, während bei einer lchen Combination der einfachen Todesfallversicherung für einen 3%igen igenden Gewinnantheil z. B. nach einer Prämienzahlungsdauer von 33 Jahren cht blos der Zuschlag, sondern auch die eigentliche Prämie durch den winnantheil vollständig annullirt wird, wenn auch gerade dieser Umstand nach serer Auffassung der in letzterer Zeit im Abnehmen begriffenen diesbezüghen Versicherungsform einen neuen Impuls zu geben geeignet wäre.*)

*) Siehe die „Prämie für *Langlebigkeit*" III. Lief., Seite 53.

Wir werden uns daher in dieser Abhandlung blos mit der Combinatio der sogenannten gemischten Versicherung befassen und die ursprünglichen allgemeinen Formen in diesem Sinne modificiren.

Bezeichnet man daher mit n die im vorhinein bedingte Anzahl der z leistenden Jahresprämien N, ferner mit $P = 100\,p$ den der Rechnung zugrund gelegten Zinsfuss, mit $M = 100\,m$ den Gewinnantheil-Percentsatz und mi $R_n = m \,.\, N \,.\, n$ den jeweiligen beziehungsweisen Gewinnantheil, so wird sic folgende Rechnungsart ergeben.

Als fortlaufende Gewinnantheile in den einzelnen Jahren aufgezinst a die fernere Dauer der Versicherung ergaben sich die Werthe:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= m \,.\, N\,(1+p)^{n-1} \\
R_2 &= m \,.\, 2 \,.\, N \,.\, (1+p)^{n-2} \\
R_3 &= m \,.\, 3 \,.\, N \,.\, (1+p)^{n-3} \\
&\vdots \\
R_{n-2} &= m\,(n-2) \,.\, N \,.\, (1+p)^2 \\
R_{n-1} &= m\,(n-1) \,.\, N \,.\, (1+p) \\
R_n &= m \,.\, n \,.\, N \,.
\end{aligned}
$$

Um nun diese bis zum Ablaufe der Versicherung durch Zins und Zi zins angewachsenen jährlich steigenden Gewinnantheile in ihrem Gesamt werthe G darzustellen, ist es nothwendig die durch obige Formen ausgedrück Beträge zu summiren, und zwar ergibt sich

$$
\begin{aligned}
G = m\; N\, \Big(& [(1+p)^{n-1}+(1+p)^{n-2}+(1+p)^{n-3} \ldots +(1+p)^2+(1+p)+1]+ \\
& +[(1+p)^{n-2}+(1+p)^{n-3}+(1+p)^{n-4} \ldots \; (1+p)^2+(1+p)+1]+ \\
& +[(1+p)^{n-3}+(1+p)^{n-4} \ldots +(1+p)^2+(1+p)+1]+ \ldots \\
\ldots\ldots & +[(1+p)^3+(1+p)^2+(1+p)+1]+[(1+p)^2+(1+p)+1] \\
& +[(1+p)+1]+1\Big)
\end{aligned}
$$

und falls wir jede einzelne der sich innerhalb der Klammern befindlich Reihen summiren, so erhalten wir schliesslich

$$
\begin{aligned}
G = m\; N \Big(& \frac{(1+p)^n-1}{p} + \frac{(1+p)^{n-1}-1}{p} + \frac{(1+p)^{n-2}-1}{p} + \ldots \\
& \ldots + \frac{(1+p)^2-1}{p} + \frac{(1+p)-1}{p} \Big) =
\end{aligned}
$$

$$
G = m\; N \,.\, \left(\frac{1+p}{p} \,.\, \frac{(1+p)^n-1}{p} - \frac{n}{p} \right) \tag{1}
$$

welche Form also den Gesammtwerth aller Gewinnantheile auf den Zeitpunk der Fälligkeit der Versicherungssumme aufgezinst repräsentirt.

Den Gegenstand der weiteren Untersuchung wird nun der zur Bestreitun der Gewinnantheile nöthige Prämienzuschlag bilden.

ifall-Versicherung. — Eine Methode für die Cumulirung homoner, auf statistischen Daten ungleicher Frequenz beruhender Wahrscheinlichkeiten.

I.

Die Frage, für das Wesen der Einzel-Unfallversicherung eine geeignete sicherungstechnische Besis zu schaffen, beschäftigt in letzterer Zeit ohne erlass alle ernsten Förderer dieses Assecuranz-Gebietes. Die bedeutenden tschritte, welche dieser noch junge Zweig des Versicherungswesens derzeit sits zu verzeichnen hat, haben das Bedürfniss gezeitigt, denselben sowohl technischer als auch in tariflicher Beziehung einer entsprechenden Ausgetung zuzuführen und macht sich das Bestreben in immer regerer Weise end, diese Institution bestimmten auf verlässlichen Grundlagen beruhenden men, sowohl hinsichtlich der verschiedenen Berufszweige, als auch der elnen Schaden-Kategorien, zu unterordnen. Die zahlreichen Versuche jener en Versicherungszweig cultivirenden Gesellschaften, ihr vorhandenes istisches Materiale dem eigenen Bedürfnisse dienstbar zu machen, bilden n Beweis für die stets dringlicher sich äussernde Nothwendigkeit, dieses emeine Postulat der Versicherungsidee endlich auch hier zur Geltung men zu lassen. Solange die Institution der Einzel-Unllversicherung sich i im Stadium ihrer ersten Entwicklung befand und die Prämie eine noch hrem Wesen dehnbare Beschaffenheit besass, war es, wie bei jeder jungen iche möglich, einer positiven Grundlage zu entrathen, oder sich im besten e mit den Erfahrungen des eigenen Betriebes zu begnügen. Die raschen lge jedoch, welche auf diesem Gebiete erzielt wurden, förderten in verhissmässig kurzer Zeit die Entstehung einer grossen Anzahl von neuen tuten, deren gegenseitige Concurrenz einen Druck auf das Niveau der nie ausüben muss, so dass die Grenzen der Erspriesslichkeit immer engere len. Zudem gesellt sich noch der Umstand, dass der rapid zunehmende ang des Betriebes das quantitative Risiko in bedeutendem Maasse erhöht die Berücksichtigung empirischer Hilfsmittel gebieterisch fordert. Solchersen muss die Erkenntniss unzureichender Verlässlichkeit jener spärlichen, ngen Rahmen der Thätigkeit einzelner Anstalten beschränkten statistischen idlagen, zum Durchbruche gelangen und die Frage einer gemeinsamen peration zum Zwecke der Zusammenfassung jeglichen statistischen Mates zu einem Ganzen, in's Rollen bringen. Wenn auch heute noch manche llversicherungs-Anstalt ihre Statistik aus geschäftlichen Rücksichten als imniss behandeln zu müssen glaubt und auf dem Standpunkte ihres eigenen stischen Stückwerkes beharrt, so dürfte dieser Widerstand einer besseren icht weichen, sobald die näheren Umstände bestimmt werden, unter denen die nilirung des statistischen Materiales, ohne Rücksicht auf dessen Ursprung, vollziehen soll.

Zu erreichen wäre dieses Ziel durch Schaffung einer gemeinsamen mathematisch-statistischen Centralstelle für die österreichisch-ungarischen, deutschen und schweizerischen Gesellschaften, deren Aufgabe es wäre, das mehr oder minder reichhaltige Materiale der einzelnen Unfallversicherungs-Gesellschaften nach Massgabe seiner Beschaffenheit auf dessen jeweiligen bestimmenden Einfluss für die gemeinsamen statistischen Grundlagen zu prüfen und auf diese Art mittelst geeigneter Anwendung und Cumulirung aller vorhandenen Daten, eine möglichst verlässliche versicherungstechnische Basis nicht nur für die Prämienbemessung hinsichtlich der verschiedenen Gefahrenclassen, sondern auch für die Feststellung entsprechender Versicherungsnormen bezüglich der einzelnen Berufsarten, festzustellen*).

Auf diese Weise wäre Gelegenheit geboten, allen Anforderungen in versicherungstechnischer Beziehung gerecht zu werden und diesen Zweig der Versicherungs-Institution mit verlässlichen statistischen Grundlagen nach jeder Richtung hin auszustatten. Die Geschichte der Lebensversicherung, deren technische Grundlagen heute an Zuverlässigkeit nichts zu wünschen übrig lassen, lehrt uns, dass eine rationelle Entwicklung auf diesem Gebiete der Assecuranz erst vom Zeitpunkte einer gemeinsamen Förderung der versicherungstechnischen Behelfe ihren Anfang nahm und von da ab auch die grossen Fortschritte im Wesen der Mortalitäts-Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre datiren. Mag die Erkenntniss dieses Umstandes auch hier einigend wirken, zum Nutzen des gemeinsamen Zweckes überhaupt und im Interesse der Unfallversicherungs-Institution insbesondere.

Nachdem wir nun die Nothwendigkeit der Ausgestaltung einer versicherungstechnischen Basis für die Unfallversicherung auf Grund gemeinsamer statistischer Daten begründet haben, ist auch der Zweck der dem Titel gemäss hier zur Darstellung gelangenden Methode gekennzeichnet. Das nach Zeit und

*) Die Propagirung dieses Planes wird von uns schon seit längerer Zeit eifrig betrieben, und wurde bereits gelegentlich des Congresses des internationalen Unfallversicherungs-Verbandes im Jahre 1892 diese Frage ventilirt, wie auch der Beschluss gefasst, zu deren Untersuchung einen Ausschuss einzusetzen, welcher aus den Directoren der Schweizerischen Unfallversicherungs-Gesellschaft in Winterthur, des Allgemeinen deutschen Versicherungs-Vereines in Stuttgart und dem Vorstande der Unfallversicherungs-Abtheilung des „Oesterreichischen Phönix" in Wien besteht. Die Mitglieder des Ausschusses verhalten sich durchaus zustimmend zu dieser Frage, wie auch in Unfallversicherungs Kreisen allgemein nicht blos der gedeihlichen Lösung derselben mit Interesse entgegengesehen wird, sondern auch sonst gewichtige Stimmen laut werden, welche die Art der Durchführung dieses Planes bereits in Discussion ziehen. Der Bericht der Niederösterreichischen Handels- und Gewerbekammer über das österreichisch-ungarische Versicherungswesen für das Jahr 1893 (Referat des Herrn Sigmund Reich, Secretär der k. k. priv. Riunione Adriatica di Sicurtà) äussert sich über diese Frage folgendermassen: „Empfehlen würde sich die Errichtung eines statistischen Centralbureaus für die Anlage einer Schadenstatistik auf versicherungstechnischer Basis. Die Kosten sollten von den zu diesem Zwecke sich zu vereinigenden österreichisch-ungarischen, deutschen und schweizerischen Gesellschaften, welche auch die nöthigen Daten diesem Bureau zu liefern hätten, je nach der Höhe ihrer Prämieneinnahme bestritten werden. Damit entfiele die Anlage der einzelnen Hausstatistiken, welche doch nur Stückwerk sind und vielleicht sogar grössere Kosten verursachen, während bei der Statistik des Centralbureaus die allein maassgebenden Gesetze der grossen Zahlen in ihr Recht treten würden. Die Gefährlichkeit der Berufe könnte durch eine solche umfassende Statistik auf's genaueste festgestellt werden und die Gesellschaften dadurch einen verlässlichen Maassstab für die Anwendung der Gefahrenclassen erhalten."

mfang durchaus ungleiche statistische Materiale der einzelnen Unfallver-
cherungs-Gesellschaften bedarf eines geeigneten wissenschaftlichen Behelfes,
m nach Massgabe seiner jeweiligen qualitativen Beschaffenheit in den Rahmen
ner einheitlichen wahrscheinlichen Zuverlässigkeit eingefügt zu werden.

Das mathematisch hier anzuwendende Princip, nach welchem ein stati-
isches Materiale von kleinerem Umfange hinsichtlich der Verlässlichkeit
iner Wahrscheinlichkeits-Resultate geringer anzuschlagen ist wie ein solches
n ungleich grösserer Frequenz, ist in dem Gesetze der grossen Zahlen
gründet. Es muss sich uns also angesichts der unterschiedlichen Beschaffen-
it jener von den einzelnen Gesellschaften gebotenen Bestandtheile des
atistischen Materiales darum handeln, diese nach ihrer relativ bestimmenden
athematischen Wirkung abzuschätzen und in gleichem Sinne deren geltenden
influss auf das Gesammtresultat zu bemessen. Würde es sich blos um das
atistische Materiale der letzten Jahre handeln, so könnte einfach aus dem
orne der gemeinsamen Daten geschöpft werden. Da man jedoch vorwiegend
f bereits verarbeitete empirische Behelfe einzelner älterer Anstalten Gewicht
legen genöthigt ist, weil gerade diese für die Statistik den grössten Werth
sitzen, ist ein Verfahren, wie wir es daselbst zur Darstellung zu bringen im
egriffe stehen, für die Förderung verlässlicher Wahrscheinlicheitsresultate
msomehr geboten, als auch die bei älteren Anstalten grössere Verlässlichkeit
der Art der Schadenermittlung hier durchaus nicht irrelevant ist.

Zu erwägen ist auch der Umstand, dass in vielen Fällen von eigent-
hen statistischen Daten ganz abgesehen werden muss und nur deren Resul-
e in Form von Schadenpercenten die gebotene Handhabe für weitere
tersuchungen bilden. Es kann daher keinem Zweifel unterliegen, dass man
den Untersuchungen zum Zwecke einer verlässlichen empirischen Basis
mit der grössten Mangelhaftigkeit der statistischen Behelfe rechnen muss,
schon das Bestreben des Versicherungstechnikers, ein möglichst umfangreiches
tistisches Materiale seinem Calcul zugrunde zu legen, die Ausnützung des-
ben nach jeder Richtung hin erfordert, wodurch auch den Anforderungen
r erhöhten Verlässlichkeit naturgemäss entsprochen wird.

Unsere Methode besitzt nun die Eigenschaft, die versicherungstechnische
wendung sonst unzulänglicher empirischer Hilfsmittel ebenso zu gestatten,
diejenige eines ausführlichen statistischen Materiales. Nur macht jeder
elne statistische Beitrag seinen Einfluss auf das Gesammtergebniss in
tivem Sinne nach Massgabe seines jeweiligen bestimmenden Grades geltend,
m dessen statistische Frequenz ausschlaggebend für die beziehungsweise
rscheinliche Zuverlässigkeit sich gestaltet.

Diese wahrscheinliche Zuverlässigkeit, welche demgemäss in
rer Rechnung eine ziffermässige Darstellung findet, ist also der Ausdruck
entsprechenden Verlässlichkeits-Grades der einzelnen aus statistischen
trägen entspringenden Wahrscheinlichkeiten, welche gewissermassen die
mente einer zu schaffenden versicherungstechnischen Grundlage repräsen-
n und in diesem *Sinne auf* das Gesammtresultat ihre Wirkung üben.

2*

In nachfolgenden Ausführungen mag das Wesen dieser Methode Darstellung unterworfen werden, doch wollen wir, bevor wir auf das N der Sache vom mathematischen Standpunkte eingehen, Einiges über di zur Anwendung gelangenden Principien der Wahrscheinlichkeitslehre v schicken.

Die für die vorliegende Untersuchung nothwendigen wichtigsten der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind folgende: Wenn für das Eint eines Ereignisses verschiedene gleichwerthige, das heisst nach Lage de handenen Verhältnisse gleichmögliche Fälle vorliegen, deren Anzahl dagegen jene ein bestimmtes anderes Ereigniss bedeutenden Fälle durc Grösse b repräsentirt werden, so gelangt in der Zahl $\frac{b}{a}$ die Wahrschei keit für das Eintreffen dieses zweiten Ereignisses zur Darstellung.

Mit einem Würfel können beispielsweise sechs verschiedene Würf macht werden, von denen jeder einer anderen bestimmten Augenzahl spricht. Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte vorher festgesetzte Auge zu werfen, ist daher ein $^1/_6$. Dagegen können mit zwei Würfeln 6×6 verschiedene Würfe gemacht werden. Die Möglichkeit mit zwei Würfeln sammen z. B. acht Augen zu werfen, lässt aber fünf Combinationen zu zwar 2 und 6, 3 und 5, 4 und 4, 5 und 3, 6 und 2. Infolge dessen wi Wahrscheinlichkeit mit zweier Würfeln acht Augen zu werfen $^5/_{36}$ sein.

Sind ferner a Fälle möglich, darunter in b Fällen ein bestimmtes E niss, so wird dieses in $a - b$ Fällen nicht eintreffen. Es ist daher die W scheinlichkeit für das Nichteintreffen dieses Ereignisses $\frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$

Ist unter a Fällen b mal das Ereigniss B und c mal ein anderes E niss C möglich, so tritt in $b + c$ Fällen entweder das Ereigniss B od ein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser beiden Ereignisse eintritt also $\frac{b + c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$, was die Summe der Wahrscheinlichkeit für das treffen der einzelnen Ereignisse bedeutet.

Sind weiter unter a möglichen Fällen b Fälle günstig für das Eint des Ereignisses B, ebenso aber auch unter c möglichen Fällen d gün Fälle für das Eintreffen des Ereignisses D, so sind, falls man beide Gru zusammen betrachtet, $a \cdot c$ Fälle überhaupt möglich, da zu jedem der a lichen Fälle des ersten Ereignisses ein jeder der c möglichen Fälle zweiten Ereignisses treten kann. Ebenso sind $b \cdot d$ Fälle für das Eintr beider Ereignisse günstig, da zu jedem der b günstigen Fälle des Ereign B einer der d günstigen Fälle des Ereignisses D treten kann. Die Wahrsch lichkeit für das Eintreffen der Ereignisse B und D ist also $\frac{b \cdot d}{a \cdot c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$ was das Product der Wahrscheinlichkeit der beiden einzelnen Ereign bedeutet. Dies mag nun die Grundlage für unsere weiteren Ausführung bilden.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

II.

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse lässt sich nun auch die Frage des zur streitung der steigenden Gewinnantheile nöthigen Prämienzuschlages beantrten, welcher zum Zwecke der gleichmässigen Vertheilung auf sämmtliche imien, als eine vom Versicherten an die Versicherungsbank zu leistende schussweise Jahres-Rente aufgefasst werden mag, deren Gesammtwerth mmt Zinsen und Zinseszinsen nach Ablauf der Versicherung mit dem durch Grösse G ausgedrückten übereinstimmt.

Betrachten wir daher $k \,.\, N$ als die neben der Prämie vom Versicherten an Gesellschaft zu leistende Jahresrente während der gesammten Versicherungsuer, so ergibt sich

$$k N \frac{1+p}{p} [(1+p)^n - 1] = G$$

wenn wir die Form (1) in Betracht ziehen, so erhalten wir

$$k = \frac{m\left(\frac{1+p}{p}\;\frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p}\right)}{\frac{1+p}{p}\,[(1+p)^n - 1]}$$

Formel für den Zuschlag zur Prämie behufs Ausgleichung der gewährten vinnbetheiligung. Und führen wir die Division in obiger Formel durch, so bt sich als endgiltiges Resultat

$$k = m\left(\frac{1}{p} - \frac{n}{(1+p)\,[(1+p)^n - 1]}\right)$$

Wird nun dieser Werth näher in Augenschein genommen, so findet man, der den Prämienzuschlag darstellende Factor k nicht nur von der Höhe Gewinnantheil-Percentes und des zugrundegelegten Zinsfusses, sondern auch der Dauer der Versicherung, beziehungsweise der Anzahl der zu leistenden resprämien abhängt.

Diese Form gilt also für den Fall eines vom zurücklegten ersten Versicherungsjahre beginnenden und die ganze Dauer der Versicherung fortlaufend steinden Gewinnantheiles, dessen letzte Quote ein Jahr nach letztgezahlten Prämie fällig werden müsste, so dass auch dem stande Rechnung getragen ist, dass der nach Ablauf der letzten Prämienlung sich ergebende $n$te Gewinnantheilbetrag zur Auszahlung gelangen kann.

Im diesem Falle würde daher der dem letzten Versicherungsjahre en nde Gewinnantheil nach obiger Form mit der Versicherungssumme zur A g gelangen müssen. Da jedoch in der Praxis ein derartiger Usus

vielmehr blos eine Ermässigung der wirklich zu leistenden Prämien fü
den Gewinnantheil beabsichtigt wird, so muss, da die Gegenleistung des G
winnantheiles von Seite der Versicherungs-Gesellschaft bei der letzten Prä
thatsächlich entfällt, eine Modification der Voraussetzungen dahin stattfin
dass die Anzahl der fälligen Gewinnantheile um einen gekürzt wird, wa
der Form 1) derart zum Ausdrucke kommt, dass anstatt des Werthes n derje
von $n-1$ in Rechnung gelangt. Dagegen bleibt die Vertheilung der $n-1$
winnantheile auf n Prämien-Zuschläge aufrecht bestehen. Soll daher für
$n$jährige gemischte Versicherung der erforderliche percentuelle Prämienzusc
k zum Zwecke eines zu gewährenden Gewinnantheiles ermittelt werden, so we
angesichts einer thatsächlichen Leistung von n Jahresprämien blos
steigende Gewinnantheile in Rechnung kommen können, das heisst die F
4) wird eine Veränderung in folgendem Sinne erfahren:

$$5) \qquad k = m\left[\frac{(1+p)\,[(1+p)^{n-1}-1] - p\,(n-1)}{p\cdot\,[(1+p)^{n}-1]}\right]$$

und zwar wird hier anstatt einer vorschussweisen Rente eine nachschussw
in Betracht gezogen werden müssen, weil der Gesammtwerth G sämmtl
$n-1$ Gewinnantheile aufgezinst auf den Zeitpunkt der Zahlung der let
Jahresprämie hier zur Grundlage der Berechnung dient. Demzufolge we
auch die Resultate eine entsprechende Veränderung erfahren, indem die l
Gewinnantheilquote vollständig entfällt und hiedurch der Zuschlag zur Ja
prämie eine Ermässigung erfährt.

Während nämlich auf Grundlage der Form 4), d. i. bei Aufrechterhal
der $n$ten Gewinnantheilquote und Zahlung derselben mit der Versicheru
summe, der Prämien-Zuschlag k bei gemischter Versicherung mit $n$jähr
Prämienzahlungsdauer folgende Werthe aufweist:

für $p = 0\cdot04$, d. i. 4% und $n = 10$ wird $k = 5\cdot00\,.\,m$
$n = 15$ $k = 7\cdot00\,.\,m$
$n = 20$ $k = 8\cdot80\,.\,m$
$n = 25$ $k = 10\cdot57\,.\,m$

ergeben sich auf Grundlage der Form 5), als bei Hinwegfall der $n$ten Gew
antheilquote und unter Zugrundelegung des gleichen Zinsfusses die Wert

für $n = 10$ $k = 4\cdot178\,.\,m$
$n = 15$ $k = 6\cdot272\; m$
$n = 20$ $k = 8\cdot210\; m$
$n = 25$ $k = 9\cdot992\,.\,m$

so dass eine ganz bedeutende Ermässigung der Prämienzuschläge eintritt.

Unter Zugrundelegung eines Zinsfusses von $3^1/_2$%, d. i. $P = 100\,p =$
ergeben sich ferner die Werthe

für $n = 10$ $k = 4\cdot216\; m$
$n = 15$ $k = 6\cdot360\,.\,m$
$n = 20$ $k = 8\cdot364\; m$
$n = 25$ $k = 10\cdot158\; m$

so dass bei Annahme beispielsweise eines 3%igen steigenden Gewinnanth
d. i. für $M = 100$ $m = 3$ sich nachstehende Werthe für den percentue
Prämienzuschlag k ergeben:

Für $n = 10$	$k = 12{\cdot}534\%$	der Jahres-Prämie bei 4% Zinsen,	$k = 12{\cdot}648\%$	der Jahres-Prämie bei 3½% Zinsen.
$n = 15$	$k = 18{\cdot}816\%$		$k = 19{\cdot}070\%$	
$n = 20$	$k = 24{\cdot}630\%$		$k = 25{\cdot}092\%$	
$n = 25$	$k = 29{\cdot}976\%$		$k = 30{\cdot}474\%$	

…gleichen bei Annahme eines 2%igen steigenden Gewinnantheiles, d. i. für …$= 100$ $m = 2$

für $n = 10$	$k = 8{\cdot}356\%$	der Jahres-Prämie bei 4% Zinsen,	$k = 8{\cdot}432\%$	der Jahres-Prämie bei 3½% Zinsen.
$n = 15$	$k = 12{\cdot}544\%$		$k = 12{\cdot}720\%$	
$n = 20$	$k = 16{\cdot}420\%$		$k = 16{\cdot}728\%$	
$n = 26$	$k = 19{\cdot}984\%$		$k = 20.316\%$	

Soll nun eine Veränderung dieses Modus in dem Sinne stattfinden, dass …den ersten drei, vier oder fünf Jahren der Versicherung die Gewinnantheile …nzlich entfallen, also gar nicht in Betracht kommen, während die späteren …ewinnantheile im Verhältnisse der eingezahlten Prämien zur Auszahlung …langen, indem beispielsweise die Fälligkeit des ersten Gewinnantheiles erst …ch dem dritten Versicherungsjahre, jedoch gleich mit $3 \,.\, M\%$ eintritt, so …ird die Form 4) eine Modification in folgender Weise erfahren:

Es soll eine Formel aufgestellt werden für den percentuellen Prämien…schlag bei sogenannter gemischter Versicherung, bei welcher die Zahlung … n Jahresprämien vorgesehen ist, zum Zwecke eines an den Versicherten …gewährenden $M\%$igen, jährlich steigenden Gewinnantheiles, welcher jedoch … nach Ablauf des $a$ten Versicherungsjahres flüssig zu werden beginnt und …lich im Verhältnisse der jeweilig eingezahlten Prämien bis zum Flüssig…den der Versicherungssumme zur Auszahlung gelangt, und zwar so, dass …selbe nach dem $a$ten Jahre $a\,M\%$, nach dem $(a+1)$ten Jahre $(a+1)\,M\%$ … f. zu betragen hätte.

Zu diesem Behufe muss die Form 1) eine Veränderung dahin erfahren, … in derselben die bis zum $a$ten Versicherungsjahre sich ergebenden, jedoch … gar nicht zur Auszahlung gelangenden Gewinnantheile ausser Rechnung …racht werden, indem deren Gesammtwerth von demjenigen sämmtlicher …innantheile in Abzug gebracht wird.

Bezeichnen wir daher den Gesammtwerth aller vom $a$ten Versicherungs…e an fällig werdenden und bis zum Ablaufe der Versicherung fortlaufenden …innantheile mit G', so erhalten wir

$$G' = m \,.\, N\left[\frac{1+p}{p}\,\frac{(1+p)^n - 1}{p} - \frac{n}{p} - (1+p)^{n-a} \,.\left(\frac{1+p}{p}\,\frac{(1+p)^a - 1}{p} - \frac{a}{p}\right)\right]$$

Soll nun dieser Werth in Form einer vorschussweisen Jahresrente als …chlag zur Prämie zum Ausdrucke kommen, so wird G' als Gesammtwerth … Gewinnantheile, analog zum Vorigen, in folgender Weise zur Darstellung …ngen müssen, und zwar:

$$G' = k \,.\, N \,.\, \frac{1+p}{p}\left[(1+p)^n - 1\right]$$

Demgemäss ergibt sich für k in diesem Falle nachstehender Werth:

$$k = m\,\frac{\left[\dfrac{(1+p)^{n-a} - 1}{p} + \dfrac{a\,(1+p)^{n-a} - n}{1+p}\right]}{(1+p)^n - 1}$$

Würde also der Gewinnantheil erst nach Ablauf des dritten Jahre[s bei]spielsweise fällig werden, also mit $3\,M\%$ zur Auszahlung gelangen, so [wäre] in dieser Form $a = 2$ zu setzen, weil blos für die ersten zwei Jahre Gewinnantheile von $M\%$, beziehungsweise $2\,M\%$ entfallen.

Derselbe Umstand jedoch, den wir in dem vorhergehenden Falle her[vor]zuheben Gelegenheit hatten, gilt auch für diesen. Mit der letzten zu leiste[nden] Jahresprämie wird auch der letzte Gewinnantheil fällig werden, so dass ebenfalls für *n* Prämien blos $n-1$ Gewinnantheile zur thats[äch]lichen Auszahlung gelangen werden.

Demgemäss wird auch die Relation 7) eine Rectification erfahren mü[ssen], indem dieselbe folgendermassen lauten wird:

$$8)\qquad k = m\,\frac{\left[\frac{1+p}{p}\cdot[(1+p)^{n-a-1}-1] + a\,(1+p)^{n-a-1} - n + 1\right]}{(1+p)^n - 1}$$

Erst in dieser Form reicht dieselbe zur Befriedigung des factischen Bedürf[nisses] hin und ist geeignet, den gegebenen Anforderungen zu entsprechen.

In gleicher Weise wie zuvor ergibt sich nun durch den natürlichen [Weg]fall der letzten Gewinnantheilquote eine Reduction des Zuschlages. Wä[hrend] nämlich unter Aufrechterhaltung derselben nach Form 7) unter Zugru[nde]legung eines 4%igen Zinsfusses sich die Werthe

$$\text{für } a = 2 \text{ und } \begin{cases} n = 10 & k = 4{\cdot}645\,.\,m \\ n = 15 & k = 6{\cdot}761\,.\,m \\ n = 20 & k = 8{\cdot}643\,.\,m \\ n = 25 & k = 10{\cdot}385\,.\,m \end{cases}$$

ergeben, erhält man bei Hinwegfall der *n*ten Gewinnantheilquote nach For[m 8)] unter Beibehaltung des gleichen Zinsfusses von 4% die Werthe

$$\text{für } a = 2 \text{ und } \begin{cases} n = 10 & k = 3{\cdot}844\,.\,m \\ n = 15 & k = 6{\cdot}029\,.\,m \\ n = 20 & k = 8{\cdot}050\,.\,m \\ n = 25 & k = 9{\cdot}820\,.\,m \end{cases}$$

Ebenso unter Zugrundelegung eines $3\tfrac{1}{2}\%$igen Zinsfusses

$$\text{für } a = 2 \text{ und } \begin{cases} n = 10 & k = 3{\cdot}887\,.\,m \\ n = 15 & k = 6{\cdot}122\,.\,m \\ n = 20 & k = 8{\cdot}171\,.\,m \\ n = 25 & k = 10{\cdot}063\,.\,m \end{cases}$$

Unter beispielsweiser Annahme eines 3%igen steigenden Gewinnanth[eiles] werden sich daher für den Prämienzuschlag *k* nachstehende Werthe erge[ben]

$$\text{für } a = 2 \text{ und } \begin{cases} n = 10 & k = 12{\cdot}171\% \\ n = 15 & k = 18{\cdot}087\% \\ n = 20 & k = 24{\cdot}150\% \\ n = 25 & k = 29{\cdot}460\% \end{cases} \left.\begin{matrix}\text{der Jahres-}\\ \text{Prämie bei}\\ 4\%\text{igem}\\ \text{Zinsfusse,}\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} k = 12{\cdot}561\% \\ k = 18{\cdot}366\% \\ k = 24{\cdot}513\% \\ k = 30{\cdot}185\% \end{matrix} \left.\begin{matrix}\text{der Ja[hres-]}\\ \text{Prämi[e bei]}\\ 3\tfrac{1}{2}\%\text{i[gem]}\\ \text{Zinsf[usse]}\end{matrix}\right\}$$

aus denen zu ersehen ist, dass bei Herabsetzung des zugrundegelegten Z[ins]fusses nicht blos, wie bekannt, die rechnungsmässige Prämie, sondern auch [der] Prämienzuschlag in seiner percentuellen Höhe einen Zuwachs erleidet.

ıfall - Versicherung. — Eine Methode für die Cumulirung homogener, auf statistischen Daten ungleicher Frequenz bêruhender Wahrscheinlichkeiten.

II.

Nachdem wir in der vorigen Abhandlung über dieses Thema die htigsten hier anzuwendenden Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ücksichtigung gezogen haben, gelangen wir auf Grund weiterer Betrachgen zu jenen Resultaten, welche den Anforderungen der sogenannten sammengesetzten Wahrscheinlichkeiten Rechnung tragend, unsere Untersuchungen eigentlich von Belang sind.

Aus den früher zur Darstellung gebrachten Normen geht Folgendes rvor: Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereigses E, hingegen q die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines anderen eignisses E_1, so ist $p \, . \, q$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Ereignisse eichzeitig, oder wenn dies nicht möglich ist, d. h. wenn das Eintreten s einen Ereignisses dasjenige des anderen ausschliesst, dass die beiden eignisse in bestimmter Reihenfolge hintereinander eintreten. In diesem zteren Falle sind zwei Reihenfolgen möglich, weshalb die Wahrscheinlicht, dass das eine Mal E, das andere Mal E_1 eintrete, gleichviel in welcher ihenfolge, $2 \, p \, . \, q$ ist. Diese Betrachtung, welche auf mehrfache Wiederungen, sogenannte zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten, ausgedehnt rden kann, bildet nun die Grundlage für unsere weiteren Ausführungen.

Die fortgesetzte Combination mehrerer Wahrscheinlichkeiten führt nämı zu folgender mathematischen Conclusion:

Hat ein Ereigniss E die Wahrscheinlichkeit p, so ist die Wahrscheinıkeit, dass bei n Versuchen m mal dieses Ereigniss eintritt

1)

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}\, p^m \, . \, (1-p)^{n-m} = \frac{n\,!}{m\,!\,\,(n-m)\,!}\, p^m \, . \, (1-p)^{n-m}$$

bei das Product der ganzen Zahlen $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, k$ der Abkürzung halber $k\,!$ bezeichnet wird, und $1-p$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen Ereignisses darstellt. Der Werth w ändert sich je nach den Werthen n ı m. Werden nun zu irgend einem supponirten Werthe von n die Werthe w verschiedene m berechnet, so gelangt man zu dem Ergebniss, dass der erth w sein Maximum erreicht, wenn m gleich np ist, oder gleich der ganzen hl, die diesem Werthe np am nächsten kommt. Demgemäss ist zwar nicht n Vornherein anzunehmen, dass gerade np mal das Ergebniss E eintreten rd, wie zu erwarten wäre, wohl aber ist im Maximum des Werthes w die ahrscheinlichkeit für das npmalige Eintreffen verhältnissmässig die grösste genüber jeder anderen Zahl. Immerhin bleibt die Wahrscheinlichkeit für das llständige Eintreffen dieser Voraussetzung noch eine sehr kleine.

Wird beispielsweise das Spiel mit einem Würfel beobachtet, so i Wahrscheinlichkeit in einem Wurfe eine bestimmte Anzahl Augen zu werf die Wahrscheinlichkeit unter drei Würfen einmal eine bestimmte A Augen zu werfen, ist bereits 0·347, unter sechs Würfen einmal eine besti Anzahl Augen zu werfen, entspricht hingegen der Wahrscheinlichkeit vo Hieraus ist ersichtlich, dass wohl mit der Zahl der Versuche die scheinlichkeit des Zutreffens steigt, woraus aber nicht gefolgert w darf, dass mit dem Vielfachen der Versuche auch das Vielfache Zutreffens verbunden sein muss. Ebenso wird die öftere Wiederh des Zutreffens eines bestimmten Ereignisses von einem ungleichen von Wahrscheinlichkeit begünstigt. So ist beispielsweise die Wahrs lichkeit, unter 24 Würfen viermal die gleiche Anzahl Augen zu blos 0·22, während die Wahrscheinlichkeit unter sechs Würfen einmal Anzahl Augen zu werfen, bekanntlich eine grössere ist, indem dieselbe 0·4 zum Ausdrucke gelangt. Dafür ist aber die Zuverlässigkeit bezügli Voraussetzung der Wahrscheinlichkeit im ersteren Falle, der öfteren Fre wegen, eine ungleich höhere.

Hierin eben äussert sich das Gesetz der grossen Zahlen, indem m Frequenz der Versuche auch der Grad mathematischer Zuverlässigkeit bez des Zutreffens der Vorausstetzungen der Wahrscheinlichkeit wächst und man daher die mit der Frequenz sich ändernde Disposition des m-m Eintreffens eines bestimmten Ereignisses E unter n Versuchen, als Ma der mathematischen Zuverlässigkeit für die Wahrscheinlichkeit p betra Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich der Grad mathematischer Z lässigkeit der Ergebnisse aus den einzelnen zur Verfügung stehenden stischen Beiträgen relativ feststellen, nach dessen Massgabe sodann Gesammtentwicklung sich äussert.

Bezeichnet man daher das Product der Wahrscheinlichkeiten w als Grad mathematischer Zuverlässigkeit z, d. h. $z = w\,p$, so dies durch folgenden Umstand gerechtfertigt: Hat ein Ereigniss die scheinlichkeit p, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Vers dasselbe gerade np-mal, resp. m-mal eintritt, bei genügend grossem n ihrem Werthe w gemäss eine verhältnissmässig kleine, immerhin aber grösser, als für alle anderen günstigen Fälle. Demnach ist es einleuc dass auch dann, wenn ein Ereigniss m-mal bei n Versuchen eintritt, des die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses nicht gerad $p = \frac{m}{n}$ übereinstimmen muss, wohl aber von allen Werthen des p der $\frac{m}{n}$ die grösste mathematische Zuverlässigkeit besitzt. Wenn wir daher Verlässlichkeits-Coëfficienten der rechnungsmässigen Wahrs lichkeit p betrachten, indem wir das Product $w\,.\,p$ als den Ausdruck m matischer Zuverlässigkeit auffassen, so tragen wir hiemit den diesbezügl Anforderungen im vollen Masse Rechnung.

Auf dieser Grundlage gelangen wir nun zu folgendem Verfahren:

Um die einzelnen statistischen Beiträge nach Massgabe ihrer jeweiligen nflussnahme auf das Gesammtresultat beurtheilen zu können, ist es nothendig, deren entsprechende mathematische Zuverlässigkeit z abgesondert stzustellen.

Zu diesem Zwecke wird einerseits die Wahrscheinlichkeit p und anderits der Verlässlichkeits-Coëfficient w einzeln ermittelt, so dass man durch ultiplication dieser beiden Factoren zu den beziehungsweisen Graden mathetischer Zuverlässigkeit gelangt, welche wir mit z_1, z_2, z_3 etc. bezeichnen llen.

Mit Hilfe derselben kann nun der Durchschnitt mathematischer Zuverssigkeit für das Gesammtmateriale ermittelt werden, indem man die jeweiligen tistischen Versuchszahlen n_1, n_2, n_3 .... mit den entsprechenden matheatischen Zuverlässigkeiten multiplicirt und die Summe dieser Producte durch Summe der Versuchszahlen dividirt.

Auf diese Weise ergibt sich daher die durchschnittliche mathematische verlässigkeit:

$$Z = \frac{n_1 \, z_1 + n_2 \, z_2 + n_3 \, z_3 \; . \; . \; . + n_k \, . \, z_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \; . \; . \; . + n_k}$$

In ähnlicher Weise gelangt man auch zu dem Werthe der durchschnitten Wahrscheinlichkeit, welche in folgender Formel zum Ausdrucke gelangt:

$$P = \frac{n_1 \, p_1 + n_2 \, p_2 + n_3 \, p_3 + \; . \; . \; . \; . + n_k \, p_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \; . \; . \; . \; . \; . + n_k} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \; . \; . \; . \; . \; m_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \; . \; . \; . \; . \; n_k}$$

Aus dem Verhältnisse dieser beiden Factoren ergibt sich nun endlich auch Werth des durchschnittlichen Verlässlichkeits-Coëfficienten W, welcher für weitere Untersuchung dieses Gegenstandes von Belang ist.

Da es sich nämlich darum handelt, zu ermitteln, wie vielmal ein bestimmtes igniss im Durchschnitte bei der Summe aller vorhandenen Versuchsfälle tritt, so wird die allgemeine Form 1) für den durchschnittlichen Verlässkeits-Coëfficienten hier zur Anwendung gelangen, u. z. ist

$$W = \frac{N!}{M! \, (N-M)!} \, P^M . (1-P)^{N-M}$$

rin die Grössen N und M auf das statistische Gesammtmateriale Bezug en, indem $N = n_1 + n_2 + n_3 \; . \; . \; . \; . \; .$

Aus dieser Form lässt sich aber M nicht darstellen, weshalb zu nachgendem Auskunftsmittel Zuflucht genommen werden muss. Auf Grund hematischer Betrachtung lässt sich nämlich constatiren, das für w nach Form 1), der Näherungswerth

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \, e^{-\alpha^2 x^2}$$

, wobei der Werth von α in der Relation

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2 \, np \, (1-p)}}$$

zur Darstellung gelangt, während $x = np - m$ ist. Durch Elimination der W
x und α gelangt man füglich zu der Relation

$$5) \qquad m = np \pm \sqrt{2\, np\, (1-p)\, log.\, nat\, w.\, \sqrt{\pi}.\, 2\, np\, (1-p)}$$

welche für die Form 4) entsprechend zur Anwendung gebracht werden k
Aus dieser Relation ergeben sich nun folgende Conclusionen: Da nach ol
Aufstellung $m = np - x$ ist, so muss daraus gefolgert werden, dass der Wu
Ausdruck in der Formel 5) mit x identisch ist, das heisst m zwischen np
und $np + x$ sich bewegt. Demnach erscheint auch der Verlässlichkeits-Coëfficie
innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen und lässt sich infolgedessen d
das bestimmte Integrale

$$6) \ldots \quad w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathbf{e}^{-t^2} . \, dt$$

darstellen, worin $t = \alpha x$ die Werthgrenze bezeichnet. Der Werth d
Integrales ist für die verschiedenen Werthe von t tabellarisch berechnet
kann daher als numerisch bekannte Function von t betrachtet werden.

Wendet man nun diese Resultate auf den durchschnittlichen Verlässlich
Coëfficienten W an, so lässt sich dann auch constatiren, wie oft auf G
des statistischen Gesammtmateriales das Eintreten bestimmter Gesa
Ereignisse erwartet werden kann, d. h. wie gross der Werth M sich ges
und innerhalb welcher Grenzen sich dessen mathematische Zuverlässig
bewegt.

Was nun das Wesen der beobachteten Ereignisse in der Unfallversi
rung hinsichtlich der Verschiedenheit ihres Schadeneffectes anbelangt, so
sich die Theorie der zusammengesetzten Wahrscheinli
keiten auch in diesem Sinne entsprechend anwenden, insoferne die F
wirkungen der Unfälle (temporäre Arbeitsunfähigkeit, partielle oder t
Invalidität und Tod) eine vollständige Unterscheidung, respective Tren
der Ereignisse nach ihrer jeweiligen Beschaffenheit bedingen.

Hinsichtlich der Berücksichtigung der unterschiedlichen Berufskateg
ist hingegen eine abgesonderte Behandlung des statistischen Materials
Gründen einer allzugrossen Complication der Rechnung von vornherein geb

Das Ergebniss unserer Untersuchung ist daher eine methodische Zusam
fassung unterschiedlicher empirischer Fragmente zu einem einheitlichen sta
schen Materiale, dessen systematische Anwendung für eine versicheru
technische Grundlage hiedurch auf kurzem Wege ermöglicht wird. Wir gla
späterhin auch in der Lage zu sein, mittelst praktischer Anleitung auf
Wesen dieser Methode näher einzugehen und den Anforderungen einer bess
Erläuterung Genüge zu leisten.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

III.

Die bisherigen Ausführungen in dieser Frage behandelten durchwegs
en Fall des steigenden Gewinnantheiles, welcher während der gesammten
uer der Versicherung zur Geltung gelangt und solchermassen auf die Höhe
Prämie bis zum Fälligwerden der Versicherungssumme seinen Einfluss aus-
. Um nun auch den sonstigen Anforderungen in dieser Beziehung Rechnung
tragen, wollen wir nunmehr auf die verschiedenen anderen möglichen Formen
ses Systemes eingehen.

Diesfalls mag in erster Linie jener Modus in Betracht gezogen werden,
die zeitliche Einstellung des steigenden Gewinnantheiles nach einer
immten Dauer der Prämienzahlung vorausgesetzt, und solchermassen
hrend der restlichen Dauer der Versicherung von einer Steigerung des
innantheiles abgesehen wird.

Diese Combination wird eine Ermässigung der Jahresprämien durch den
innantheil blos bis zu einer beliebigen Grenze bedingen, indem nach Mass-
der jeweiligen Voraussetzungen die Steigerung des Gewinnantheiles blos
einen im Vorhinein bestimmten Theil der Versicherungsperiode stipulirt
. Im weiteren Verlaufe der Versicherung jedoch wird die Prämie gleich-
sig in jenem Niveau weiter verlaufen, auf welches dieselbe durch die letzte
gerung des Gewinnantheiles gebracht wurde.

Hiedurch ergibt sich der besondere Vortheil, dass die Jahresprämie wohl
und nach durch den Anfangs steigenden Gewinnantheil eine ausgiebige
ässigung erfährt, jedoch auf einem bestimmten Punkte angelangt, gleich-
ig weiter verlauft und somit in ihrem späteren Ausmasse keine allzugrosse
ction erleidet. Andererseits ist aber auch die Anfangsprämie durch den
die Gewinnantheil-Leistung der Versicherungsbank nöthigen Prämien-
hlag nur einer mässigen Erhöhung unterworfen, so dass auch ein sanfterer
uf derselben nach Abwärts mit dieser Combination verbunden ist; wie
an den Versicherten zu Beginn der Versicherung bedeutend mässigere
rderungen gestellt werden können, ohne die Gesammtvortheile dieses
emes für die Lebensversicherung zu tangiren.

Der Umstand, dass durch die zeitliche Einstellung der Steigerungsfähigkeit
Gewinnantheiles die Ansprüche an die Versicherungsbank limitirt werden
umgekehrt die Anforderungen an den Versicherten in den ersten Jahren der
icherungsperiode minder drückend sich gestalten, liefert auch in acqui-
ischer Beziehung einen besonderen Vortheil, insoferne bei der gemischten
icherung die Prämienzahlungs-Periode keine allzulange ist und deshalb
die Erwerbsfähigkeit nicht Gefahr läuft, jene Abnahme zu erleiden, um

eine allzu bedeutende Ermässigung der Prämie in den späteren Jahren n wendig zu machen. Es genügt schon, wenn die spätere Prämie das Niveau normalen Nettoprämie erreicht, um in ausgiebiger Weise den gestellten An derungen der Minderbelastung im höheren Alter zu entsprechen. Hied wird es möglich, eine Garantie des zu gewährenden Gewinnantheiles in sicht zu nehmen, wodurch die Zweckmässigkeit dieser Combination für Versicherten bedeutend erhöht wird.

Auf diese Weise wird einerseits der Anforderung einer mit der abneh den Erwerbsfähigkeit des Menschen im Einklange stehenden Prämienabstu Genüge geleistet, andererseits aber das Mass der Leistung des Versiche auf jener Höhe erhalten, welche der Bedingung entspricht, durch den Ein des erforderlichen Zuschlages die anfängliche Jahresprämie nicht allzusch belasten.

Es wird hier dem praktischen Gutachten des Assureurs genügender S raum gelassen, um die Dauer der Gewinnantheil-Steigerung derart zu beme dass die in Betracht zu ziehenden Vortheile des Gewinnantheiles für den sicherten weder zu gering ausfallen, noch die hiedurch sich ergebende succe Reduction der Jahresprämien das Mass der Zulässigkeit soweit übersteigt, dieselbe gewissermassen einer Unterbietung der Erwerbsfähigkeit des sicherten gleichkommt, zugleich dessen Anfangsleistung in unverhältnissmä Weise in Anspruch nehmend.

Deshalb wird es nothwendig sein, sich hier neben dem Percentsatz steigenden Gewinnantheiles auch die Gesammtdauer der Versicherung Augen zu halten, um deren Theilperiode des steigenden Gewinnantheiles dem Minimal-Ausmasse der späteren reducirten Jahresprämien mathema derart in Einklang zu bringen, dass die Vortheile nach der einen und and Seite hin sich das Gleichgewicht halten, indem einerseits die Bedingung Stabilität der Versicherung wie auch der Amortisation des Risikos entsprec erfüllt wird, andererseits aber auch dem Umstande einer mässigen Belas der Anfangsprämien Rechnung getragen werden kann. Aus diesem Gr wird die Theilperiode des steigenden Gewinnantheiles nicht unter die H der gesammten Prämienzahlungsdauer sinken dürfen, da hiedurch die Besch heit der in Aussicht gestellten, erst später zur Geltung kommenden Vor für den Versicherten, welche in diesem ein besonderes Interesse an der rechterhaltung der Versicherung wachrufen, und auf diese Weise deren er Stabilität erzeugen sollen, eine Verschiebung in ihrem fördernden Ein erleiden würde, abgesehen von der auch sonst sich geltend mach Wirkung in dem Sinne, dass neben der Absorbirung des zu stipulir Zuschlages eine viel zu geringe Ermässigung der Normalprämie ein würde. Daraus ist ersichtlich, dass auf eine ausgiebige Ermässigung der Pr mit Hilfe des steigenden Gewinnantheiles innerhalb einer kürzeren I besondere Rücksicht zu nehmen sein wird; und zwar unter Aufrechterhal des Standpunktes eines möglichst geringen Prämienzuschlages. Dieser Ums macht es erklärlich, dass auch hier eine eventuelle Verschiebung des Vi

rdens der ersten Gewinnantheilquoten von nicht geringem Werthe für die reichung dieses Zweckes sein dürfte, umsomehr als mit dem verschobenen lligwerden des ersten Gewinnantheiles das Wesen der Prämien-Ermässigung unverändertes bleibt, hingegen die in diesem Falle wegfallenden Gewinntheilquoten eine Entlastung des Prämienzuschlages zur Folge haben müssen.

Das System des temporär steigenden Gewinnantheiles, wie wir sen speciellen Modus nennen wollen, wurde ebenfalls in dem bereits nannten, dieses Thema behandelnden Aufsatze: „Theorie und Lösung r irreductibelen transcendenten Gleichungen und deren wendung zur Berechnung einiger Assecuranzcombinationen“ Darstellung gebracht, nur war dasselbe ausschliesslich auf die einfache desfallversicherung angewendet, indem die Steigerung des Gewinnantheiles s auf eine bestimmte Dauer der Prämienzahlung beschränkt, die weiteren ämien jedoch mit dem auf diese Art sich ergebenden höchsten Gewinntheile gleichmässig bedacht wurden. Insbesondere bei der Todesfallverherung mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer konnte dieser Modus in rtheilhafter Weise zur Geltung kommen, indem hier die Steigerung des ewinnantheiles blos während eines Theiles der Prämien-Zahlungsfrist in tracht gezogen und solchermassen eine allzugrosse Reduction der weiteren ämien verhindert wurde.

Allerdings war in dem genannten Aufsatze blos die Eventualität eines on von Beginn der Versicherung an fälligwerdenden Gewinnantheiles in tracht gezogen, hingegen auf den speciellen Fall des Wegfalles der Gewinntheile in den ersten Jahren gar nicht reflectirt worden. Da nun insbesondere ser letztere Modus in der praktischen Handhabung der Lebensversicherung onderen Anklang findet, umsomehr, als die meritorische Seite desselben aus eits hervorgehobenen Gründen eine grössere Würdigung verdient, so unterimen wir es, auf Grundlage der von uns seinerzeit aufgestellten Formen, entsprechende Modification derselben in diesem Sinne durchzuführen. Zu sem Behufe mag vor allen Dingen nochmals die Aufstellung jener Formen ursprünglichen Sinne erfolgen, d. h. für den Fall, als die Gewinnantheile ich nach Ablauf des ersten Versicherungsjahres flüssig zu werden beginnen. gleich soll auf eine bestimmte Anzahl zu leistender Prämien, wie dies bei gemischten Versicherung einerseits und der Todesfallversicherung mit gekürzter Prämienzahlungsdauer andererseits der Fall ist, als grundlegende dingung Gewicht gelegt werden und zwar im Gegensatze zu den seinertigen Ausführungen, in welchen die durch die Grösse w_t ausgedrückte lebenswahrscheinlichkeit für das jeweilige Beitrittsalter t allein die Grundge für die in Rechnung zu bringende Prämien-Zahlungsfrist bildete und ichermassen blos eine wahrscheinliche Prämienzahlungsdauer angenommen rden konnte.

Bezeichnen wir daher mit n die Anzahl jener Prämien, welche eines ch steigenden Gewinnantheiles theilhaftig werden sollen, während di rhinein bestimmte Gesammtzahl der zu leistenden Prämien überh

durch die Grösse g dargestellt werden mag. Im Uebrigen werden wir die zeichnungen der jeweiligen in Rechnung gelangenden Werthe unveränd beibehalten; so dass N die Prämie, $M = 100\ m$ den Gewinnantheil-Perce satz, $P = 100\ p$ den der Rechnung zu Grunde gelegten Zinsfuss und k percentuellen Zuschlag zur Prämie bedeutet. Auf Grund dessen werden da bei einer diesem Modus entsprechenden Versicherung, welche durch Anzahl von g zu leistender Jahresprämien bedingt ist, während n Jah steigende und während der weiteren $g-n$ Jahre gleichmässige Gewi antheile (im Ausmaasse des letzten steigenden) flüssig werden, so dass Versicherungs-Periode in zwei Theile zerfallen wird, von denen der erste mit einem nach Ablauf des ersten Versicherungsjahres beginnenden und dur n Jahre fortlaufenden, im Verhältniss zur gezahlten Prämien-Anzahl steige den Gewinnantheile, der zweite Theil der Versicherungs-Periode hingeg durch eine im Ausmaasse des höchst gestiegenen Gewinnantheiles zur Geltu kommende gleichmässige jährliche Prämien-Rückvergütung ausgestattet se wird.

Für diesen Fall mag nun allgemein der percentuelle Zuschlag k z Jahresprämie ermittelt werden. Um also hier zum Resultate zu gelange müssen wir vor allen Dingen die Gesammtsumme der Gewinnantheile z ermitteln suchen und zwar wird einerseits die Summe der steigenden Gew antheile durch die bekannte Form 1) zum Ausdrucke gelangen

$$G_n = m \,.\, N\left(\frac{1+p}{p}\,\frac{(1+p)^n-1}{p} - \frac{n}{p}\right)$$

andererseits die Summe der während des übrigen Zeitraumes der Versicheru $g-n$ sich ergebenden gleichmässigen Gewinnantheile durch die Form

$$G_{(g-n)} = \frac{m \,.\, N \,.\, n\,[(1+p)^{g-n-1} - 1]}{p}$$

als nachschussweise Jahresrente in der Dauer von $g-n-1$ Jahren in ihre Endcapital zur Geltung kommen.*)

Die Summe sämmtlicher Gewinnantheil-Quoten ergibt sich in Folge dess wenn G_n ebenso wie dies bei $G_{(g-n)}$ der Fall, auf den Zeitpunkt der letzt Prämienleistung aufgezinst wird, in der Form

$$9)\qquad G_g = G_n \,.\, (1+p)^{g-n-1} + G_{(g-n)}$$

welche sich nach vollzogener Substitution folgendermassen gestaltet:

$$G_g = m \,.\, N \,.\left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p}\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p} - n\,.\,\frac{(1+p)^{g-n-1}}{p} + n\,\frac{(1+p)^{g-n-1}}{p} - \frac{n}{p}\right]$$

schliesslich die Form

$$10)\qquad G_g = m \,.\, N\left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p}\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p} - \frac{n}{p}\right]$$

nach durchgeführter Vereinfachung annehmend.

---

*) **Hier entfällt gleichfalls wie bei den früheren Fällen der Gewinnantheil i *letzten* Versicherungsjahre, so dass anstatt $g-n$ Gewinnantheile, sich deren Ma *$g-n-1$* ergeben.**

as Wesen der Prämienpfandbriefe und deren Bedeutung für den Boden- und Hypothekarcredit.

Im Wesen des öffentlichen Credites bildet die Ausstattung der Schuld-
ligationen mit der Gewinnsthoffnung ein geeignetes Mittel, um die Contra-
rung eines Darlehens unter günstigeren Bedingungen durchzuführen, als dies
nst unter gewöhnlichen Voraussetzungen möglich ist. Die Gewinnstchance
rleiht dem Schuldscheine einen ausserhalb des Rahmens des finanziellen
lcüls liegenden eingebildeten Werth, welcher auf die Schichten des anlage-
dürftigen Volkscapitales eine besondere Anziehungskraft ausübt und solcher-
ssen nicht nur die Classirung eines derartig systemisirten Darlehens in
hem Masse begünstigt, sondern auch den Verbleib der beziehungsweisen
huldtitres in festen Händen bewirkt.

Der Uebergang deren Besitzes von einer Hand in die andere ist im
rhältniss zu jenem der Schuldobligationen, welche einer solchen Combi-
tion entbehren, ein ungemein beschränkter, weil der Besitzer im Falle der
räusserung sich der Angst nicht entschlagen kann, gerade jene Obligation
va mitveräussert zu haben, auf welche vielleicht ein grösserer Treffer ent-
len könnte. Diese Eigenschaft der mit grösseren Treffern ausgestatteten
losbaren Schuldobligationen bewirkt die Möglichkeit günstigerer Darlehens-
lingungen für den Schuldner, indem die Gewinnstchance auf Kosten des
st üblichen Zinsfusses bewerkstelligt, eine ausgiebige Reduction desselben
tattet. Dieser Vortheil wird nun auch zu Gunsten eines niedrigen Zins-
ses möglichst ausgenützt und so gestalten sich die Darlehensbedingungen
den Contrahenten in diesem Falle meistens höchst annehmbar, insbesondere
in auch die Securität hier einen angemessenen hohen Begebungscours
isst.

Besondere Bedeutung erlangt das Wesen der Gewinnsthoffnung bei Pfand-
fen, da dieselben einer starken Concurrenz von Seite der Staatsrenten-
igationen ausgesetzt sind und in Folge dessen immer vom Neuen Gefahr
en, aus ihrer etwa errungenen Position verdrängt zu werden. Insolange
Zinsfuss der Staatsrenten sich annähernd auf jenem Niveau erhält, welcher
Durchschnitte dem Pfandbriefe zugrunde gelegt ist, muss ein fortwährendes
wanken des Capitals zwischen diesen beiden Anlageformen sich geltend
chen. Die Ursache hievon liegt einerseits in der leichteren Beweglichkeit
in Staatsrenten angelegten Capitales, andererseits auch in dem Umstande,
s das Capital bei Pfandbriefen durch gewöhnliche Auslosung leicht aus
ner Verzinsungsposition geworfen werden kann. Diese Wahrnehmung w
ber *auch vielfach*, insbesondere in Frankreich, Belgien und der Schweiz

einer Ausdehnung der Darlehenstilgungsfrist geführt,*) welche eine gr
Stabilisirung des Pfandbrief-Umlaufes gewährt. Aber noch andere Vor
sind mit der Einrichtung einer längeren Tilgungsfrist verbunden. Inden
Annuität auf diesem Wege eine Reduction zulässt, wird der Hypoth
schuldner in viel geringerem Maasse belastet, als dies bei kürzerer Tilgung
der Fall ist, wodurch eine bessere Securität der Simultanhypothek gesch
und auf diese Weise eine günstigere Position gegenüber der Staatsrente e
werden kann; abgesehen davon, dass der Boden- und Hypothekarcredit
sonst eine grössere Stabilität erlangt. Ueberdies winken unter solchen Umst
auch dem Bodencredit-Institut bessere Bedingungen für dessen Prosperität,
die Provision, ohne geschmälert zu werden, auf längere Zeit gebunden

Berücksichtigt man ferner, dass beim Hypothekar-Darlehen die Pro
nicht von der Annuität, sondern nur von den Zinsen allein berechnet ist, so e
sich, dass im selben Masse, als die Tilgungsfrist eine längere ist und in
dessen das Darlehenscapital eine langsamere Abnahme erleidet, auch die
des Zinsenertrages und damit auch die Höhe der jährlichen Provision ein
stantere werden muss. Die Ausdehnung der Tilgungsfrist auf eine so
Dauer hat jedoch andererseits wieder allerlei Uebelstände im Gefolge, w
zum Theile der Entwerthung der Hypothekar-Pfandobjecte durch deren
und der Veränderung des Bodenwerthes, zum Theile der Indispositio
Darlehenscontrahenten, eine Verpflichtung auf eine ein Menschenalter
steigende Frist einzugehen, entspringen. Aus diesem Grunde sucht man
anderem Wege die Umlaufsfähigkeit der Pfandbriefe zu heben und is
Allgemeinen der Modus der Verlosung verbunden mit grösseren Treffer
der geeignetste anerkannt, um diesen Zweck zu erfüllen. Von besond
Belange ist hier der Umstand, dass der Werth der Lospfandbriefe die Eig
besitzt, durch die steigende Gewinnstchance sich stetig zu erhöhen, wo
sich der Vorzug erklärt, welchen dieselben auch in ernsten finanziellen Kr
gegenüber gewöhnlichen Pfandbriefen geniessen. Der geringe Besitzwe
derselben beim anlagebedürftigen Capitale fördert auf diese Weise auch d
Umlauf im allgemeinen Verkehre. Indem hier ferner die Gewinnstchance
Kosten des Zinsfusses stipulirt werden kann, erleidet der erforderliche Zi
Aufwand nicht nur keine Vermehrung, sondern lässt sogar infolge des e
bildeten Mehrwerthes der Gewinnstchance eine mässige Reduction zu.

Unter diesen Umständen ist es aber geboten, die zu diesem Zwecke e
derliche Inanspruchnahme der nominellen Verzinsung entsprechend zu
schränken, da die der höheren Umlaufsfähigkeit dienende Treffercombin
mit ihrem Erforderniss nicht allzusehr die eigentliche Aufgabe des Pfandbr
als Anlagepapier tangiren darf. Deshalb mag es in jenen Fällen, wo
ungünstige Beeinflussung durch die Tilgungs-Form nicht vermieden we
kann und die Möglichkeit einer allzugrossen Belastung durch die Doti

*) Während bei uns die Umlaufsdauer der Pfandbriefe sich auf 30—50 Jahre bel
beträgt dieselbe in Frankreich 90 und auch über 100 Jahre, und zwar der Tilgungs
der Darlehen entsprechend.

er Treffer gegeben ist, zweckmässiger erscheinen, auf einen anderen Modus überzugehen, welcher in seiner Beschaffenheit eine ähnliche Wirkung auf die Umlaufsfähigkeit der Titres ausübt, jedoch die zur Verfügung stehenden Mittel in weit geringerem Masse in Anspruch nimmt. Es ist dies die Combination der Verlosung mit kleineren Prämien, welche nicht nur eine langsamere Tilgung gestattet, vielmehr aus derselben den Vortheil einer besseren Dotirung der Prämien zieht. Indem also diese Form der hinausgeschobenen Tilgung eine stabilere Anlage gewährt, gestattet sie zugleich die Ausnützung dieses Umstandes noch in der Weise, dass der für die Prämien zur Verfügung stehende Fond durch Verzinsung sich vergrössern kann und daher in gleichem Masse, als die Tilgung langsamer sich vollzieht, der nothwendige Aufwand für die Dotirung der Prämien sich reduciren lässt. Von Bedeutung ist in dieser Hinsicht also die Einrichtung eines steigenden Verlosungsplanes in jenem Sinne, dass die Tilgung in den ersten Jahren der Tilgungsperiode eine langsame bleibt und erst in den letzten Jahren einen rascheren Verlauf nimmt. Auf diese Weise wird der Vortheil einer längeren Aufzinsungs-Periode für den Prämienfond erzielt und solchermassen die Möglichkeit geboten, die Prämie selbst ebenfalls in aufsteigendem Sinne zu stipuliren, wodurch zugleich dem Zwecke, auch das Coursniveau der Titres nach und nach zu heben, Genüge geleistet werden kann.

Die Combination der steigenden Prämien besitzt gegenüber denjenigen der gleichbleibenden Prämien auch sonst noch den Vorzug, die Umlaufsfähigkeit der Titres in höherem Maasse zu fördern, was umsomehr hier in's Gewicht fällt, als die Einrichtung der Verlosung mit kleinen Prämien in dieser Beziehung ohnehin gegen die Combination mit grossen Treffern zurückbleibt. Ueberhaupt ist es vortheilhaft, den Modus der kleinen Prämien derart zu stipuliren, dass im gleichen Verhältnisse mit der Länge des Besitzes auch die Begünstigungen zunehmen, welche aus demselben entspringen. Bei der Combination mit grösseren Treffern gelangt dieses Princip in der Weise zum Ausdrucke, dass die Zahl der an der Ziehung betheiligten Titres stetig abnimmt und sich in Folge dessen die Spielchance continuirlich vergrössert, vorausgesetzt, dass dies nicht etwa durch Ausgabe von Gewinnst-Scheinen vereitelt wird. Dagegen mangelt ein solcher Factor bei der Combination mit kleinen Prämien nahezu vollständig, da die zunehmende Wahrscheinlichkeit des Gezogenwerdens mit einer geringen Prämie kaum in Betracht kommen kann, weshalb hier eine künstliche Steigerung der mit dem Besitze der Titres verbundenen Begünstigungen oportun ist.

Dagegen vermag die Combination mit kleinen Prämien den Intentionen des Bodencredit-Institutes in Bezug auf den nominellen Zinsfuss nicht vollends zu entsprechen, da die mit derselben verbundene Verzinsung stets höher gehalten werden muss, als diejenige, welche mit der Combination grösserer Treffer zulässig ist; insofern im letzteren Falle mit der Spielchance auch deren gebildeter Mehrwerth eine Rolle spielt und in Folge dessen eine mässige Reduction des Verzinsungsniveaus gestattet.

Es wird daher stets lieber zu der mit grösseren Treffern combi Form gegriffen, weil dieselbe auch sonst eine grössere Gewähr bietet Nachfrage des anlagebedürftigen Capitales rege zu erhalten und überdie sinkenden Tendenz des Zinsfusses im Allgemeinen Rechnung trägt, den sequenzen derselben in geeigneter Weise vorgreifend, was angesicht ohnehin zusehends in Abnahme begriffenen Bodenrente nur von erspriess Folgewirkung sein kann, weil auf diese Weise ein grösserer Spie für eine entsprechende eventuelle Reduction auch des Darlehenszins geschaffen und solchermaasser eine Anpassung an etwa eintretende zukü Zinsfussverhältnisse vorbereitet wird.

Hiedurch wird die Möglichkeit geschaffen, dem sich von Zeit zu äussernden Conversions-Bedürfnisse des Schuldners auf einfachem Rechnung zu tragen, und was sonst beim gewöhnlichen Pfandbriefe nur Ausgabe neuer minder hoch verzinslicher Pfandbrief-Kategorien durchfü erscheint, lässt sich hier ohneweiters durch einen neu zu vereinbarenden fuss des contrahirten Hypothekardarlehens direct bewerkstelligen, sobald Bedingungen hiefür gegeben sind.

Unter etwa neu gegebenen Verhältnissen der V zinsungs-Ansprüche des Capitales im reducirten Si ist unter der Voraussetzung entsprechender Vorbeh bei Stipulirung der Tilgungsbedingungen die M lichkeit geboten, die Tilgungsfrist unter Bei haltung der Trefferanzahl auf eine längere Da hinauszuschieben, wodurch eine künstliche Red tion der Verzinsung bewirkt wird, welche die A gabe neuer minder verzinslicher Pfandbriefe Conversionszwecken überflüssig macht.

Durch Ausdehnung der Tilgungsfrist ohne Vermehrung der Treffer die zur Dotirung derselben bestimmte Quote einer längeren Verzin unterworfen, demzufolge sich ein das Erforderniss übersteigender ansammelt, dessen Ueberschuss der Verzinsung der Pfandbriefe zugewe werden kann, wodurch der präliminirte Verzinsungs-Aufwand eine Redu erfährt. Auf diese Weise vollzieht sich hier im Rahmen einer durch Vorbe bedingten Massnahme eine Conversions-Action, welche in ihren Consequen den gleichen Zweck erfüllt, wie eine eigens veranstaltete Neuemission Pfandbriefen mit reducirtem Zinsfusse.

Solchermassen gestaltet sich die Ausstattung der Pfandbriefe mit e Gewinnstchance vortheilhaft nach allen Richtungen hin, indem dieselbe n blos hinsichtlich der Umlaufsfähigkeit und der Werthbestimmung dersel einen günstigen Einfluss ausübt, sondern auch bezüglich deren Rentabil eine relativ grössere Dehnbarkeit gewährt, als dies bei gewöhnlichen Pfa *briefen* der Fall ist. In Folge dessen bildet diese Einrichtung heute eine wer *volle Handhabe* für die Beweglichkeit des Boden- und Hypothekarcredites

---

...ch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

IV.

Nachdem in der vorigen Abhandlung die Summe sowohl aller steigenden ...ch gleichmässig verlaufenden Gewinnantheile einer Versicherungs-Periode ... die Form 10) zur Darstellung gelangte, soll nun deren Werth in eine ...chussweise Rente*), welche sich als erforderlicher Zuschlag zur Jahres...e präsentirt, umgewandelt werden. Diesem Zwecke wird nachstehende ...el entsprechen:

$$G_g = k \,.\, N \,.\, \frac{(1+p)^g - 1}{p}$$

...e, mit dem Ausdrucke 10) in Verbindung gebracht, die Form für den ...tuellen Zuschlag k liefert:

$$k = m \,.\, \left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p} \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p)^g - 1} - \frac{n}{(1+p)^g - 1}\right]$$

...em gleichen Resultate gelangt man auch auf anderem Wege. Wird ...ch das Wesen des temporär steigenden Gewinnantheiles derart aufgefasst, ...s als Differenz zwischen zweien, zu verschiedenen Zeiten beginnenden ...is zu einem bestimmten gemeinsamen Zeitpunkte verlaufenden Kategorien ...teigenden Gewinnantheilen betrachtet wird, so lässt sich dieselbe in ...de, diesem Umstande entsprechende Form bringen:

Nach Form 4) der vorigen Abhandlung besitzt der allen successive fällig ...nden, steigenden Gewinnantheilen entsprechende Gesammtwerth G, unter ...gfall der letzten Gewinnantheilquote, den Werth

$$G = m\, N \left(\frac{1+p}{p}\, \frac{(1+p)^{n-1} - 1}{p} - \frac{n-1}{p}\right)$$

...en Zeitraum von g Versicherungsjahren lautet dies bei steigendem Gewinn...ile während der ganzen Dauer:

$$G_1 = m\, N \left(\frac{1+p}{p}\, \frac{(1+p)^{g-1} - 1}{p} - \frac{g-1}{p}\right)$$

...nn nach n Jahren die Steigerung der weiteren Gewinnantheile unter...n, so genügt es, die weiteren $g-n$ Steigerungsquoten von der Form 14) in ...g zu bringen, deren Summe sich analog in nachstehende Form zusammen... lässt:

$$G_2 = m \,.\, N \,.\left(\frac{1+p}{p}\, \frac{(1+p)^{g-n-1} - 1}{p} - \frac{g-n-1}{p}\right)$$

*) Im Grunde genommen müsste wohl hier eine vorschussweise Rente in Rech... gelangen, weil die Prämien im Vorhinein gezahlt werden, da jedoch der Werth G_g ...n Zeitpunkt der letzten Prämienzahlung gilt, daher eine Aufzinsung desselben im ... Versicherungsjahre entfällt, so muss eine nachschussweise Rente in Betracht ...en.

Der Werth G_g wird daher auch durch die Differenz $G_1 - G_2$ zum Ausdr gelangen, welche nach durchgeführter Substitution thatsächlich mit dem drucke 10) identisch wird. Unter Hinzuziehung der Formel 11) gelangt endlich auch zu dem in Form 12) dargestellten Ausdrucke.

Die Form 12) entspricht also der Beantwortung folgender Frage: hoch ist der percentuelle Prämienzuschlag k für eine Versicherung, für w die Zahlung von g Jahresprämien vorgesehen ist zum Zwecke eines M^0 während n Jahren jährlich steigenden und von da ab in den weiteren Jahren gleichmässig verlaufenden jährlichen Gewinnantheiles, welcher nac lauf des ersten Jahres der Versicherung flüssig zu werden beginnt, und so, dass derselbe nach dem ersten Jahre $M\%$, nach dem zweiten $2 . M\%$, dem dritten $3 . M\%$ beträgt, bis er die Höhe von $n . M\%$ erreicht, um v ab in diesem Ausmasse gleichmässig bis zur letzten Prämienzahlung zu laufen.

In nachfolgenden Zahlen mögen die Resultate dieser Aufgabe in wichtigsten Specialfällen zur Anschauung gebracht werden. Bei Zug legung eines Zinsfusses von 4 Percent ergeben sich für den percent Prämienzuschlag k unter nachstehenden Suppositionen betreffs der Ges dauer der Prämienzahlung g und der Dauer der Gewinnantheil-Steige folgende Werthe:

für $g = 15$ und $n = 8$ wird $k = 5{\cdot}151 . m$
$g = 20$ „ $n = 10$ „ $k = 6{\cdot}533\ m$
$g = 25$ „ $\begin{cases} n = 10 \\ n = 15 \end{cases}$ „ $k = 6{\cdot}977 . m$; „ $k = 8{\cdot}736 . m$

Demgemäss erhält man unter Voraussetzung eines 2%igen temporär stei Gewinnantheiles, d. i. für $M = 100\ m = 2$, als percentuellen Zuschl Prämie

für $g = 15$ und $n = 8$ $k = 10{\cdot}302\%$
$g = 20$ „ $n = 10$ $k = 13{\cdot}066\%$
$g = 25$ „ $\begin{cases} n = 10 \\ n = 15 \end{cases}$ $k = 13{\cdot}954\%$; $k = 17{\cdot}472\%$
} der Jahres Prämie be 4%igem Zinsfusse.

hingegen unter Voraussetzung eines 3%igen temporär steigenden Gew theiles, d. i. für $M = 100\ m = 3$, die Werthe:

für $g = 15$ und $n = 8$ $k = 15{\cdot}453\%$
$g = 20$ „ $n = 10$ $k = 19{\cdot}599\%$
$g = 25$ „ $\begin{cases} n = 10 \\ n = 15 \end{cases}$ $k = 20{\cdot}931\%$; $k = 26{\cdot}208\%$
} der Jahres Prämie be 4%igem Zinsfusse.

Unter Zugrundelegung eines $3^1/_2\%$igen Zinsfusses gestalten sich die Re in folgender Weise:

für $g = 15$ und $n = 8$ wird $k = 5{\cdot}207 . m$
$g = 20$ „ $n = 10$ „ $k = 6{\cdot}616 . m$
$g = 25$ „ $\begin{cases} n = 10 \\ n = 15 \end{cases}$ „ $k = 7{\cdot}082 . m$; „ $k = 8{\cdot}963 . m$

Demnach erhält man unter Voraussetzung eines 2%igen temporär stei Gewinnantheiles, d. i. für $M = 100\ m = 2$ als percentuellen Zuschl Prämie:

für $g = 15$ und $n = 8$ $k = 10{\cdot}414\%$ | der Jahres-Prämie bei $3\frac{1}{2}\%$igem Zinsfusse,
$g = 20$ „ $n = 10$ $k = 13{\cdot}232\%$
$g = 25$ „ $n = 10$ $k = 14{\cdot}164\%$
$g = 25$ „ $n = 15$ $k = 17{\cdot}926\%$

d schliesslich für einen 3%igen temporär steigenden Gewinnantheil, d. i. nn $M - 100\, m = 3$ angenommen wird:

für $g = 15$ und $n = 8$ $k = 15{\cdot}621\%$ | der Jahres-Prämie bei $3\frac{1}{2}\%$igem Zinsfusse,
$g = 20$ „ $n = 10$ $k = 19{\cdot}848\%$
$g = 25$ „ $n = 10$ $k = 21{\cdot}246\%$
$g = 25$ „ $n = 15$ $k = 26{\cdot}889\%$

Im Weiteren wollen wir nun zur Aufstellung jener Form schreiten, welche den percentuellen Prämienzuschlag gilt, aus welchem ein temporär steigender winnantheil bestritten werden soll, dessen Fälligkeit erst nach dem $a$ten re der Versicherung eintritt, während die bis dorthin sich sonst rechnungsssig ergebenden steigenden Gewinnantheile gänzlich entfallen.

Um diesbezüglich zum Resultate zu gelangen, wird ähnlich wie in den igen Abhandlungen vorgegangen werden müssen, indem die Summe der zum $a$ten Jahre reichenden, steigenden Gewinnantheile, aufgezinst bis n Zeitpunkte der letzten Prämienzahlung von der Gesammtsumme G_g in zug gebracht wird. Demnach ergibt sich für diesen Fall

$$= m.N\left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p}\cdot\frac{(1+p)^n-1}{p}-\frac{n}{p}-(1+p)^{g-a-1}\cdot\left(\frac{1+p}{p}\,\frac{(1+p)^a-1}{p}-\frac{a}{p}\right)\right]$$

l nach vollzogener Vereinfachung

$$G'_g = m\,.\,\mathrm{N}\left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p}\cdot\frac{(1+p)^{n-a}-1}{p}+\frac{a(1+p)^{g-a-1}-n}{p}\right]$$

cher Ausdruck schliesslich durch Verwandlung in eine vorschussweise Rente nalogem Sinne wie im vorhergehenden Falle, für den percentuellen Zuschlag Jahresprämie den Werth

$$k = m\,.\left[\frac{(1+p)^{g-n}}{p}\cdot\frac{(1+p)^{n-a}-1}{(1+p)^g-1}+\frac{a(1+p)^{g-a-1}-n}{(1+p)^g-1}\right]$$

ert, der allgemein für den Fall eines temporär steigenden winnantheiles, dessen Fälligkeit erst nach a Jahren s Versicherungsbestandes eintritt, Giltigkeit besitzt.

Mit der Form 17) ist daher folgende Frage beantwortet: Wie hoch ist percentuelle Prämienzuschlag k für eine Versicherung, bei welcher die lung von g Jahresprämien vorgesehen ist, zum Zwecke eines $M\%$igen rend n Jahren jährlich steigenden, und von da ab in den weiteren $g-n$ ren gleichmässig verlaufenden jährlichen Gewinnantheiles, welcher nach auf des $a$ten Versicherungsjahres im Verhältnisse der eingezahlten Prämien sig zu werden beginnt; und zwar so, dass derselbe nach dem $a$ten Jahre $M\%$, nach dem $(a+1)$ten Jahre $(a+1)\,.\,M\%$ u. s. f. beträgt, bis er die he von $n\,.\,M\%$ erreicht, in welchem Ausmaasse derselbe dann bis zur Enthtung der letzten Jahresprämie gleichmässig fortläuft.

Die in Beantwortung dieser Frage sich ergebenden Resultate für d ichtigsten *Specialfälle*, werden also gegenüber den zuvor angeführten

Veränderung in dem Sinne aufweisen, dass die steigenden Gewinnan[theile] für die ersten a Jahre der Versicherung vollständig entfallen und erst [nach] Ablauf des $(a+1)$ten Jahres in der Höhe von $(a+1) \cdot M\%$ flüssig zu w[erden] beginnen.

Unter der Voraussetzung also, dass beispielsweise die steigenden Ge[winn]antheile für die ersten zwei Versicherungsjahre vollständig entfallen, [d. i.] $a = 2$ gesetzt wird, ergeben sich unter Zugrundelegung eines 4%igen [Zins]fusses und nachstehender Suppositionen, für den percentuellen Prämienzuschl[ag] folgende Werthe:

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \text{ wird } k = 4{\cdot}907 \,.\, m \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 6{\cdot}323 \,.\, m \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 6{\cdot}804 \,.\, m \\ n = 15 \quad k = 8{\cdot}615 \,.\, m \end{cases} \end{cases}$$

Dies liefert unter Voraussetzung eines 2%igen temporär steigenden Ge[winn]antheiles, d. i. wenn $M = 100\, m = 2$ angenommen wird,

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \quad k = 9{\cdot}814\% \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 12{\cdot}646\% \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 13{\cdot}608\% \\ n = 15 \quad k = 17{\cdot}230\% \end{cases} \end{cases} \text{der Jahres-Prämie bei } 4\%\text{igem Zinsfusse}$$

und bei Annahme eines 3%igen temporär steigenden Gewinnantheiles, [d. i.] wenn für $M = 100\; m = 3$ supponirt wird,

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \quad k = 14{\cdot}721\% \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 18{\cdot}969\% \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 20{\cdot}412\% \\ n = 15 \quad k = 25{\cdot}845\% \end{cases} \end{cases} \text{der Jahres-Prämie bei } 4\%\text{igem Zinsfusse.}$$

Ebenso erhalten wir unter Zugrundelegung eines $3\frac{1}{2}\%$igen Zinsf[usses] unter sonst gleichen Voraussetzungen für den percentuellen Prämienzuschl[ag] die Werthe:

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \quad k = 4{\cdot}969 \,.\, m \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 6{\cdot}423 \,.\, m \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 6{\cdot}915 \,.\, m \\ n = 15 \quad k = 8{\cdot}797 \,.\, m \end{cases} \end{cases}$$

was unter Annahme eines 2%igen temporär steigenden Gewinnantheiles, [d. i.] wenn $M = 100\, m = 2$ vorausgesetzt wird, nachstehende Werthe liefert, u. [zw.]

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \quad k = 9{\cdot}938\% \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 12{\cdot}846\% \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 13{\cdot}830\% \\ n = 15 \quad k = 17{\cdot}594\% \end{cases} \end{cases} \text{der Jahres-prämie bei } 3\tfrac{1}{2}\%\text{igem Zinsfusse.}$$

Unter Supposition eines 3%igen temporär steigenden Gewinnanth[eiles], d. i. für $M = 100\, m = 3$, ergeben sich die Werthe:

$$\text{für } a = 2 \begin{cases} g = 15 \text{ und } n = 8 \quad k = 14{\cdot}907\% \\ g = 20 \quad ,, \quad n = 10 \quad k = 19{\cdot}269\% \\ g = 25 \quad ,, \begin{cases} n = 10 \quad k = 20{\cdot}745\% \\ n = 15 \quad k = 26{\cdot}391\% \end{cases} \end{cases} \text{der Jahres-prämie bei } 3\tfrac{1}{2}\%\text{igem Zinsfusse}$$

wobei also in n die partielle Dauer der Gewinnantheil-Steigerung geg[en]über der Gesammt-Prämienzahlungsdauer g zum Ausdrucke gelangt.

inanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der auf usgabe von Hypothekar-Obligationen, Pfandbriefen und Schuldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen.

I.

Die Tilgung jener durch Ausgabe von Pfandbriefen contrahirten Schulden rfolgt im Allgemeinen bekanntlich in der Weise, dass jährlich eine im Vorinein bestimmte Anzahl Pfandbriefe durch Verlosung aus dem Verkehre ezogen wird. Derselbe Vorgang wird nun auch bei Prämienschuldverschreiıngen beobachtet, doch geschieht dies, insoferne es sich um eine mit Treffern sgestattete Tilgung handelt, in Verbindung mit Trefferziehungen, so dass ei jeder Verlosung zugleich eine gewisse Anzahl von grösseren Treffern auf nzelne der Tilgung anheimfallende Titres entfällt. Auf diese Weise wird die ielchance zum Gegenstand einer besonderen, in keinem Verhältnisse zur rklichen Verzinsungs-Erspriesslichkeit stehenden eingebildeten Rentabilität, lche auf die relative Werthbestimmung der Titres oft von bedeutendem nflusse ist. Diese ausserhalb des Rahmens des finanziellen Calculs stehende genschaft der Prämienschuldverschreibung wirkt solchermassen auf deren assirung fördernd, zugleich deren Bewerthung im öffentlichen Verkehre günstigend. Demzufolge verdient der Modus der Prämien-Schuldverschreingen gegenüber demjenigen der gewöhnlichen Pfandbriefe in vielen Dingen en Vorzug, da jene auf Kosten der Capitals-Verzinsung statuirte Spielance scheinbar einen grösseren Vortheil repräsentirt, als der zur Dotirung rselben erforderliche, dem Zinsenentgang entsprechende Aufwand. Daher t gleichen Mitteln ein höherer Effect hinsichtlich der Rentabilität erzielt ird. Diesbezüglich hängt jedoch Vieles von der Ausgestaltung des Tilgungsanes ab, weil hier die Höhe und Anzahl der Treffer von besonderem elange ist und daher das Bedürfniss besteht, dieselbe derart zu statuiren, ss einerseits der für diesen Zweck präliminirte Betrag, welcher einen heil der effectiven Verzinsungs-Grundlage bildet, nicht überschritten und dererseits den Anforderungen der Opportunität Rechnung getragen werde.

Hinsichtlich der Ausstattung derartiger Obligationen repective Pfandriefe mit der Gewinnsthoffnung sind daher verschiedene Umstände zu beücksichtigen, deren Einfluss hinsichtlich der zu erzielenden diesbezüglichen ortheile besonders in's Gewicht fällt. In erster Linie kommt das Ausmass ner Quoten in Betracht, welche auf Kosten des zu gewährenden Pfandbriefinsfusses zur Bestreitung der grösseren Treffergewinnste stipulirt werden und t es von besonderer Wichtigkeit deren Höhe dem Wesen der Sache derart zupassen, dass die Gewinnste möglichst gleichmässig auf die Tilgungsfrist rtheilt werden. Es ist dies im Gegensatze zur Gepflogenheit bei ausgerochenen Losanleihen deshalb angezeigt, weil einerseits durch die Stipu-

lirung kleinerer Treffer bei den anfänglichen Verlosungen, nicht nur
Emission des Anlehens erschwert, sondern auch der Begebungscours dessel
in vieler Beziehung nachtheilig beeinflusst wird; andererseits aber die um
kehrte Combination abnehmender Treffer, die in einer continuirlichen Co
steigerung bestehende werthvolle Eigenschaft dieser Titres illusorisch mac
wodurch indirect dem Wesen der zu bewirkenden grösseren Umlaufsfähig
derselben Abbruch gethan wird. Einen nicht minder wichtigen Fa
repräsentirt das Ausmass des zugrundegelegten Zinsfusses, hinsichtlich des
die Beschaffenheit des üblichen Pfandbriefzinsfusses insofern massgebend ist,
dessen tiefste Grenze wohl noch unterboten werden kann, jedoch blos insow
als dies durch die gebotene Gewinnstchance gerechtfertigt ist, vorausge
dass die Securität des Darlehens den durchschnittlichen Anforderun
entspricht.

Nicht minder von Belang ist aber auch die Frist innerhalb welcher
Tilgung vollzogen wird. Während hier auf einer Seite das Bedürfniss
waltet, ein dauerndes Anlagepapier zu schaffen, kommt auf der anderen S
der Umstand in Betracht, dass für eine längere Tilgungsfrist eine entsprech
grössere Anzahl Treffer stipulirt werden muss, was nur auf Kosten der H
derselben möglich ist, wenn nicht die zur Dotirung der Treffer erforderl
Quote durch allzugrosse Inanspruchnahme des dem Darlehen zugrundeliege
Zinsfusses das Niveau der nominellen Verzinsung ungünstig beeinflussen
auf diese Weise den Zweck dieser Combination gänzlich vereiteln soll. Es
daher für die wesentliche Ausgestaltung eines solchen mit Gewinnsten
bundenen Tilgungsplanes das richtige Verhältniss massgebend, nach welch
die Vertheilung der zu gewährenden Vortheile bewirkt wird und dürften d
bezüglich jene Anhaltspunkte, welche sich aus den vorliegenden Reflexio
ergeben, in mancher Hinsicht von Nutzen sein, da aus denselben auf
Grenzen geschlossen werden kann, innerhalb welcher die Bedingungen erf
werden, unter denen die Erspriesslichkeit einer derartigen Tilgungs-Com
nation vorausgesetzt werden kann.

In diesem Sinne muss das Ausmass der in bestimmten regelmässi
Perioden aufeinanderfolgenden Erfordernisse einer planmässigen mathematisc
Grundlage unterordnet werden, um unter Berücksichtigung des zu Gru
gelegten Zinsfusses und der jeweiligen Verzinsungsfristen, eine entspreche
Regelung zu erfahren. Die verschiedenen Bedingungen und Stipulationen, we
für die Form und die Details der Tilgung und Treffer-Anordnung mit
Belang sind, müssen natürlich gleichfalls in Rechnung gezogen werden, so
sich in Folge dessen eine Mannigfaltigkeit in der Form der Tilgung äus
deren Wesen meist für jeden speciellen Fall eine besondere mathemati
Behandlung involvirt. Immerhin bleiben die Hauptumrisse in der Beschaf
heit der rechnerischen Formen nahezu die gleichen und besteht in Bezug
die Methode, nach welcher die verschiedenen Bedingungen ihre technis
Rücksichtsnahme erfahren und deren mathematischer Begriff zur Geltu
gelangt, ein bestimmtes System, welches den jeweiligen Anforderungen

rechend modificirt werden kann. In Betreff der Frage, auf welche Weise ch dies vollzieht und den erforderlichen technischen Anordnungen Rechnung tragen zu werden vermag, sei in nachfolgenden Ausführungen Aufschluss geben.

Zu diesem Behufe soll in erster Linie das allgemeine Wesen der einlägigen Capitalstilgungs-Form in Betracht gezogen, beziehungsweise deren thematische Grundlagen einer Erörterung in dem Sinne unterworfen werden, welchem sich die planmässige Amortisation derartiger Anleihen zu vollhen pflegt, um nach Ausgestaltung dieser Grundlage successive den Ueberng zu jenen Formen vorzubereiten, welche in ihrem Wesen durch obige sführungen gekennzeichnet sind.

Zum Zwecke der leichteren Begebung wird bekanntlich jedes öffentliche lehen in eine bestimmte Anzahl von gleichen Theilen (Appoints) zerlegt l dadurch die Möglichkeit geschaffen, die Tilgung der Schuld in der Weise chzuführen, dass alljährlich oder nach Ablauf eines jeden Semesters eine visse Anzahl solcher Theilschulverschreibungen, welche mit fortlaufenden mmern versehen sind, durch Verlosung zur Einlösung bestimmt werden. ter Rücksichtnahme auf die sonstigen Bedingungen kommt also hauptchlich die Frage in Betracht, wie viele Obligationen jährlich verlost werden d in Consequenz dessen der Tilgung anheimfallen.

Bei Lösung dieser Aufgabe sind nun folgende Factoren von Bedeutung: eichnet K die Anlehenssumme, welche in Z Obligationen, von denen jede Nominalwerth N besitzt, zerlegt werden soll; ferner die Tilgungsfrist ahre beträgt, innerhalb welcher die Schuld mit dem Zinsfusse $P = 100\,p$ inst und in gleichen Annuitäten getilgt werden soll, so wird, die Einlösung Obligationen mit ihrem Nominalwerthe N vorausgesetzt, folgender Vorgang Beantwortung der Frage bedingen.

Werden in den einzelnen Jahren $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ Obligationen verlost, muss sich als deren Summe die Anzahl Z ergeben; daher die Leistungen in einzelnen Tilgungs-Perioden sich folgendermassen gestalten:

Am Ende des ersten Jahres sind zu zahlen die Zinsen das ganzen Capis, d. i. Kp und die ersten verlosten z_1 Obligationen, deren Werth durch N repräsentirt wird; daher, falls die sich jährlich gleichbleibende Annuität a bezeichnet wird, $a = Kp + z_1 N$

Am Schlusse des zweiten Jahres sind die Zinsen von dem nunmehr verbenden Capitale $K - z_1 N$ also $(K - z_1 N)p$ zu entrichten und ist ausser-, da z_2 Obligationen verlost werden, der Werth von $z_2 N$ als Capitalslung zu leisten. In Folge dessen wird

$$a = (K - z_1 N)p + z_2 N$$

. In weiterer Folge ergibt sich im dritten Jahre

$$a = (K - z_1 N - z_2 N)p + z_3 N$$

. bis endlich am Schlusse des $n$ten Jahres die Relation für a sich dermassen gestaltet

$$= (K - z_1 N - z_2 N - z_3 N - \ldots\ldots - z_{n-1} N)\,p +$$

Wird nun die Differenz zwischen je zweien aufeinanderfolg Gleichungen ermittelt, indem man die zweite Gleichung von der ersten dritte von der zweiten u. s. f. subtrahirt, so ergeben sich folgende Relati

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_5}{z_4} = \ldots\ldots = \frac{z_n}{z_{n-1}} = 1 + p = v$$

ferner durch Folgerung

$$\frac{z_2}{z_1} = v\ ,\ \frac{z_3}{z_1} = v^2\ ,\ \frac{z_4}{z_1} = v^3\ ,\ \frac{z_5}{z_1} = v^4\ ,\ \ldots\ldots,\ \frac{z_n}{z_1} = v^{n-1}$$

und somit gemäss der Voraussetzung, nach welcher die Gleichung

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n = Z$$

gilt, das Ergebniss

$$z_1\,(1 + v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^n) = Z$$

welches der Gleichung

1) $$Z = \frac{v^n - 1}{v - 1}\,.\,z_1 \text{ resp. } z_1 = \frac{v - 1}{v^n - 1}\,.\,Z$$

entspricht. Nun ist aber der Werth von a durch die Form $a = Kp +$ gekennzeichnet, daher ergibt sich durch Substitution der Relation 1) in selbe, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $ZN = K$ ist, der W

2) $$a = \frac{v^n\,(v - 1)}{v^n - 1}\,.\,K$$

Da nun die Werthe $z_2, z_3, z_4 \ldots\ldots z_n$, nach obigen Aufstell aus z_1 hervorgehen, so bedarf es zur Construction des Tilgungsplanes der Feststellung der Factoren a und z_1, mittelst welcher sodann die an Grössen zur Darstellung gelangen.

Es sei z. B. eine Anleihe von 10 Millionen Kronen, welche in 50.000 gationen zu 200 Kronen ausgegeben wurde, in 20 Jahren bei 3½percen Verzinsung zu tilgen. Wie wird sich die diesbezügliche Tilgung gest wenn die Einlösung der verlosten Obligationen mit ihrem Nominalw erfolgt?

In diesem Falle ist nun $K = 10{,}000.000$, $Z = 50.000$, $N = 200$, n und $v = 1\cdot035$; daher erhalten wir für z_1 und a nach den Formen 1) folgende Werthe:

$$a = 704{,}836\cdot40 \text{ Kronen} \qquad z_1 = 1774\cdot18$$

aus denen sodann die Werthe $z_2, z_3, z_4 \ldots\ldots$ ermittelt werden, man z_1 jeweilig mit den entsprechenden Werthen v, v^2, v^3, v^4, multiplicirt.

Unter Anwendung einer geeigneten Correctur und beziehungsw Aufzinsung der jeweiligen Bruchzahlen-Reste lassen sich sodann diese W auf ganze Zahlen abrunden, worauf die Construction des Tilgungs erfolgt.

h einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

V.

us den bisher gewonnenen Resultaten lässt sich nun die Conclusion dass der Aufwand, welchen eine Versicherungsbank bei Gewährung lem Zwecke successiver Prämien-Ermässigung dienenden steigenden iantheiles nöthig hat, und der vom Versicherten getragen werden muss, ibermässige Belastung desselben involvirt und dass die Vortheile, welche den Umstand der stufenweisen Reduction der Jahresprämie im Wesen che erzielt werden, die anfängliche Mehrleistung des Versicherten in Masse rechtfertigen. Wohl mag erwogen werden, dass der in den bis-Ausführungen dargestellte Zuschlag blos einer Steigerung des Gewinn-es im percentuellem Ausmasse der normalen Prämie entspricht und in dessen den Anforderungen in dieser Beziehung erst dann Rechnung wenn bei der percentuellen Bemessung des Zuschlages dieser selbst in mie eingerechnet wird. Daher wird auch der zur Bestreitung der Gewinn-e erforderliche Zuschlag nicht nur im percentuellen Zuwachs der Normal-sondern auch seiner selbst bestehen, und demnach der ursprüngliche Zu-einen weiteren, demjenigen der Normalprämie entsprechend bemessenen uellen Zuwachs erfordern, so dass der thatsächliche Gesammtzuschlag Ausdrucke $k^1 = k + \frac{k^2}{100}$ zur Darstellung gelangt.

iese Correctur ist überall nothwendig, wo es sich um einen percentuellen den Gewinnantheil auf Grundlage der jährlichen Gesammtleistung, in also zugleich der erforderliche Zuschlag als mit inbegriffen betrachtet muss, handelt.

on Interesse dürften die für die verschiedenen Formen der Versicherung igenden Gewinnantheil sich ergebenden jährlichen Prämien-Abstufungen denen das Wesen der jeweiligen Leistung des Versicherten, wie die-mit der dem Alter entsprechend abnehmenden Erwerbsfähigkeit in ig gebracht wird, bildlich zur Darstellung gelangt.

ehmen wir z. B. an, dass eine 30jährige Person für eine gemischte erung ohne Gewinnantheil auf 20 Jahre eine jährliche Prämie in ihe von 44 per Tausend (Versicherungssumme) zu zahlen hätte; in Weise würde sich auf dieser Grundlage für die verschiedenen Formen sicherung mit steigendem Gewinnantheil die Prämienabstufung ergeben? nter Zugrundelegung eines 4%igen Zinsfusses, d. i. $P = 100\,p = 4$, ferner ormalprämie von $N = 44$ und eines Gewinnantheil-Percentsatzes von 0 $m = 3$, *ergeben sich folgende* Prämien:

Tabelle A.

Versicherungsjahr	Gewinnantheil-Percente	Während der ganzen Versicherungsdauer fortlaufender steigender Gewinnantheil:		Gewinnantheil-Percente	Während 10 Jahren steigender [illegible] in der weiteren Versicherungsdau[illegible] gleichbleibender Gewinnantheil:	
		I. Sofort beginnend — Zuschlag: ursprünglich $k = 24·63\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 30·70\%$	II. Mit 2jähr. Verschiebung — Zuschlag: ursprünglich $k = 24·15\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 29.98\%$		III. Sofort beginnend — Zuschlag: ursprünglich $k = 20·93\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 25·29\%$	IV. Mit 2jähr. Verschie[illegible] — Zuschlag: ursprüngl[illegible] $k = $ [illegible], rechnungsmä[illegible] $k^1 = $ [illegible]
1.	0	57·50	57·19	0	55·13	54·82
2.	3	55·78	57·19	3	53·48	54·82
3.	6	54·05	57·19	6	51·83	54·82
4.	9	52 33	52·03	9	50·18	49 89
5.	12	50·60	50·32	12	48 52	48·25
6.	15	48·88	48·60	15	46·87	46 61
7.	18	47·15	46·88	18	45·22	44·96
8.	21	45·43	45·16	21	43·57	43·32
9.	24	43·70	43·45	24	41·91	41·66
10.	27	41·98	41·73	27	40·26	40·02
11.	30	40·25	40 01	30	38·61	38·35
12.	33	38·53	38·29	30	38·61	38 35
13.	36	36·81	36·58	30	38·61	38·35
14.	39	35·09	34·86	30	38·61	38 35
15.	42	33·36	33·14	30	38·61	38·35
16.	45	31·64	31·42	30	38·61	38·35
17.	48	29·91	29·71	30	38·61	38 35
18.	51	28·19	27·99	30	38.61	38·35
19.	54	26·46	26 27	30	38 61	38·35
20.	57	24·74	24·55	30	38·61	38·35

Ferner unter Annahme eines gleichen Zinsfusses und gleicher Nor[illegible]prämie für einen Gewinnantheil-Percentsatz von $M = 100$ $m = 2$.

Tabelle B.

Versicherungsjahr	Gewinnantheil-Percente	Während der ganzen Versicherungsdauer fortlaufender steigender Gewinnantheil:		Gewinnantheil-Percente	Während 10 Jahren steigender [illegible] in der weiteren Versicherungsda[illegible] gleichbleibender Gewinnantheil[illegible]	
		I. Sofort beginnend — Zuschlag: ursprünglich $k = 16·42\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 19·12\%$	II. Mit 2jähr. Verschiebung — Zuschlag: ursprünglich $k = 16·10\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 19·12\%$		III. Sofort beginnend. — Zuschlag: ursprünglich $k = 13·07\%$, rechnungsmäss. $k^1 = 14·77\%$	IV. Mit 2jähr. Verschie[illegible] — Zuschlag: ursprüng[illegible] $k = $ [illegible], rechnungsmä[illegible] $k^1 = $ [illegible]
1.	0	52·41	52 22	0	50·50	50 27
2.	2	51·36	52·22	2	49·49	50·27
3.	4	50·31	52 22	4	48·48	50·27
4.	6	49·26	49 09	6	47·47	47·25
5.	8	48 21	48·04	8	46·46	46·25
6.	10	47·16	47·00	10	45·45	45 24
7.	12	46·11	45 95	12	44·44	44·24
8.	14	45 06	44·91	14	43·43	43·23
9.	16	44·01	43·86	16	42.42	42·23
10.	18	42·96	42 82	18	41·41	41·22
11.	20	41·91	41·77	20	40·40	40·22
12.	22	40·86	40·73	20	40·40	40 22
13.	24	39·81	39·68	20	40·40	40·22
14.	26	38·76	38·64	20	40·40	40·22
15.	28	37·71	37·59	20	40·40	40·22
16.	30	36·66	36·55	20	40·40	40·22
17.	32	35·61	35·50	20	40 40	40·22
18.	34	34·55	34·46	20	40·40	[illegible]
19.	36	33·50	33·41	20	40·40	[illegible]
20.	38	32·45	32·36	20	40·40	

s deren jeweiligen Verlaufe das Wesen der betreffenden Formen der Versicherung t Gewinnantheil zu ersehen ist, so dass eine Vergleichung derselben bezüg-h ihrer Erspriesslichkeit und ihres wirksamen Einflusses auf die Lebens-rsicherung ermöglicht wird.

Es ist hieraus in erster Linie ersichtlich, dass eine 2%ige Bemessung s steigenden Gewinnantheiles eine viel zu mässig verlaufende Abstufung r Prämie im Verhältnisse zu der Höhe des erforderlichen Zuschlages im efolge hat, so dass der Effect derselben die an diese Versicherungsform stellten Anforderungen nicht zu rechtfertigen vermag. Wohl dürfte dieser ercentsatz des Gewinnantheiles bei längerer Prämienzahlungsdauer in Bezug f die Prämien-Ermässigung wirksamer sein, doch was hier insbesondere in e Waagschale fällt und auch durch eine längere Prämienzahlungsfrist nicht rmieden werden kann, ist die allzu geringe Gewinnantheil-Quotenabstufung n Jahr zu Jahr, welche nicht zu befriedigen vermag und daher ihren Zweck rfehlt. Diesem Uebelstande kann nur dadurch abgeholfen werden, dass durch ngere Intervalle von einander getrennte Steigerungsperioden zur Einführung langen und hiedurch eine intensivere Steigerung der jeweiligen Gewinn-ntheile, sowie eine damit verbundene ausgiebigere Prämienermässigung sich rgibt, welche wohl in ihrem Endresultate die gleiche bleibt, in ihrem Effecte ch jedoch wirksamer gestaltet.

Im weiteren Verlaufe unserer Ausführungen mag daher auf jene Formen r Versicherung mit Gewinnantheil hingewiesen werden, welche aus den annigfachen Combinationen obiger Formen durch Veränderung der Steige-ngsperioden, wie auch durch sonstige, sich praktisch erweisende Einrich-ngen in dieser Beziehung sich ergeben.

Die in den Auseinandersetzungen über dieses Thema in Betracht gezo-nen Bedingungen, welche sich bisher im Rahmen eines jährlich steigenden ewinnantheiles bewegten, lassen sich nämlich auch dahin ausdehnen, dass auf ne längere periodische Unterbrechung der Gewinnantheile Rücksicht genommen erden kann. Der in dieser Form zur Geltung gelangende Modus des periodisch eigenden Gewinnantheiles, lässt nun ebenfalls eine Specialisirung im Sinne ner fortbestehenden Steigerung einerseits und einer temporären andererseits . Praktischen Werth besitzt derselbe jedoch blos dort, wo es sich um lange rsicherungsfristen handelt, wie dies bei einfacher Todesfallversicherung mit gekürzter Prämienzahlungsdauer vorkommt, wo für jüngere Alter eine 30- bis jährige Prämienzahlung vorgesehen ist. In diesem Falle hat dieser Modus en doppelten Zweck. Indem hier durch eine jährliche Steigerung eine allzu-sse Reduction der Prämie erfolgen würde, und um diese zu verhüten, zu einer mässigung des Gewinnantheil-Percentsatzes gegriffen werden muss, hat dieser stand andererseits wieder zur Folge, dass die Prämien-Abstufung eine unge-in geringfügige wird, und deren Effect für den Versicherten nicht recht r Geltung kommen kann.

Mit Hilfe der Combination des periodisch steigenden Gewinnan rd *nun dieser Effect* durch periodische Ansammlung mehrerer

antheile bedeutend erhöht, indem zugleich dem Umstande einer mässige Reduction der Prämie im Verlaufe einer längeren Versicherungsdauer Rechnun getragen, und einer grösseren Anfangsbelastung der Prämie eine Grenz gesetzt werden kann. Auf diese Weise wird also nicht blos eine allzu rasch Abstufung der Prämie vermieden, sondern auch der zu diesem Behuf ermässigte Gewinnantheil-Percentsatz in seiner Wirkung gehoben, was wo in praktischer Beziehung besonders werthvoll erscheint. Die periodische Unte brechung des Gewinnantheiles hat also den Vortheil für sich, dass di Versicherungsbank in der Lage ist, grössere Quoten-Ansammlungen für die z gewährenden Gewinnantheile durchzuführen und in dieser Weise erscheint si auch wirksam, doch ist damit wieder der Nachtheil verbunden, dass de Versicherte in den Genuss der Gegenleistung seiner ihm aufgebürdete anfänglichen Mehrbelastung blos periodenweise gelangt, wodurch ihm da Bewusstsein der hier eigentlich bezweckten successiven Ermässigung de Jahresprämien zeitweise abhanden kommt. Die in längeren Perioden, dafü aber sprungweise sich vollziehende Ermässigung der Prämie, welche bei de mit periodisch steigenden Gewinnantheil verbundenen Versicherungsform zu Geltung gelangt, entbehrt also der sonst so rationell wirkenden Continuitä in der Anpassung zur abnehmenden Erwerbsfähigkeit des Menschen, wodur dem Wesen dieser Combination in seinem eigentlichen Zwecke Abbruch geth wird, da das Bestreben, die bestehende Anomalie zwischen divergirende Leistung und convergirender Leistungsfähigkeit zu vermeiden, zum Thei vereitelt wird. Nur dann, wenn die Intervalle der periodenweisen Gewinn antheilsteigerung keine allzu grossen sind, lässt sich dem Mangel eine continuirlichen Verlaufes der Prämien - Abstufung in angemessener Wei Rechnung tragen, und den Consequenzen desselben begegnen. Längere a zwei- bis dreijährige Intervalle sind daher unter allen Umständen zu vermeide da sonst die Nachtheile der Mehrbelastung jegliche hiedurch gebotenen Vo theile in den Hintergrund drängen. Selbst eine zu Beginn der Versicheru stipulirte noch so bedeutende Hinausschiebung der Gewinnantheil-Fälligkeit kann nicht von so einschneidendem üblen Einflusse auf die Erspriesslichke dieser Versicherungsformen in genannter Beziehung sein, wie allzulan periodische Unterbrechungen bei einmal begonnener Function des steigend Gewinnantheiles, es wäre denn, dass der Gewinnantheil überhaupt angesamm und in Form periodisch sich wiederholender Prämien-Befreiungen (sogenannt Freijahre) flüssig gemacht werden würde. Deshalb wird es zur Aufrech erhaltung der in der Versicherung mit steigendem Gewinnantheil gelegen Vortheile nothwendig sein, dem Wesen der continuirlich abfallenden Präm diejenige Aufmerksamkeit zuzuwenden, welche diesbezüglich erforderlich is um den mit diesem Systeme zu erreichenden Zweck nicht wieder illusorisch z machen. Von diesem Gesichtspunkte aus muss daran festgehalten werden, da die Bemessung der zu wählenden Steigerungs-Perioden dem Bedürfnisse de *erforderlichen* Prämienreduction in entsprechender Weise unterordnet wird.

Finanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der auf Ausgabe von Hypothekar-Obligationen, Pfandbriefen und Schuldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen.

II.

Die in der vorigen Abhandlung über dieses Thema dargestellte Form der Tilgung ist in ihrer Art die einfachste, weil die Einlösung der Obligationen mit ihrem Nominalwerthe vorausgesetzt wird und auch sonst keine weitere Bedingung an die Form der Einlösung geknüpft wird. Anders verhält sich dies, wenn die Einlösung der Obligationen mit einer bestimmten Prämie verbunden ist, welche entweder für die ganze Tilgung unverändert beibehalten wird, oder in aufsteigendem resp. abfallenden Sinne sich bewegt.

Für den ersteren Fall wird nun die mathematische Ableitung eine blos geringe Modification erfahren, weil es sich hier blos darum handelt, eine den Nominalwerth übersteigende, für sämmtliche Obligationen gleichbleibende Einlösungsquote in Rechnung zu bringen, welche wir zum Unterschiede von dem Nominalwerthe N einfach mit N' bezeichnen wollen.

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes gestaltet sich die Ableitung der entsprechenden Formel in folgender Weise:

Unter sonst gleichen Voraussetzungen wird die Leistung nach Ablauf des ersten Jahres durch die Form

$$a = Kp + z_1 N'$$

repräsentirt; nach Ablauf des zweiten Jahres wird dieselbe durch die Relation

$$a = (K - z_1 N)\, p + z_2 N'$$

zum Ausdrucke gelangen, um nach Ablauf des dritten Jahres den Werth

$$a = (K - z_1 N - z_2 N)\, p + z_3 N'$$

zu erhalten; bis sie schliesslich nach dem $n$ten Jahre die Form

$$a = (K - z_1 N - z_2 N - z_3 N - \ . \ . \ . \ - z_{n-1} N)\, p + z_n N'$$

annimmt, so dass a die jährliche Annuität bezeichnet.

Analog zum Vorigen ergeben sich nun aus der Differenz je zweier aufeinander folgenden Gleichungen von a die Relationen:

$$z_2 = z_1 \left(1 + \frac{N}{N'} p\right), \quad z_3 = z_2 \left(1 + \frac{N}{N'} \cdot p\right), \quad z_4 = z_3 \left(1 + \frac{N}{N'} p\right)$$

u. s. f. und schliesslich

$$z_n = z_{n-1} \left(1 + \frac{N}{N'} p\right)$$

so dass, falls der Abkürzung halber der Werth $1 + \frac{N}{N'} p = w$ gesetzt wird, abermals die bekannten Relationen

$$\frac{z_2}{z_1} = w \,,\ \frac{z_3}{z_1} = w^2 \,,\ \frac{z_4}{z_1} = w^3 \ldots\ldots \frac{z_n}{z_1} = w^{n-1}$$

zum Vorschein kommen und solchermassen unter Bezugnahme auf die Glei-

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \ldots + z_n = Z$$

das Ergebniss

$$z_1 (1 + w + w^2 + w^3 + \ldots + w^n) = Z$$

liefern, aus welchem die Formen

$$3)\qquad Z = \frac{w^n - 1}{w - 1} \,.\, z_1, \text{ beziehungsweise } z_1 = \frac{w - 1}{w^n - 1} \,.\, Z$$

entspringen, mittelst deren man unter Bezugnahme auf die Gleich- $a = Kp + z_1 N'$ und $ZN = K$ zu der endgiltigen Relation

$$4)\qquad \frac{N}{N'} a = \frac{w^n (w-1)}{w^n - 1} \,.\, K, \text{ respective } a = \frac{w^n (w-1)}{w^n - 1} \,.\, K \,.\, \frac{N'}{N}$$

gelangt, welche in ihrer Form mit der ursprünglichen Relation 2) voll- übereinstimmt und blos in der Beschaffenheit der zugrundegelegten F- einen Unterschied aufweist, welcher sich darin äussert, dass in der F- sowohl die Annuität a als auch der Zinsfuss $P = 100\,p$ im Verhältni- Nominalwerthes N zum Einlösungswerth N' in Rechnung gebracht i- entspricht daher die Form 2) auch den Anforderungen eines vom N- werthe abweichenden Einlösungswerthes, falls in derselben für v der w respective für p der Werth $\frac{N}{N'} p$ und anstatt a der Werth $a \frac{N}{N'}$ gesetz-

In diesem Sinne wird also die Berechnung eine sonst vollständig sein und auch die Aufstellung des Tilgungsplanes in der gleichen erfolgen.

Unter Annahme eines Einlösungswerthes der Obligationen im von 210 Kronen wird unser Beispiel bei sonst gleichen Vorausse- folgendermassen lauten:

Es sei eine Anleihe von 10 Millionen Kronen, welche in 50.0- gationen zu 200 Kronen ausgegeben wurde, in 20 Jahren bei 3½ per- Verzinsung zu tilgen. Wie wird sich die diesbezügliche Tilgung g- wenn die Einlösung der verlosten Obligationen mit 210 Kronen sehen ist?

In diesem Falle ist also $K = 10{,}000.000$, $Z = 50.000$, $N = 200$, N' $n = 20$ und $P = 100\,p = 3{\cdot}5$.

Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der Zinsfuss Annuität im Verhältnisse des Nominalwerthes zum Einlösungswer- Obligationen in Rechnung zu bringen ist, daher $w = 1 + \frac{N}{N'} \,.\, p = 1{\cdot}03$ gelangt man zu den Resultaten

$$\frac{N}{N'} a = 693.040{\cdot}40, \text{ respect. } a = 727.692{\cdot}42 \text{ und } z_1 = 1798{\cdot}54,$$

auf deren Grundlage sodann der weitere Aufbau des Tilgungsplanes in Weise wie im ersten Falle erfolgt.

Aus dem Vergleiche dieser Zahlen mit den früheren ergibt sich, dass im letzteren Falle die Tilgung einen rascheren Verlauf nimmt, da schon die Anzahl der im ersten Jahre einzulösenden Obligationen im Verhältnisse zum ersteren Falle eine höhere ist, abgesehen davon, dass der Tilgungsplan an und für sich schon eine natürliche Steigerung der Anzahl der jährlich zur Einlösung gelangenden Titres involvirt.

Diese Erscheinung tritt mit der Supposition einer von Jahr zu Jahr im aufsteigenden Sinne sich bewegenden Einlösungsprämie noch mehr in den Vordergrund, da im gleichen Verhältnisse, als sich für die Bestreitung der Prämien ein höheres Erforderniss ergibt, eine stärkere Belastung der Annuität hervorgerufen wird, deren Wirkung sich hauptsächlich in den späteren Tilgungsjahren geltend macht und auf diese Weise eine Verschiebung des Aufwandes erzeugt, welche sich in einem rascheren Verlaufe der Einlösung äussert.

Um einen Vergleich für diesen Fall zu ermöglichen, sei daher auch der Modus einer von Jahr zu Jahr in gleichem Verhältnisse aufsteigenden Einlösungsprämie in Betracht gezogen und demgemäss einer mathematischen Entwicklung unterworfen.

Supponiren wir daher die Einlösungsquote für je eine Obligation nach dem ersten Jahre mit N, nach dem zweiten Jahre $(1 + d) N$, nach dem dritten Jahre mit $(1 + 2d) N$ u. s. f. und schliesslich nach dem $n$ten Jahre mit $[1 + (n - 1) d] N$, so ergibt sich folgender Vorgang:

Die Leistung

nach Ablauf des ersten Jahres ist $a = Kp + z_1 N$

" " " zweiten " $a = (K - z_1 N) p + z_2 (1 + d) N$

" " " dritten " $a = (K - z_1 N - z_2 N) p + z_3 (1 + 2d) N$

u. s. f. und schliesslich nach Ablauf des $n$ten Jahres

$$a = (K - z_1 N - z_2 N - z_3 N - \ldots - z_{n-1} . N) p + z_n [1 + (n - 1) d] N$$

Durch Subtraction je zweier aufeinander folgenden Gleichungen, d. i. durch Ermittlung der Differenz zwischen der zweiten und ersten, der dritten und zweiten Gleichung etc. ergeben sich nun die Relationen:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{v}{1+d}, \frac{z_3}{z_2} = \frac{v+d}{1+2d}, \frac{z_4}{z_3} = \frac{v+2d}{1+3d}, \ldots \ldots \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{v+(n-2)d}{1+(n-1)d}$$

worin $v = 1 + p$ bedeutet. Hieraus ergibt sich nun ferner

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{v}{1+d}, \frac{z_3}{z_1} = \frac{v(v+d)}{(1+d)(1+2d)}, \frac{z_4}{z_1} = \frac{v(v+d)(v+2d)}{(1+d)(1+2d)(1+3d)}, \ldots$$

$$\ldots \ldots \frac{z_n}{z_1} = \frac{v(v+d)(v+2d)(v+3d) \ldots . (v+(n-2)d)}{(1+d)(1+2d)1+3d) \ldots . . (1+(n-2)d)(1+(n-1)d)}$$

Es ist daher

$$Z = z_1 (1 + \sum_{n=n}^{n=2} \left(\frac{\left(\frac{v}{d} + n - 2\right)!}{\left(\frac{1}{d} + n - 1\right)!} \right)$$

Wird nun d durch einen Theil des Percentsatzes dargestellt, welche[r] Verzinsung zugrundegelegt ist, so gelangt man zu folgenden Ergebnisse[n]

Unter der Voraussetzung, dass beispielsweise $d = \frac{p}{2}$ ist, ergibt si[ch]

$$\frac{z_1}{z_1} = 1\ ,\ \frac{z_2}{z_1} = 1 + \frac{d}{1+d}\ ,\ \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{2\,d}{1+d}\ ,\ \frac{z_4}{z_1} = 1 + \frac{3\,d}{1+d}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ \frac{z_n}{z_1} = 1 + \frac{(n-1)\,d}{1+d}\ .$$

Demzufolge wird nun, da $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = Z$ ist, Relation gelten

$$\frac{Z}{z_1} = \frac{n}{2}\left(2 + \frac{(n-1)\,d}{1+d}\right) = n + \frac{n\,(n-1)}{2}\ .\ \frac{\frac{p}{2}}{1+\frac{p}{2}}$$

so dass unter Berücksichtigung des Werthes $a = Kp + z_1 N$ und der Rel[ation] $ZN = K$ sich nun auch die Gleichung für a ergibt, u. zw.

$$a = K\ .\left[p + \frac{1+\frac{p}{2}}{\left(1+\frac{p}{2}\right) n + \frac{p}{2}\ .\ \frac{n\,(n-1)}{2}}\right] = K\left[p + \frac{1+\frac{p}{2}}{n\left(1 + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{1}\right.}\right.$$

ebenso können unter Zuhilfenahme des Werthes z_1 auch die Werthe vo[n] z_3, z_4 . . . . bestimmt werden, mit deren Hilfe dann der Tilgungspla[n zur] Aufstellung gelangt.

Es sei z. B. eine Anleihe von 50 Millionen Kronen, welche in 25[0.000] Obligationen zu 200 Kronen zur Ausgabe gelangt, in dreissig Jahre[n bei] 3percentiger nomineller Verzinsung zu tilgen. Wie wird sich diese Til[gung] gestalten, wenn die Einlösung der verlosten Obligationen mit $1^1/_2$ Pe[rcent] jährlich steigender Prämie erfolgt, so dass dieselbe nach dreissig Jahre[n die] Höhe von 45 Percent des Nominalwerthes erreicht?

In diesem Falle ist also $K = 50{,}000.000$, $Z = 250.000$, $N = 200$, n =

$P = 100\ p = 3$ und $d = \frac{p}{2} = 0{\cdot}015$

demgemäss ergeben sich die Werthe $z_1 = 6862{\cdot}74$ und $a = 2{,}872{,}548$, [mit] deren Hilfe die übrigen Factoren ziffermässig dargestellt werden können.

Aus dem Verhältnisse des Anleihebetrages zur Annuität ergibt sich [,] dass die effective Verzinsung, welche hier unter Berücksichtigung de[r zu] leistenden jährlich mit $1^1/_2$ Percent steigenden Prämie thatsächlich ge[währt] wird, etwas über 4 Percent beträgt, aus welchem Umstande auf eine gün[stige] Beschaffenheit dieser Combination geschlossen werden kann.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

VI.

Auf Grund der in voriger Abhandlung über dieses Thema gepflogenen
örterungen mag nun auf das Wesen des periodisch steigenden
ewinnantheiles näher eingegangen werden. Während durch mehr oder
eniger lange Steigerungs-Intervalle beim Gewinnantheil offenbar der Effect
r jeweiligen Prämienreduction in angemessener Weise erhöht wird, ohne
ieselbe thatsächlich einer Veränderung zu unterwerfen und in ihrer end-
iltigen Wirkung zu beeinflussen, gewinnt zugleich der Percentsatz des Gewinn-
ntheiles bei längerer Prämienzahlungsdauer an reducirender Wirkung, so dass
möglich wird denselben in angemessener Weise den Anforderungen anzu-
assen und entsprechend zu ermässigen, wenn im Hinblicke auf die Dauer
er Prämienzahlung und die Höhe des Gewinnantheil - Percentes die Noth-
endigkeit vorwaltet, die Reduction der Prämie auf ein mässigeres Niveau
erabzudrücken. Daraus geht hervor, dass ein bei kürzerer Prämienzahlungs-
ist zumeist unzulänglicher Gewinnantheilpercentsatz vollständig auszureichen
ermag, wenn die Prämienzahlungsfrist eine längere wird, insbesondere wenn
r in einem solchen Falle sonst unzulängliche Steigerungs-Effect mit Hilfe
der durch periodische Unterbrechungen erzielten intensiveren Steigerung
tsprechend gehoben wird. Es dürfte deshalb angezeigt sein, der Frage der
riodisch steigenden Gewinnantheile bei Lebensversicherungen ebenfalls die
ufmerksamkeit zuzuwenden, umsomehr, als es bei Feststellung des mit einer
ebensversicherungsform verbundenen Gswinnantheilsystemes nicht in letzter
nie darauf ankommt, durch einen geeigneten Modus die Wirksamkeit des-
lben in praktischer Beziehung zu statuiren.

Inwieferne man diesbezüglich den Anforderungen gerecht zu werden
rmag, dürfte sich aus folgenden mathemathischen Auseinandersetzungen
geben. Die Ermittlung des erforderlichen Prämien-Zuschlages erfolgt auf
selbe Weise wie bei den bisherigen Formen, denn es kann sich hier blos
eine Ansammlung zweier oder mehrerer Gewinnantheilquoten handeln, die
ann auf einmal zur Ausschüttung gelangen. Nur wird es dadurch möglich,
Percentsatz der steigenden Gewinnantheile umso niedriger zu bemessen,
mehr Gewinnantheilquoten jeweilig angesammelt wurden. Natürlich kommen
stdem auch die Zinsen der zurückgehaltenen Gewinnantheilquoten ebenfalls
Betracht.

Während also unter Voraussetzung einer jährlichen, im Verhältnisse zur
zahl der jeweilig geleisteten Prämien bemessenen Gewinnantheil-Ausschüt-
nach dem ersten Jahre $M\%$, nach dem zweiten $2\ M\%$, nach dem dritten
$\%$, *nach dem vierten* $4\ M\%$, nach dem fünften $5\ M\%$ der Prämie u. s. w.
u.

in Abschlag kommen, wird beispielsweise für einen in zweijährigen Perio
flüssig werdenden Gewinnantheil, dessen Steigerung also blos alle gera
Jahre in Function tritt, hingegen in allen ungeraden Jahren der Gewi
antheil vollständig entfällt, der Verlauf der Fälligkeiten sich folgen
massen gestalten: nach dem zweiten Jahre wird der erste Gewinnantheil
3 $M\%_0$, nach dem vierten mit 7 $M\%_0$, nach dem sechsten mit 11 $M\%_0$, n
dem achten mit 15 $M\%_0$ der Prämie nebst den aus dem jeweiligen Vorj
aufgelaufenen Zinsen des aufgesparten Gewinnantheiles zur Ausschütt
gelangen. Es wird also anstatt einer jährlichen Steigerung um je $M\%_0$
solche von 4 $M\%_0$ in jedem zweiten Jahre stattfinden, während alle ungera
Jahre in diesem Falle die Zahluug der vollen Prämie sammt Zuschlag erheis
werden.

Soll nun für die ungeraden Jahre der Gewinnantheil der vorhergehen
geraden jeweilig beibehalten werden, welcher Modus uns als der praktisc
erscheint, so wird nach dem zweiten und dritten Jahre der Gewinnanthei
$2\frac{1}{2}$ $M\%_0$, nach dem dritten und vierten je $4\frac{1}{2}$ $M\%_0$, nach dem fünften
sechsten je $6\frac{1}{2}$ $M\%_0$ der Prämie u. s. w. betragen müssen, wobei die Dis
zinsen von $\frac{1}{2}$ $M\%_0$ des jeweiligen ungeraden Jahres für das vorhergeh
gerade Jahr in Abzug gelangen. Auf diese Weise wird von zwei zu
Jahren eine Steigerung von 2 $M\%_0$ erzielt, welche geeignet ist, selbst bei
gering bemessenen Gewinnantheil-Percentsatze M schon in's Gewicht zu
In noch prägnanterer Weise tritt dieser Umstand bei dreijährigen Steiger
Intervallen hervor, indem hier der Gewinnantheil nach dem dritten Jahre
4 $M\%_0$ beginnt und von drei zu drei Jahren um je 3 $M\%_0$ zunimmt, so
nach dem dritten, vierten und fünften Jahre 4 $M\%_0$, nach dem sechs
siebenten und achten Jahre 7 $M\%_0$, nach dem neunten, zehnten und elf
Jahre 10 $M\%_0$ der Prämie, als jeweiliger Gewinnantheil entfallen, welch
Modus die in unserer Tabelle B angeführte Form II zur Grundlage die
kann. Im Allgemeinen dürfte aber die Specialisirung der Form des period
steigenden Gewinnantheiles mit diesen Arten kaum erschöpft sein und
auf Grundlage der continuirlich verlaufenden Grundformen dieses Syste
noch manche zweckentsprechende Combinationen aufstellen lassen. Uebrig
mag eine diesen Formen entsprechende Tabelle zur Erläuterung des in die
Beziehung verfolgten Principes beitragen. Für einen ausgiebigen jähr
steigenden Gewinnantheil muss M mindestens mit $3\%_0$ angenommen werd
was bei 30- bis 40jähriger Zahlung der Prämie eine zu grosse Reduct
derselben herbeizuführen geeignet ist, bei zwei- und dreijährigen Steigeru
Intervallen genügt es schon, wenn in Folge der Ausgiebigkeit der St
gerung M mit 1 bis $2\%_0$ festgesetzt wird, ohne dass dessen Effect beeinträcht
werden würde.

Wir werden uns demgemäss damit begnügen, hier blos einen Gewi
antheil-Percentsatz von $M = 100\,m = 2$ in Betracht zu ziehen. Die hier an
führten Formen des periodisch steigenden Gewinnantheiles, soweit sie für
praktische Handhabung in der Lebensversicherung entsprechende V

sitzen, lassen sich dem Gesagten gemäss nach zweierlei Principien zur wendung bringen, von denen das eine die Beibehaltung der jeweilig durch igerung bereits erzielten Höhe der Gewinnantheil-Quoten auch während der iodischen Unterbrechung des Wachsthums derselben im Auge hat, während andere mit der Unterbrechung der Steigerung, von einem Gewinnantheile erhaupt absieht, so dass innerhalb der einzelnen Steigerungs-Intervalle immer eder die volle Prämie sammt Zuschlag zur Geltung kommt.

In nachstehender Tabelle mögen nun diese beiden Principien auf die fache Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer zur wendung gelangen; u. z. mag für eine auf Grund vorausbestimmter fünf-dzwanzigjähriger Prämienzahlung für den einfachen Todesfall versicherte issigjährige Person, eine Jahresprämie von 26 per Tausend (Versicherungs-mme) angenommen werden. Demgemäss ergeben sich unter Zugrundelegung es 4%igen Zinsfusses und eines Gewinnantheil-Percentsatzes von $M = 100$ $m = 2$, i einer Normalprämie $N = 26$, folgende Prämien-Abstufungen:

Tabelle C.

Versicherungsjahr	Gewinnantheil-Percente	Versicherung mit einem in 2jähr. Perioden steigenden Gewinnantheil: I. Sofort beginnend Zuschlag $k^1 = 19·12\%$	Versicherung mit einem in 2jähr. Perioden steigenden Gewinnantheil: II. Mit 2jähr. Verschiebung Zuschlag $k^1 = 18·69\%$	Gewinnantheil-Percente	Versicherung mit einem in 3jähr. Perioden steigenden Gewinnantheile mit 2jähr. Verschiebung Zuschlag $k^1 = 18·69\%$	Gewinnantheil-Percente	Versicherung mit totaler Unterbrechung d. Gewinnantheiles bei 2jähr. periodischer Steigerung desselben und 2jähr. Verschiebung Zuschlag $k^1 = 18·69\%$
1.	0	30·97	30·86	0	30·86	0	30·86
2.	3	30·05	30·86	0	30·86	0	30·86
3.	3	30·05	30·86	0	30·86	0	30·86
4.	7	28·81	28 71	8	28·41	6	29·01
5.	7	28 81	28.71	8	28·41	0	30·86
6.	11	27·57	27·48	8	28·41	18	25·21
7.	11	27·57	27 48	14	26·57	0	30·86
8.	15	26·33	26·25	14	26 57	26	22·69
9.	15	26 33	26·25	14	26·57	0	30·86
10.	19	25·09	25·02	20	24 73	34	20·17
11.	19	25 09	25·02	20	24 73	0	30·86
12.	23	23·85	23·79	20	24·73	42	18·01
13.	23	23.85	23.79	26	22·89	0	30·86
14.	27	22·61	22·56	26	22·89	50	15·15
15.	27	22·61	22 56	26	22·89	0	30·86
16.	31	21·37	21 33	32	21·05	58	12·60
17.	31	21·37	21·33	32	21·05	0	30·86
18.	35	20·13	20·10	32	21 05	66	10·09
19.	35	20·13	20·10	38	19·21	0	30·86
20.	39	18·89	18 87	38	19·21	74	7·60
21.	39	18·89	18·87	38	19·21	0	30·86
22.	43	17·65	17.64	44	17 37	82	5·07
23.	43	17·65	17.64	44	17·37	0	30·86
24.	47	16·41	16·41	44	17·37	90	2·53
25.	47	16·41	16·41	48	16·13	0	[illegible]

Aus der vorliegenden Tabelle ist nun thatsächlich ein a
chung der Gewinnantheil-Steigerung resultirender int
ect der Prämie ersichtlich, welcher wohl im Wes
sigung in ihrer Totalität, im Vergleiche zu einer

winnantheil-Steigerung hervorgerufene, ohne Einfluss bleibt, jedoch in se
Wirkung vom praktischen Standpunkte umso höher anzuschlagen ist, als
selbe keineswegs auf Kosten einer Erhöhung des Prämien-Zuschlages err
wird. Im Gegentheile ist derselbe vielmehr geeignet zur Ermässigung
Prämien-Zuschlages in relativem Sinne beizutragen, sobald die Länge
Prämienzahlungsfrist die Eventualität nahe rückt, die Prämie durch succe
aber länger fortwirkende Reduction auf ein zu niedriges Niveau herabzudrü
welchem Umstande blos durch Ermässigung des Gewinnantheil-Percents
vorgebeugt werden kann. In diesem Falle tritt die Wirkung dieses Eff
desto mehr in den Vordergrund, weil mit abnehmendem Gewinnantheil-Per
satze auch die Reduction der Prämie eine mässigere wird und an Effect
liert, welchem Umstande auf dem Wege der Zusammenziehung zweier
mehrerer Prämien-Reductionsquoten, also durch Einführung der periodis
Gewinnantheil-Steigerung entgegen gewirkt werden kann.

Diese Form der Versicherung mit Gewinnantheil ist daher geeignet,
neue Quelle fördernder Elemente für die Lebensversicherung zu bilden,
umso willkommener ist, als sich das Bedürfniss nach Verbesserungen in d
Beziehung in neuerer Zeit besonders geltend macht, da nicht nur jene in B
auf die Höhe der Prämien im Allgemeinen und auf den Ueberschuss insbes
Einfluss besitzenden Zinsfussverhältnisse sich zusehends ungünstiger ge
und infolge dessen die aus dem etwaigen Zinsenüberschusse entspring
von den Versicherungs-Gesellschaften blos nach Massgabe der Zulässig
gewährten Dividenden nach und nach zu versiegen drohen, sondern auch s
die für eine garantirte continuirlich steigende Gewinnbetheiligung einzuhebe
Prämienzuschläge eine desto höhere Bemessung erfordern, je niedriger de
Rechnung zugrunde gelegte Zinsfuss sich gestaltet. Nur um die aus di
Grunde unvermeidlich werdende höhere Belastung der Prämie so lange
möglich zu verzögern, wird immer noch an der aus den Ueberschü
gewährten Dividende ohne Garantie festgehalten, obzwar an den Versich
immer dringender die Frage herantritt, ob es möglich sein wird, auch fe
hin bei gesunkenem Zinsfusse dieselbe aufrechtzuerhalten und in welcher W
für den Fall des Versiegens dieser Dividendenquelle ohne Aufbietung
neuerlichen Prämienzuschlages der bisherige Steigerungs-Effect beim Gew
antheil aufrecht erhalten werden soll. Wohl kann die Mehrprämie, w
ausschliesslich zur Ansammlung einer Dividende dient, nicht als Gewinn
den Versicherten angesehen werden, doch berücksichtigt man die Vorth
welche nicht nur in meritorischer, sondern auch in acquisitorischer Bezieh
aus diesem der Lebensversicherung künstlich aufgepfropften Gewinnant
Systeme erwachsen, so muss man unbedingt der Form des garantirten Gew
antheiles neben derjenigen ohne Garantie eine hohe Berechtigung zuerken
umsomehr als die letztere Form, auf einer schwankenden Basis beruhend,
der Zeit genöthigt sein dürfte, aus obengenannten Gründen der garantir
Form des steigenden Gewinnantheiles das Feld zu räumen.

inanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der af Ausgabe von Hypothekar-Obligationen, Pfandbriefen und chuldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen.

III.

Das Wesen der mit jährlich aufsteigenden Prämien verbundenen Tilgung t jedoch auch seine Nachtheile, deren Ursache hauptsächlich darin zu chen ist, dass die in späteren Jahren immer mehr anwachsende Belastung der lgungsquote nicht nur eine raschere Tilgung nothwendig macht, sondern auch f die Höhe der nominellen Verzinsung, auf deren Kosten die Dotirung der rämien erfolgt, von Vorneherein einen Druck ausübt. Aber auch vom Gesichtsnkte der praktischen Auffassung entspricht die steigende Prämie nicht ganz n Anforderungen, welche an sie gestellt werden, da jene durch die Prämie nfangs blos geringe und erst nach und nach zunehmende Begünstigung des bligations-Besitzes im Zeitpunkte der Emission einen nur mässigen Ansporn r die Capitalsanlage bildet. Da es jedoch von Belang ist, eine derartige nleihe, deren Begebung sich meist nur auf die ersten Jahre erstreckt, zu nem möglichst guten Course anzubringen, so wird der Zweck der erst äter gewährten höheren Rentabilität verfehlt, indem die anfängliche mindere entabilität bei der Bewerthung ausschlaggebend wirkt. Wohl ist hier eine orrectur im späteren Rückkaufe der Titres geboten, doch kann hiedurch das esen dieser Combination umsoweniger gewinnen, als der Zweck der steinden Prämie in der Förderung der Umlaufsfähigkeit der Obligationen steht.

Eine viel günstigere Form ist diejenige der jährlich gleichmässig abhmenden Prämie. Der umgekehrte Process, welcher sich hier vollzieht, verandelt die Nachtheile der früheren Combination in ebenso grosse Vortheile, ie auch sonst die entgegengesetzte Wirkung sich hier äussert. Während bei r Combination mit aufsteigenden Prämien die Umlaufsfähigkeit mit jedem ahre grösser wird, nimmt dieselbe hier von Jahr zu Jahr ab, weil die entabilität eine immer geringere wird. Dagegen bietet die für den Anfang r Tilgung sehr hoch bemessene Prämie die Gewähr für eine besonders nstige Bewerthung der Titres, sowie für einen entsprechend befriedigenden missions-Erfolg. Mit diesen allerdings zu würdigenden Vortheilen ist jedoch r Nachtheil einer successive zurückweichenden Bewerthung, welcher aus r abnehmenden Rentabilität entspringt, verbunden. Wird jedoch erwogen, ss die in der gegenwärtigen Periode sich äussernde Tendenz des sinkenden nsfusses, deren Wirkungen auch in den nächsten Jahrzehnten sich geltend chen dürften, hier ein Gegengewicht zu bilden geeignet ist, so lässt sich Frage aufwerfen, ob nicht etwa in dem Wesen dieses Umstandes

geeignete Form gegeben ist, um die Rentabilität der bezüglichen Titres d sinkenden Tendenz der allgemeinen Capitalsverzinsung anzupassen. Sow die Höhe der Anfangsprämie in Verbindung mit dem zugrundegelegten Zin fussniveau die übliche Rentabilität blos mässig übersteigt, so dass es mögli wird, in den späteren Tilgungsjahren diesen Mehraufwand wieder hereinz bringen, kann diese Frage nur in zustimmendem Sinne beantwortet werd Wird jedoch die Anfangsprämie allzuhoch bemessen, so dass jene durch der successive Reduction zu erreichende normale Rentabilität auf einen zu spät Zeitpunkt der Tilgungsfrist fällt, und auf diese Art der nöthige Regr des anfänglichen Mehraufwandes vereitelt wird, so äussern sich in die Tilgungsform noch grössere Nachtheile, als in derjenigen der steigend Prämien, da die Vorzüge derselben durch die zu diesem Zwecke aufgeboten Mittel mehr als überwogen werden.

Es ist daher nothwendig, die einzelnen Bedingungen für diese Tilgung form den Anforderungen entsprechend möglichst anzupassen, was durch d Feststellung eines angemessenen Verhältnisses des Percentsatzes der jährlich Prämienabnahme zur Tilgungsfrist erreicht wird. Der richtige Massstab dieser Beziehung ergibt sich aus der mathematischen Aufstellung der bezü lichen Formen und mögen die in nachfolgenden Ausführungen entwickelt Relationen hiefür die Handhabe bieten.

Wird der Nominalwerth durch N, dagegen der Einlösungswerth na dem ersten Jahre durch N', nach dem zweiten durch $(1-d)\,N'$, nach dem dritt durch $(1-2d)\,N'$ u. s. f. ausgedrückt, so dass nach dem $n$ten Jahre der Ei lösungswerth $[1-(n-1)d]\,N' = (1+\frac{N'}{N}d)\,N$ ist, so ergibt sich folgender Vorgan

Die Leistung nach Ablauf des ersten Jahres ist $a = Kp + z_1 N'$

" " " " " zweiten " " $a = (K - z_1 N)\,p + z_2\,(1-d)\,N'$

" " " " " dritten " " $a = (K - z_1 N - z_2 N)\,p + z_3\,(1-2d)$

u. s. f. und schliesslich nach Ablauf des $n$ten Jahres

$$a = (K - z_1 N - z_2 N - z_3 N - \ldots - z_{n-1} N)\,p + z_n\,[1-(n-1)\,d]\,N'.$$

Aus der Differenz je zweier aufeinanderfolgenden Gleichungen ergeb sich nun in analoger Weise wie zuvor folgende Relationen:

$$z_1\left(1 + \frac{N}{N'}\cdot p\right) = z_2\,(1-d) \qquad z_2\left(1 + \frac{N}{N'}\cdot p - d\right) = z_3\,(1-2\,d)$$

$$z_3\left(1 + \frac{N}{N'}\cdot p - 2\,d\right) = z_4\,(1-3\,d)$$

u. s. f. und schliesslich

$$z_{n-1}\left(1 + \frac{N}{N'}\,p - (n-2)\,d\right) = z_n\,(1-(n-1)\,d).$$

Hieraus folgt, wenn man der Kürze halber wieder $1 + \frac{N}{N'}\,p = w$ set

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{w}{1-d}\,,\ \frac{z_3}{z_2} = \frac{w-d}{1-2\,d}\,,\ \frac{z_4}{z_3} = \frac{w-2\,d}{1-3\,d}\,,\ \ldots\ \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{w-(n-2)\,d}{1-(n-1)\,d}$$

und demzufolge

$$= \frac{w}{1-d}, \frac{z_3}{z_1} = \frac{w\,(w-d)}{(1-d)\,(1-2\,d)}, \frac{z_4}{z_1} = \frac{w\,(w-d)\,(w-2\,d)}{(1-d)\,(1-2\,d)\,(1-3\,d)}, \ldots\ldots$$

nd $\frac{z_n}{z_1} = \frac{w\,(w-d)\,(w-2\,d)\,(w-3\,d)\,(w-4\,d)\,\ldots\ldots\,[w-(n-2)\,d]}{(1-d)\,(1-2\,d)\,(1-3\,d)\,(1-4\,d)\,\ldots\ldots\,[1-(n-1)\,d]}$

da $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = Z$ ist, so ergibt sich durch Summirung r Gleichungen der Werth für Z respective für z_1

$$Z = z_1 \left[1 + \sum_{n=n}^{n=2} \frac{\left(\frac{w}{d} + 2 - n\right)!}{\left(\frac{1}{d} + 1 - n\right)!} \right]$$

Unter Berücksichtung der Relationen $a = Kp + z_1 N'$ und $ZN = K$ gt man nun auch zu der Form für a

$$a = \frac{N'}{N} K \left[\frac{1}{1 + \sum_{n=n}^{n=2} \frac{\left(\frac{w}{d} + 2 - n\right)!}{\left(\frac{1}{d} + 1 - n\right)!}} + w - 1 \right]$$

Berechnung wohl etwas complicirter Natur ist, sich jedoch für specielle sehr vereinfachen lässt. Wird namlich d als Function des Percentsatzes stellt, welcher der nominellen Verzinsung zu Grunde gelegt ist, so auch an die Stelle von w entsprechende Functionen von d wie im rgehenden Falle.

Es sei z. B. $3d = \frac{N}{N'} p$, dann gelangt man zu folgenden Resultaten

$$\frac{1+3\,d}{1-d}, \frac{z_3}{z_1} = \frac{(1+3\,d)(1+2\,d)}{(1-d))\,(1-2\,d)}, \frac{z_4}{z_1} = \frac{(1+3\,d)(1+2\,d)\,(1+d)}{(1-d)\,1-2\,d)\,(1-3\,d)}$$

$$\frac{(1+3\,d)\,(1+2\,a)\,(1+d)}{-d)(1-2\,d)(1-3\,d)(1-4\,d)}, \frac{z_6}{z_1} = \frac{(1+3\,d)\,(1+2\,d)\,(1+d)}{(1-2\,d)\,(1-3\,d)\,(1-4\,d)\,(1-5\,d)}$$

$$\frac{\ldots}{-1} = \frac{(1+3\,d)\,(1+2\,d)\,(1+d)}{(1-(n-5)\,d)\,(1-(n-4)\,d)\,(1-(n-3)\,d)\,(1-(n-2)\,d)}$$

$$\frac{z_n}{z_1} = \frac{(1+3\,d)\;1+2\,d)\;1+d)}{(1-(n-4)\,d)\,(1-(n-3)\,d)\,(1-(n-2)\,d)\,(1-(n-1)\,d)}$$

also überhaupt im Zähler höchstens drei und im Nenner höchstens 'actoren aufweisen und daher eine kürzere Rechnungsweise gestatten.

Es sei z. B. eine Anleihe von 30 Millionen Kronen, welche in 150.000 tionen zu 200 Kronen zur Ausgabe gelangt, in 30 Jahren bei 3per- er nomineller Verzinsung zu tilgen. Wie wird sich diese Tilgung ge-, wenn die Einlösung der Obligationen im ersten Jahre mit einer entigen Prämie erfolgt, deren Höhe jedoch jährlich um 1 Percent nt?

n diesem Falle ist also $K = 30{,}000.000$, $Z = 150.000$, $N = 200$, $N' = 260$, 0, $P = 100\,p = 3$ und $d = {}^1/_{130}$

folgt sodann

$$\frac{z_1}{z_1} = 1, \frac{z_2}{z_1} = 1{\cdot}031, \frac{z_3}{z_1} = 1{\cdot}06322, \frac{z_4}{z_1} = 1{\cdot}09671, \frac{z_5}{z_1} = 1{\cdot}13153,$$

u. s. f. und schliesslich $\frac{z_n}{z_1} = 2{\cdot}709244$ und durch Summirung dieser Zah der Werth von $Z : z_1$, woraus sich dann z_1 ergibt, mit dessen Hilfe d auch a bestimmt wird.

Hier erreicht der effective Zinsfuss etwas über $3^3/_4$ Percent, und zw ergibt sich dies auf Grund der approximativen Ermittlung der entsprechen Factoren, indem z etwa der Zahl 2936 und a etwa 1,667.000 Kronen glei kommt. Hieraus ist ersichtlich, dass unter den heutigen Zinsfussverhältnis bezüglich der Höhe der Prämie noch ein Spielraum übrig-bleibt, dessen ev tuelle Inanspruchnahme die Handhabe bietet, mit der Einlösung noch grösse Vortheile für den Obligationsbesitzer zu verbinden.

Noch günstiger gestaltet sich jedoch dieser Modus bei theilweise auf schobener Tilgung. Indem solchermassen der grösste Theil der Obligationen den letzten Tilgungsjahren zur Einlösung gelangt, wo die Prämie bereits e mässige wird, kann ein grosser Theil des Aufwandes, der sonst bei normal Einlösung sich als nöthig erweist, in Ersparung gebracht werden. In diese Falle ist es daher möglich, aus den sich auf diese Weise ergebenden Erg nissen die Anfangsprämien umso ausgiebiger zu dotiren, je geringer die Zah der anfänglich zur Einlösung gelangenden Obligationen ist, beziehungsweise je umfangreicherem Masse sich die Verschiebung der Einlösungen auf d späteren Tilgungsjahre vollzieht.

Diese Form besitzt in Folge dessen den Vorzug, eine rasche und leic zu bewerkstelligende Classirung des Darlehens zu gestatten, in gleich höher Masse, als die anfängliche Ausgiebigkeit der Prämie den Werth des momentan Besitzes der Obligation erhöht. Wohl wird in der ersten Zeit der Tilgun periode die Wahrscheinlichkeit, durch Einlösung der Obligation der Prä theilhaftig zu werden, eine desto geringere sein, um später im gleichen V hältniss als die Abnahme der Prämie sich vollzieht, zuzunehmen, doch k dieser Umstand für die Disposition des Capitales kaum von Belang sein, hier der momentane Vortheil in seinem etwaigen Umfange allein in die Wa schale fällt. Die Bedingungen, an welche dessen Erreichung geknüpft kommen erst in Frage, wenn sich die Erwägung derselben schon von se aufdrängt.

Diese Erscheinung kann man bei den verschiedenen Loskategorien b achten, wo abgesehen von der etwaigen Verzinsung die Höhe der Treffer das Privat-Capital fast allein massgebend wird für die Beurtheilung Gesichtspunkte der Rentabilität, der Einfluss bezüglich der Anzahl der spielenden Lose jedoch kaum in Betracht kommt. Ebenso dürfte auch hier schliesslich die Höhe der mit der Einlösung verbundenen Prämie ausschl gebend werden.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

VII.

Wir haben in den bisherigen diesbezüglichen Ausführungen den Modus s steigenden Gewinnantheiles im Sinne einer garantirten steigenden Rente handelt, deren voller capitalisirter Werth auf dem Wege gleichbleibender ämienzuschläge hereingebracht wird, wobei die durch vorzeitiges Ableben r Versicherten und durch den Storno freiwerdenden Gewinnantheil-Erspar-sse an die übrigen Versicherten nach Massgabe der sich auf diese Weise gebenden jährlichen Ueberschüsse zur Erhöhung der Gewinnantheile zu ver-nden sind.

In diesem Falle wird daher die Verbindlichkeit der Versicherungsbank s nach Massgabe der Zusatzleistung des Versicherten in Anspruch genommen, durch eine Garantie eines fixen steigenden Gewinnantheiles ermöglicht rd, während die zur Erhöhung desselben beitragenden Ueberschüsse, von der eiligen Sterblichkeit und dem Storno abhängend, eine Garantie schon deshalb ht vertragen, weil das Ergebniss derselben durch die Untersterblichkeit influsst, eine fixe Bemessung des hiedurch erzielten Gewinnantheil-Zuwachses ht zulassen, die sich auf diese Weise ergebenden thatsächlichen Ueber-üsse aus den geleisteten Prämienzuschlägen bilden aber zugleich eine Reserve etwaige Veränderungen in den Zinsfussverhältnissen, so dass die Ver-herungsbank im Stande ist, etwaige Differenzen, welche sich aus der rechnungs-ssig zugrundegelegten und einer vielleicht eintretenden geringeren Verzin-g ihrer Capitalien ergeben sollten, auf diesem Wege auszugleichen, und chermassen ihre Garantie voll und ganz zu rechtfertigen. Indem also die rsicherungsbank ihre Gegenleistung dem Versicherten gegenüber in eine antirte und eine nicht garantirte theilt, die Garantie nur soweit ausdehnend, dieselbe der directen Leistung dss Versicherten entspricht, genügt sie den forderungen ihrer eigenen Solidität und Vertrauenswürdigkeit, zu gleicher t mit der jährlichen Auftheilung der erzielten Ueberschüsse aus dem Gewinn-heilfond, auch dem Principe der Gewinnantheil-Vererbung Rechnung gend.

Zum Unterschiede von diesem Modus der indirecten Vererbung Gewinnantheile wollen wir nunmehr auch den gleichfalls allgemein gebräuch-en, nämlich denjenigen der directen Vererbung in Betracht ziehen, cher sich von jenem dadurch unterscheidet, dass die durch die Sterblichkeit ergebenden Gewinnantheil-Ersparnisse gleich bei der Bemessung der Prämien-chläge mit in Rechnung gelangen und auf diese Weise eine Ermässigung selben involviren. Die für einen bestimmten Gewinnantheil-Percen-higen *Zusatzprämien*, welche in der ersten Hälfte der Versicherung

die Gegenleistung des Gewinnantheiles weit übersteigen und erst späte Dotirung der immer mehr anwachsenden Gewinnantheilquoten herange werden müssen, gelangen im Falle des vorzeitigen Ablebens ausser Verwen und können daher den überlebenden Versicherten zu Gute kommen, was si dem letzteren Falle in einer entsprechenden Ermässigung der Zusatzpr geltend macht. Dieser Modus hat wohl den Vorzug einer etwas mässig Belastung der Prämie durch den zur Bestreitung der Gewinnantheile nöth Zuschlag zu derselben, doch tritt hier andererseits wieder der Umstand in Vordergrund, dass die Gegenleistung, welche in jenen dem Versicherten gewährenden Gewinnantheilen besteht, nicht vollständig sichergestellt ist deshalb auch nicht garantirt werden kann. Die aus den jeweiligen Sterbl keitstafeln ermittelten Vererbungen entsprechen nämlich umsoweniger der W lichkeit, je mehr die Sterblichkeit der ausgewählten Leben von derjen durch die Sterblichkeitstafel ausgedrückten abweicht, d. h. je grösser die Un sterblichkeit ist. Wohl wird andererseits wieder durch die sich ergebe Untersterblichkeit ein Gewinn erzielt, welcher zur Ergänzung der in die Falle nicht voll bedeckten Gewinnantheil-Erfordernisse herangezogen wer kann, wie auch der Storno dieser Versicherungen, dieselbe Wirkung in Be auf Vererbung besitzt, wie der Tod des Versicherten, weil auch in diesem F die geleisteten Prämienzuschläge den übrigen Versicherten zu Gute kom doch muss hier immerhin die Möglichkeit einer Collission zwischen Leis und Gegenleistung umsomehr in Betracht gezogen werden, als hier eben die Frage der Verzinsung der Capitalien eine bedeutende Rolle spielt und Zinsfussverhältnisse in letzterer Zeit sich immer ungünstiger gestalten. Ab sehen hievon, wurde das Risiko der Lebensversicherung in den letzten Jah durch die obligatorische Kriegsversicherung bedeutend erhöht, so dass di Friedenszeiten sich ergebenden Gewinne aus der Untersterblichkeit he gezogen werden müssen, um für die unverhältnissmässige Steigerung der M talität im Falle eines Krieges und für sonstige nachtheilige Einflüsse auf Sterblichkeitsmoment, eine Reserve zu bilden. Die aus dem Storno etw erwartende Correctur für die durch Untersterblichkeit wegfallenden Vererbun aber dürften weit hinter den Erwartungen zurückbleiben, weil in dem M des steigenden Gewinnantheiles ein Mittel zur Einschränkung des Stornos liegt. Daraus geht hervor, dass eine Garantie der Gewinnantheile in di Falle umsoweniger geboten erscheint, als die hier angeführten Factoren manche Complication durch den Umstand erfahren dürften, dass bei etw sich als nothwendig herausstellender Ermässigung des zugrundegelegten fusses ein weiterer Ausfall in den zur Befriedigung der Gewinnantheil-Lei der Versicherungsbank dienenden Capitalszuflüssen eintreten dürfte.

Es liegt daher in den beiden Combinationen, der indirecten Vere einerseits und der directen andererseits, ein Unterschied in der Form der *wendung* der aus der Sterblichkeit resultirenden Ueberschüsse, welche in *torischer* Beziehung insoferne zur Geltung gelangt, als der Modus der i *Vererbung* eine verlässlichere Grundlage der Gewinnansammlung soll

os ein Theil jener Zuflüsse, welche die Dotirung der Gewinnantheile bezwecken, ränderlichen Einflüssen unterworfen ist, während dies bei der directen Verbung unbeschränkt zum Durchbruche kommt und solchermassen eine bestimmte oraussetzung hinsichtlich der Bedeckung des in Aussicht genommenen Gewinntheil-Erfordernisses daselbst vereitelt wird.

Der Zweck des Systemes der steigenden Gewinnantheile in der Lebensrsicherung liegt einerseits in der Anpassung der Prämienleistung zur abnehnden Erwerbsfähigkeit des Versicherten, andererseits in der Erreichung ner rascheren Amortisation des Risikos und der damit verbundenen Stabiirung der Versicherung überhaupt. Derselbe wird nun thatsächlich sowohl f dem Wege der einen wie auch der anderen Combination erreicht und ist also die Zweckmässigkeit allein, welche hier für die Wahl einer solchen assgebend ist. Die Erspriesslichkeit dieser Combinationen sowohl vom verherungstechnischen, als auch vom acquisitorischen Gesichtspunkte ist es, elche erwogen werden muss, um den praktischen Anforderungen Genüge zu isten.

Im Nachfolgenden mag auf das Wesen der technischen Grundlagen des eigenden Gewinnantheiles mit directer Vererbung näher eingegangen erden und zu diesem Behufe die Ableitung der einzelnen Formeln auf athematischem Wege derart zur Durchführung gelangen, dass die in unseren üheren Abhandlungen gebrauchten Bezeichnungen für die einzelnen Werthe aloge Anwendung finden.

Es wird daher $M = 100\,m$ den Gewinnantheil-Percentsatz, k den bezüghen percentuellen Zuschlag zur Prämie N repräsentiren.

Unter Zuhilfenahme der versicherungstechnischen Formen wird der sofort ginnende steigende Gewinnantheil dermassen zum Ausdrucke kommen müssen, ass blos die in den einzelnen Versicherungsjahren jeweilig Ueberlebenden in en Genuss desselben gelangen. Es ergibt sich daher nach Ablauf des ersten ersicherungsjahres $m\,N \,.\, D_{x+1}$ nach Ablauf des zweiten $2\,m\,N \,.\, D_{x+2}$ ach Ablauf des dritten $3\,m\,N\,D_{x+3}$ u. s. f. und schliesslich nach Ablauf s $n-1$ Jahres $(n-1)\;m\,N \,.\, D_{x+n-1}$ als jeweiliges Erforderniss für den zu ewährenden Gewinnantheil, so dass die Summe aller dieser Posten das Gemmterforderniss repräsentirt.

Die Anzahl aller je durch $M\%$ der Prämie ausgedrückten Gewinnantheiloten, welche innerhalb der gesammten Versicherungsdauer nach dem Principe s steigenden Gewinnantheiles an die Versicherten überhaupt zur Vertheilung langt wird daher durch nachstehende Summe dargestellt sein:

$$m\,N \,.\, [D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + 3\,D_{x+3} + \ldots\ldots + (n-1)\,D_{x+n-1}] =$$

$$m\,N \Big([D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1}] + $$

$$+ [D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots + D_{x+n-1}] $$

$$+ [D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots + D_{x+n-1}] + \ldots + [D_{x+n-2} + D_{x+n-1}] + D_{x+n-1}$$

Anmerkung: D bedeutet discontirte Zahlen der Lebenden.

$$= m\,N\,.\,\Big([\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+n}] + [\Sigma D_{x+2} - \Sigma D_{x+n}] + [\Sigma D_{x+3} - \Sigma D_{x+n}] + \ldots$$

$$\ldots + [\Sigma D_{x+n-2} - \Sigma D_{x+n}] + [\Sigma D_{x+n-1} - \Sigma D_{x+n}]\Big) =$$

$$= m\,N\,\Big(\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\,\Sigma D_{x+n}\Big)$$

Die Anzahl der zur Bestreitung dieses Erfordernisses beitragenden V sicherten gelangt in dem Ausdrucke

$$\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}$$

zur Darstellung, so dass der percentuelle Prämienzuschlag $k\,.\,N$ durch d Quotienten dieser beiden Werthe repräsentirt erscheint und daher, nachd N auf beiden Seiten ausser Calcul gelangt, durch die Formel

$$18)\qquad k = m\,.\,\frac{\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\,\Sigma D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}}$$

bestimmt ist. Diesem Resultate zufolge ergibt sich bei directer Vererbu beispielsweise für eine 20jährige gemischte Versicherung, abgeschlossen 30. Lebensjahre unter Zugrundelegung eines $4^0/_0$igen Zizsfusses, also für $x =$ und $n = 20$ und $P = 100\,p = 4$

$$k = 7{\cdot}6664\,.\,m$$

daher für einen 3percentigen steigenden Gewinnantheil, d. i. für $M = 100\,m =$ als percentuellen Prämienzuschlag, $k = 23^0/_0$. Im Vergleiche zu jenem indirecter Vererbung ohne Rücksicht auf die Sterblichkeit ermittelten Prämi zuschlage, welcher zur Bestreitung des gleichen Gewinnantheiles nothwen ist und unter gleichen Voraussetzungen bei 3percentigem Gewinnantheil, ist für $M = 100\,m = 3$, den Werth des percentuellen Prämienzuschla $k = 30{\cdot}7^0/_0$ (siehe Tab. A) involvirt, ergibt dies einen Unterschied, welc durch den vierten Theil des bei indirecter Vererbung nöthigen Prämi zuschlages zum Ausdrucke kommt; d. h. der Prämienzuschlag bei Berü sichtigung der Sterblichkeit ist für obiges Beispiel um den vierten T kleiner, als jener, welcher ohne Rücksicht auf dieselbe erforderlich ist. I repräsentirt also beiläufig einen um $^3/_4$ Percent steigenden Gewinnant welcher durch reine Vererbung bestritten wird. Wird nun erwogen, dass Sterblichkeit im höheren Alter eine relativ grössere ist, so lässt sich der Einf derselben im Durchschnitte derart abschätzen, dass durch Vererbung und Sto selbst unter Berücksichtigung einer entsprechenden Untersterblichkeit, ein um volles Percent steigender Gewinnantheil hiedurch hereingebracht werden k

inanztechnische Anleitung für die planmässige Tilgung der f Ausgabe von Hypothekar-Obligationen, Pfandbriefen und huldverschreibungen beruhenden Los- und Prämien-Anlehen.

IV.

Wie bereits hervorgehoben wurde, gestaltet sich der Modus der abfallenden ämie umso günstiger bei steigender Annuität, indem die Verlosung im össeren Umfange auf die späteren Tilgungsjahre, wo die Prämie bereits eine ringe Höhe besitzt, aufgeschoben wird, wodurch die Inanspruchnahme jenes fordernisses, welches zur Dotirung der Prämien dient, eine Reduction ährt. Auf diese Weise wird es möglich, entweder den nominellen Zinsfuss er die Anfangsprämie bei gleich grossem Aufwande höher anzusetzen und chermassen diesem Anlehensmodus eine vortheilhaftere Form hinsichtlich iner Rentabilitäts-Erspriesslichkeit zu geben. Wohl erscheint es auch manchen achen im Allgemeinen angemessen, die Rückzahlung grösserer Schulden gleich grossen Annuitäten zu stipuliren, doch ist in diesem Falle eine Ausme von der Regel umsomehr geboten, als die gegebenen Umstände hier timmend einwirken, die grössere Last auf die Zukunft zu übertragen, um r ausserordentlichen Beschaffenheit dieser Tilgungsform in vortheilhafter eise Genüge leisten zu können.

Dieser besondere Tilgungsmodus erheischt nun auch eine besondere Bendlung hinsichtlich seiner mathematischen Grundlagen und mögen dieselben rch nachfolgende Ausführungen zur Darstellung gelangen.

Es mag zu diesem Zwecke die Annahme gelten, dass ein Capital K bei $= 100\, p$ percentiger Verzinsung während einer Frist von n Jahren derart ückgezahlt werde, dass die am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität it jedem weiteren Tilgungsjahre um α grösser werde.

Die Annuitäten sind denn der Reihe nach in den einzelnen Jahren

$$a\,,\ a+\alpha\,,\ a+2\alpha\,,\ a+3\alpha\,,\ \ldots\ldots\ldots,\ a+(n-1)\,\alpha$$

l nachdem die gegenwärtigen Werthe aller dieser Zahlungen dem Capital K ich sein müssen, so wird für den Werth von α nachstehende Gleichung en:

$$K = \frac{a}{v} + \frac{a+\alpha}{v^2} + \frac{a+2\alpha}{v^3} + \ldots\ldots + \frac{a+(n-1)\,\alpha}{v^n}$$

er auch

$$K = a\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \ldots + \frac{1}{v^n}\right) + \frac{\alpha}{v}\left(\frac{1}{v} + \frac{2}{v^2} + \frac{3}{v^3} + \ldots + \frac{n-1}{v^{n-1}}\right)$$

und demgemäss nach erfolgter Summirung der Reihen

$$K = a \frac{v^n - 1}{v^n(v-1)} + \frac{\alpha}{v^n(v-1)} \left(\frac{v^n - 1}{v-1} - n \right)$$

worin $v = 1 + p$ ist.

Hieraus folgt nun der Werth des jährlichen Annuitäts-Zuwachses

$$7) \qquad \alpha = \frac{(v-1)\left[Kv^n - a \frac{v^n - 1}{v-1} \right]}{\frac{v^n - 1}{v-1} - n}$$

Unter Benützung dieser Formel lässt sich nun der Tilgungsplan sprechend construiren, indem auf Grund der gegebenen Annuität a fü erste Jahr auch diejenige für die weiteren Jahre festgestellt wird.

Mit Bezugnahme auf den Modus der abfallenden Prämie erfolgt die wendung dieser Form in der Weise, dass der in der Form 6) ausge Werth von a in obiger Formel substituirt wird, u. zw. unter gleich Berücksichtigung der hier massgebenden Tilgungs-Modalität, indem Form 7) anstatt v der Werth $w = 1 + \frac{N}{N'} p$ und anstatt K der Werth zur Geltung gelangt. Die betreffende Form wird dann folgendermass Darstellung gelangen

$$8) \qquad \alpha = K \frac{N'}{N} \left(\frac{w-1}{\frac{w^n - 1}{w-1} - n} \right) \left(1 - \frac{w^n - 1}{w-1} \left[\frac{1}{1 + \sum_{n=n}^{n=2} \frac{\left(\frac{w}{d} + 2 - n\right)!}{\left(\frac{1}{d} + 1 - n\right)!}} \right. \right.$$

Die Fragestellung für diesen Fall würde sich, um dies durch ei spiel zu erläutern, in folgender Weise gestalten: Es sei eine Anleih 30 Millionen Kronen, welche in 150.000 Obligationen zu 200 Kron Emission gelangt, in 30 Jahren bei 3percentiger Verzinsung zu tilgen wird sich diese Tilgung gestalten, wenn die Einlösung der Obligatione dem ersten Jahre mit einer 45percentigen Prämie erfolgt, deren Höhe in weiteren Jahre um $1\frac{1}{2}$ Percent abnimmt; zugleich aber auch die A nach dem ersten Jahre auf eine Million Kronen festgesetzt wird, um v zu Jahr um den Betrag von je α Kronen zuzunehmen, dessen Höhe a gegebenen Factoren zu bestimmen ist?

Dieses Princip lässt sich nun auch bei ausgesprochenen Lotterie-A in entsprechender Form zur Anwendung bringen, wenn auch im Allge der Modus derselben die gleichmässige Tilgung empfehlenswerther ers lässt, da mit derselben eine einheitliche Ausstattung der Treffer, welch Einfluss sowohl zu Beginn der Tilgung, also während der Begeb

ens in günstiger Weise geltend macht, als auch später auf dessen
rung in vortheilhafter Weise einwirkt, besser verbunden werden kann,
nd dieser Umstand bei einer hinsichtlich der Höhe der Treffer verfügten
igen Vertheilung, welche bei steigender oder fallender Beschaffenheit der
g nahezu unvermeidlich ist, blos in der einen oder anderen Weise wirksam
eltung gelangt. Dessenungeachtet bieten auch diese Formen der Tilgung
eile, welche vor jenen, mit der gleichmässigen Ausstattung der Treffer
denen, unter gewissen Umständen den Vorzug verdienen. Insbesonders
sich dies, wenn aus sachlichen Gründen, eine niedrigere Bemessung des
otirung der Treffer erforderlichen Fonds sich als nöthig erweist. In
Falle bietet dann die einseitige Vertheilung der Treffer ein Auskunfts-
um die anfängliche Rentabilität günstiger zu gestalten und auf diese
die Begebung der Titres leichter durchführbar zu machen. Ist jedoch
alität der Anleihe eine solche, dass eine Vorsorge in dieser Beziehung
Betracht kommen kann, dann kann es wieder unter Umständen die
t des Darlehenscontrahenten sein, den Schwerpunkt der Rentabilität
letzten Tilgungsjahre zu verlegen, um sich auf diese Weise die Mög-
t offen zu lassen, später im gegebenen Falle auf dem Wege der Con-
die Rentabilität durch Verlängerung der Tilgungsfrist den etwa ver-
en Zinsfussverhältnissen anzupassen.

er Massstab, welcher bei ausgesprochenen Lotterie-Anlehen hinsichtlich
rlegung des Schwerpunktes der Rentabilität auf die ersten oder letzten
der Tilgung anzulegen ist, ist ähnlichen Bedingungen unterworfen wie
ge, welcher den Modus der einfachen Prämien regulirt. Während jedoch
ipulirte Aufwand in diesem Falle zur gleichmässigen Dotirung aller
g verlosten Titres verwendet wird, concentrirt sich derselbe bei aus-
chenen Lotterie - Anlehen zu grösseren Quoten, welche in Form von
n auf einzelne, unter bestimmten Bedingungen verloste Titres entfallen,
alle übrigen mitverlosten Titres bei der Einlösung leer ausgehen oder
it geringfügigen Prämien bedacht werden. In diesem Falle ist dann der
stand der Spielchance berufen, jene Rentabilitäts - Erspriesslichkeit zu
n, welche durch die allgemeine Ausstattung der zur Verlosung gelangenden
mit kleinen Prämien sonst erzielt wird. Auch übt diesbezüglich überdies
gebildete Werth der Spielchance eine eigenthümliche Wirkung aus, welche
urch besondere Bevorzugung derartiger Titres beim Anlagecapital geltend
und ist in Folge dessen dieser Tilgungsmodus in vielen Fällen jedem
n vorzuziehen.

m Wesen selbst hängt die Wahl der Tilgungsform von verschiedenen
nden ab, unter welchen die Aufnahme des Anlehens erfolgt. Insbeson-
ie Beschaffenheit der Securitätsbedingungen und der mit denselben ver-
en Verzinsungsmodalitäten, sowie auch die Länge der Tilgungsdauer
e Höhe des angemessenen Begebungscourses können bestimmend ein-
auf die *jeweilige Form*, welche für die Tilgung der Anleihe vortheil-
scheint. Anlehen, denen eine besondere Securität zu Grunde liegt, un

deren Contrahent kraft seiner finanziell hervorragenden Position sich ei
hohen Creditfähigkeit erfreut, werden vom Anlagecapitale unter bescheiden
Zinsfussbedingungen stets absorbirt und machen daher die Anwendung aus
gewöhnlicher Tilgungsmodalitäten meist überflüssig. Hingegen wird dort,
es die Umstände erheischen, das Vertrauen des Capitales erst zu erwerb
und zu fördern, oder die Creditfähigkeit geltend zu machen und mit der vo
handenen Securität in Einklang zu bringen, ein finanztechnisches Eingreif
behufs vortheilhafter Ausstattung der Rückzahlungsbedingungen sich
zweckmässig erweisen. Dieselben bilden gewissermassen ein künstliches Co
rectiv gegenüber dem natürlichen Bestreben des Darlehenscontrahenten, de
effectiven Verzinsungsaufwand möglichst auf jenes Niveau herabzudrück
wo die Rentabilität das der vorhandenen Securität entsprechend zulässig
Mass nicht übersteigt.

In diesem Sinne wird auch die Bemessung der mit der Tilgung ve
bundenen Begünstigungen für den Capitalisten in Verbindung mit dem z
grundegelegten nominellen Zinsfusse den üblichen Verzinsungsaufwand ähnlich
Darlehenstitres eher zu unterbieten geneigt sein, welcher Umstand insbesond
bei Lotterieanlehen den Verhältnissen Rechnung trägt und in dem Vorhan
sein des eingebildeten Werthes der Spielchance seine Erklärung findet.

Mit der Beschaffenheit des gewöhnlichen Prämienanlehens dürfte es
gleichfalls vereinbar sein, ein diesbezügliches Bestreben des Darlehens-Con
henten in mehr oder weniger hohem Maasse zu befriedigen, doch hängt d
Disposition hiefür hier mehr von Factoren ab, welche auch im allgemein
Sinne hinsichtlich der Qualification einer Schuld von Einfluss sind.

Längere Tilgungsfrist und mässiger Begebungscours, welch' letzterer bi
dem Nominalwerthe oder correspondirenden Courswerthe einer mit Prämi
verbundenen Einlösung entspricht, bilden stets Vorzüge, welche vom anlag
bedürftigen Capital gewürdigt werden und welche gerne als Compensati
für einen mässigen Zinsenentgang acceptirt werden, falls Securität un
Rentabilität sonst miteinander in Einklang stehen.

Noch einige mathematische Grundlagen für den steigenden Gewinnantheil bei Lebensversicherungen.

VIII.

Den ermittelten Resultaten zufolge lässt sich daher annehmen, dass die eistung der Versicherungsbank durch den Modus der directen Vererbung ehr gebunden wird, als durch denjenigen der indirecten. Denn nach dem in r vorigen Abhandlung angeführten Beispiele ist für einen dreipercentigen eigenden Gewinnantheil mit directer Vererbung ein Zuschlag von 23 Percent r Prämie nothwendig, welcher bei Ausserachtlassung der Vererbung nahezu r einen um $2\frac{1}{3}$ Percent steigenden Gewinnantheil hinreichend ist und bei directer Vererbung blos die Ergänzung eines steigenden Gewinnantheiles in r Höhe von zwei Drittel Percent erfordern dürfte.

Aus diesem Grunde wird es genügen, wenn man für den Modus der ndirecten Vererbung blos 2 Percent steigenden Gewinnantheil, s durch den percentuellen Prämienzuchlag voll bedeckt in Anschlag bringt, ährend das zur Ergänzung des dritten Gewinnantheil-Percentes nöthige forderniss durch Vererbung hereingebracht zu werden vermag, so dass für n um 2 Percent steigenden Gewinnantheil eine Garantie geboten werden nnte, beim dritten Percent jedoch von einer solchen abzusehen wäre.

Eine nennenswerthe Ermässigung des Prämienzuschlages wird gewöhnlich erdies durch mehrjährige Verschiebung der Gewinnantheil-Fälligkeit erzielt, dem jene in den ersten Jahren der Versicherung zu gewährenden Gewinntheile ausser Betracht gezogen werden und erst nach einer drei- bis fünfhrigen Dauer derselben mit einer den eingezahlten Prämien entsprechenden ewinnantheil-Bemessung begonnen wird.

Jene diesem Umstande Rechnung tragende Form bei directer Vererbung sst sich dadurch herstellen, dass analog der ursprünglichen Form der steigende ewinnantheil für die ersten a Jahre vom gesammten Gewinnantheilerfordernisse r Form 18) in Abzug gelangt.

Demgemäss erhalten wir, nachdem das Gewinnantheil-Erforderniss bei fortigem Beginne der Vertheilung durch die Summe

$$m\,N\left(\Sigma\,\Sigma\,D_{x+1}-\Sigma\,\Sigma\,D_{x+n}-(n-1)\,\Sigma\,D_{x+n}\right)$$

rgestellt worden ist, die in Abzug zu bringende Summe der während der sten a Jahre in Wegfall kommenden Gewinnantheile in dem Ausdrucke

$$m\,N\left(\Sigma\,\Sigma\,D_{x+1}-\Sigma\,\Sigma\,D_{x+a+1}-a\,\Sigma\,D_{x+a+1}\right)$$

d da dieses Ersparniss an Gewinnantheilen auf die Zuschläge sämmtlicher icherter Personen seinen Einfluss ausübt, so wird der Nenner des Bruches elbe bleiben und

$$k = m \left(\frac{\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\Sigma D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} - \frac{\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+a+1} - a\Sigma D_{x+a+1}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} \right)$$

die gewünschte Form repräsentiren, welche durch Abkürzung das endgilt[ige]
Resultat

$$19) \qquad k = m \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a+1} + a\Sigma D_{x+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\Sigma D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}}$$

liefert. Dieser Form entsprechend wird also der erste Gewinnantheil nach d[em]
$a+1$ Jahre mit $(a+1)M\%$ der Prämie fällig, so dass die vorhergehend[en]
steigenden Gewinnantheile in Wegfall kommen. Es mag dieses Umstand[es]
deshalb Erwähnung geschehen, weil auch der Fall einer Verschiebung in d[em]
Sinne möglich ist, dass der nach a Jahren fällige Gewinnantheil mit M
einsetzt und mit der Steigerung erst von da ab beginnt, welcher Modus v[on]
demjenigen der Form 19) bedeutend abweicht.

Im Weiteren gelangt auch der Modus der temporären Steig[e]rung des Gewinnantheiles unter Berücksichtigung des directen Einflu[sses]
der Sterblichkeitsverhältnisse auf den Prämienzuschlag in folgender We[ise]
zur Geltung: Indem die Steigerung des Gewinnantheiles mit dem μten Jah[re]
eingestellt wird, also in den weiteren $n-\mu$ Jahren ein gleichmässiger Gew[inn]antheil zur Vertheilung gelangt, wird in den Formen 18) und 19) die[sem]
Umstande dadurch Rechnung getragen, dass vom μten Jahre angefangen [bis]
zum völligen Ablauf der Versicherung eine mit $M\%$ beginnende und je[des]
Jahr um weitere $M\%$ steigende Kürzung des gewöhnlichen normal verlaufend[en]
steigenden Gewinnantheiles veranlasst wird, was in den zur Darstellu[ng]
dieses Modus dienenden versicherungstechnischen Formen derart zum A[us]drucke gelangt, dass von der ursprünglichen Summe der zu gewährend[en]
steigenden Gewinnantheile, diejenige eines vom $(\mu+1)$ten Jahre beginnend[en]
steigenden Gewinnantheiles in Abrechnung kommt.

Die der Form 18) gemäss sich ergebende Summe der von Beginn [der]
Versicherung an flüssig werdenden steigenden Gewinnantheile lautet [n]
bekanntlich,

$$m\,N\,(\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\,\Sigma D_{x+n})$$

die Form für einen vom μ-ten Jahre beginnenden und während $n-\mu$ Jah[re]
fortlaufenden steigenden Gewinnantheil wird daher analog zu diesem lau[ten]

$$m\,N \left(\Sigma\Sigma D_{x+\mu+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n-\mu} - (n-\mu-1)\,\Sigma D_{x+n-\mu} \right)$$

daher als percentueller Prämienzahlung für einen nach dem ersten Jahre [der]
Versicherung beginnenden, durch μ Jahre fortlaufend steigenden und v[on]
da ab durch weitere $n-\mu$ Jahre gleichbleibenden Gewinnantheil

$$k = m \left[\frac{\Sigma\Sigma D_{x+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1)\, \Sigma D_{x+n}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} - \frac{\Sigma\Sigma D_{x+\mu+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n-\mu} - (n-\mu-1)\, \Sigma D_{x+n-\mu}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} \right]$$

d dementsprechend auch als percentueller Prämienzuschlag für einen nach m $(a+1)$ten Jahre der Versicherung beginnenden, durch μ Jahre fortlaufend eigenden und von da ab durch weitere $n-\mu-a$ Jahre gleichbleibenden ewinnantheil

$$) \quad k = m \left[\frac{\Sigma\Sigma D_{x+a+1} + a\, \Sigma D_{x+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n} - (n-1) D_{x+n}}{. D_x - \Sigma D_{x+n+1}} - \frac{\Sigma\Sigma D_{x+\mu+a+1} - \Sigma\Sigma D_{x+n-\mu-a} - (n-\mu-a-1)\, \Sigma D_{x+n-\mu-a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n+1}} \right]$$

Diese beide Formen entsprechen allen Anforderungen der auf directer ererbung beruhenden Combination des temporären steigenden Gewinn-theiles, und zwar die erstere für jene Fälle, wo der Gewinnantheil sofort ch Ablauf des ersten Jahres, die letztere hingegen, wo derselbe nach Ablauf hrerer Jahre flüssig zu werden beginnt.

Nachdem nun in obigen Ausführungen der Modus des steigenden Gewinn-theiles mit directer Vererbung ebenfalls einer ausführlichen Erörterung terworfen wurde, lässt sich ein Vergleich mit demjenigen der indirecten rerbung leichter anstellen und gelangt man demzufolge zu dem Resultate, ss ein im Vorhinein veranschlagtes und bei Bemessung des Prämienzuschlages comptirtes Ersparniss an Gewinnantheilen, wie es bei der Combination mit recter Vererbung Geltung erlangt, praktisch sich nicht in dem Maasse währt, wie ein, die nachträgliche Berücksichtigung der Ergebnisse der winnantheil-Vererbung bedingendes Verfahren, wie wir es bei indirecter rerbung constatiren können, da dieses in zweifacher Beziehung sich zweck-issiger gestaltet, und zwar bildet nicht nur die Zulässigkeit einer Garantie jene durch Zusatzprämien voll gedeckte Quote des steigenden Gewinn-theiles einen bedeutenden Vortheil gegenüber dem bei directer Vererbung rch allerlei Einflüsse gestörten Gleichgewichte zwischen der Leistung des rsicherten und der Gegenleistung der Versicherungsbank, welches im Gegen-ze eine Garantie der Letzteren vollständig ausschliesst, sondern auch hin-htlich der Zweckmässigkeit der Form überhaupt, ist der Modus des igenden Gewinntheiles mit indirecter Vererbung dem anderen vorzuziehen. es wird um so erklärlicher, als es sich nicht verkennen lässt, dass der aus n Ueberschüssen der Versicherungsgesellschaften sich eventuell ergebende winnantheil in Folge der misslichen Zinsfussverhältnisse zu versiegen drohe d daher für die Aufrechterhaltung der besonderen praktisch sich äussernden rtheile, welche mit der Prämienabstufung durch steigenden Gewinnantheil rbunden sind, auf diesem Wege vorgesorgt werden müsse, da in dem nstande der theilweisen Garantie auf die Eventualität einer späteren Steige-

rung des Prämienzuschlages Rücksicht genommen werden kann. Wohl is erwägen, dass die Mehrprämie, welche zur Ansammlung einer Dividende die nicht als Gewinn für den Versicherten anzusehen ist, doch können selbst m Rücksicht auf diesen Umstand die Vortheile der Versicherung mit abfallend Prämie in keinem Falle verkannt werden, wenn auch der erforderliche Zuschl seinen Einfluss auf die Anfangsleistung in unvortheilhafter Weise auszuüb geeignet ist. Die Wirkung dieses Einflusses kann jedoch durch die Ueb schüsse kaum mehr als gemildert werden.

Bildet ja doch schon heute die Cummulirung des aus den Ueberschüss sich ergebenden und des durch Prämienzuschlag erzielten Ergebnisses zume die Grundlage der üblichen Form der Versicherung mit steigendem Gewin antheil, denn mit wenigen Ausnahmen wird meistens für einen nicht garantirt 3percentigen, jährlich steigenden Gewinnantheil dem Versicherten eine Zuschlag prämie, die einem 2percentigen Gewinnantheil entspricht, selbst von leistung fähigen grossen Gesellschaften auferlegt, so, dass die aus der Vererbung u den Zinsenüberschüssen zu bestreitende Dividende auf ein Percent steigen sich beläuft, dessenungeachtet aber der Versicherte auf das Zugeständnis d Garantie, welche demselben sonst ohneweiters bis zu 2 Percent gewährt werd könnte, Verzicht zu leisten genöthigt ist. Ohne Garantie wird es mit der Z schwer werden, diesen Modus aufrechtzuerhalten, wenn die allgemeinen Zins Verhältnisse auch weiterhin sich derart gestalten sollten, wie es gegenw den Anschein hat. Nichtsdestoweniger dürfte dieses einmal mit der Leb versicherung verwobene Element der künstlichen Dividende seine erspriessli Wirkung auch fernerhin geltend machen, denn der Hauptzweck, welcher m dem Principe des steigenden Gewinnantheiles bei Lebensversicherungen ve bunden ist, gravitirt auch nach einem anderen Gesichtspunkte hin, als etw allein nach demjenigen der möglichsten Befriedigung der Dividendenansprü des Versicherten. Es handelt sich hier vielmehr um die wichtige Aufgabe, j durch die Versicherungsprämie in Anspruch genommene Leistung mit d Erwerbsfähigkeit des Menschen in Einklang zu bringen und überdies mit ein rascheren Amortisation des Risikos die Stabilität der Versicherung zu heb

Von diesem höheren Gesichtspunkte aus wurde auch diese Frage im A gemeinen behandelt und deren Wesen im Sinne einer die Institution der Leben versicherung fördernden Massregel aufgefasst. Nur so wurde es möglich, d Begriff der versicherungstechnisch vortheilhaften Ausgestaltung der Lebe versicherung mit demjenigen einer praktisch zweckdienlichen Norm dersell harmonisch zu verbinden, ohne mit den verschiedenartigen divergirend Tendenzen des Concurrenz-Getriebes, welche gegenüber der Vitalität die Gegenstandes zurücktreten müssen, zu collidiren.

Riskengrenze für die Versicherung gegen Verlosungsverlust.

Die entsprechende Zusammenfassung der Versicherungen nach ihrer tiven und quantitativen Beschaffenheit im Verhältnisse ihrer Schaden- bildet für die moderne Assecuranz die Grundlage einer rationellen abung. Verstanden wird unter der qualitativen Beschaffenheit der natische Begriff des Risikos, während die Höhe des mit demselben denen Schadens dessen quantitative Beschaffenheit kennzeichet. Das , welches hier im Allgemeinen zur Geltung gelangt, ist die möglichste ichung der Risken unter einander innerhalb des gesammten Verngsstockes mit Rücksicht auf die gegenseitige Ergänzung des höheren tiven durch das mindere quantitative Risico und umgekehrt; d. h. es eine verhältnissmässige Vertheilung der Versicherungsbeträge nach der igen qualitativen Beschaffenheit der Einzelrisken platzgreifen, damit den erungen Rechnung getragen werden kann. Jeder in eigene Gefahr mmene Versicherungsbetrag muss mit Rücksicht auf die Schadengefahr Rahmen eines bestimmten Durchschnittsrisicos bewegen, dessen Ausdurch den Versicherungsstock selbst gekennzeichnet ist und welches nde Dehnbarkeit besitzt, um mässigen Abweichungen von der Norm um zu gewähren. Soweit nämlich diese Bedingung das Einzelrisico in tiver Beziehung betrifft, ist ein mässiges Ueberschreiten der Durchsgefahr in der Praxis nicht nur nicht zu vermeiden, sondern auch einschneidend in seiner diesbezüglichen Wirkung. Hingegen wirkt das ältnissmässig hohe quantative Risico, dort, wo auch die Qualität deseine höhere Schadengefahr kennzeichnet, besonders ungünstig auf die Beschaffenheit des Versicherungsstockes. Dies äussert sich namentlich hem Maasse bei sogenannten cumulirten Risken, deren Wesen darin , dass mehrere Risken von gemeinsamer qualitativer Gefahr zu einem n Risico sich gestalten, so dass dasselbe ein Vielfaches des zulässigen tativen Risicos bildet.

Im Allgemeinen kommen cumulirte Risken vorwiegend in der Feuererung vor, u. zw. äussert sich dies hier derart, dass mehrere, knapp nder anstossende Objecte im Falle eines Brandes eine gemeinsame Ge- bilden geeignet sind und solchermassen in den versicherten Summen zelnen Objecte ein einziges Risico erblickt werden muss und daher ur von diesem Gesichtspunkte zu beurtheilen ist. Hier ist dann nicht as qualitative Risico der einzelnen Objecte für sich massgebend, sonder ge des Gesammtcomplexes, dessen qualitative Schadengefahr dem

entsprechend zu berücksichtigen ist. Während sich also unter sonstigen ständen die quantitative Schadengefahr auf die einzelnen Objecte ver mit deren specieller qualitativer Riskenbeschaffenheit sich ergänzend, dieselbe hier für alle Objecte von einer einzigen qualitativen Gefahr ab diese Weise einen vielfach grösseren Versicherungsbetrag auf ein Risic einigend.

Der gleiche Umstand tritt nun bei der Versicherung gegen Verlos verlust in besonders auffallender Weise hervor, indem bei der Serienverl 100 Einzelrisken eine gemeinsame qualitative Gefahr aufweisen, welche i Wahrscheinlichkeit des Gezogenwerdens der betreffenden Seriennummer zum Ausdrucke kommt. Auf diese Weise erfolgt die Cumulirung von hu Versicherungen auf ein einziges qualitatives Risico, was offenbar ein verhältniss mit Rücksicht auf andere einfache Risken bildet. Diesem U stande wird nun in neuerer Zeit, soweit die Versicherung ganzer Serie Betracht kommt, durch Theilung dieser cumulirten Risken unter mehrere sicherer abgeholfen, u. zw. geschieht dies vertragsmässig, so dass der zelne in der Lage ist, das Risico entsprechend zu vertheilen, was in der zunehmenden Frequenz dieser Versicherungsart umso eher möglich als bei jenen mit Serienziehungen ausgestatteten Loskategorien auch die sicherung einzelner Lose zur Cumulirung einer mehr oder weniger g Anzahl von Stücken mit gleicher Seriennummer führt, so dass auf diese W wenigstens annähernd eine Riskenausgleichung möglich wird.

Je mehr Versicherer sich an einer solchen Riskentheilung betheili desto geringer wird die Anzahl von Stücken gleicher Serie, welche das R des Einzelnen bilden. Hingegen kann derjenige Versicherer, dessen sicherungsstock eine höhere Belastung hinsichtlich quantitativer Ri beschaffenheit verträgt, seinen Antheil entsprechend vergrössern. Auf Weise wird dem Princip einer annähernd gleichmässigen Vertheilung Risken, wenigstens soweit dieselben sich auf eine bestimmte Loskate beschränken, Genüge geleistet.

Handelt es sich um einen Versicherungsstock, welcher zu gleicher mehrere Kategorien von Losen oder verlosbaren Werthpapieren umfasst wird dem Wesen der qualitativen und quantitativen Beschaffenheit des Ri eine Rolle im erweiterten Sinne zugedacht sein. Das Risico, dessen qualit Beschaffenheit eine günstigere ist, wird naturgemäss eine höhere quantit Belastung vertragen. Umgekehrt wird aber auch ein Risico, dessen qualit Beschaffenheit eine ungünstige ist, quantitativ eine Beschränkung erheis Dieser Umstand ist nun geeignet, hinsichtlich der Vertheilung der Ri welche aus mehreren Los-Kategorien bestehen, in vielen Fällen zur ge seitigen Ausgleichung beizutragen. Einzelne Los-Kategorien von beso guter Classirung, deren Coursstand aus Securitäts- oder sonstigen von Spielchance unabhängigen Gründen, den kleinsten Trefferbetrag stark ü steigt, bilden ein hohes quantitatives Risico, können jedoch in Bezug die qualitative Beschaffenheit desselben sich besonders günstig erwei

Andererseits gibt es wieder Kategorien von Losen und verlosbaren Werthpapieren, bei denen sowohl der eventuelle Coursverlust, als auch die Wahrscheinlichkeit desselben verhältnissmässig sehr hoch sich gestaltet. Insbesondere wird dies der Fall, wenn die Tilgung der Losanleihe sich ihrem Ende nähert und demzufolge nur mehr eine geringe Anzahl von Stücken im Umlaufe sich befindet.

Die offenbare Ueberschreitung der durchschnittlichen Riskengrenze, welche daselbst in Folge des Zusammenwirkens eines hohen qualitativen wie auch quantitativen Risicos eintritt, findet nun ein Gegengewicht in der Riskenbeschaffenheit solcher Loskategorien, welche im erstgenannten Sinne den Versicherungsstock günstig zu beeinflussen geeignet sind.

Die Möglichkeit der gegenseitigen Riskenausgleichung ist umso naheliegender, als es überhaupt in der Natur eines rationellen Spielplanes liegt, nicht nur eine stetige Abnahme der effectiven Gewinnstchance mit der Abnahme der circulirenden Stücke eintreten zu lassen, wodurch gegen Ende der Tilgungsperiode eine Saturirung des Coursstandes bewirkt und solchermaassen die Steigerung des quantitativen Risicos begrenzt wird, sondern auch die stetig zunehmende Verlustchance auf eine immer geringer werdende Anzahl von circulirenden Stücken zu beschränken. Infolge dessen regulirt sich die Anzahl der zur Versicherung gelangenden Stücke hinsichtlich ihrer den Versicherungsstock beeinflussenden Riskenbeschaffenheit von selbst, u. zw. im ausgleichenden Sinne, indem jene Loskategorien, deren Circulation eine grosse ist, im relativen Sinne ein günstigeres Risico bilden, als diejenigen, deren Verlosung sich bereits dem Ende nähert und deren Circulation nur mehr eine geringe ist. Im Allgemeinen ist es aber gerade die stetig zunehmende Verlustchance, welche ein starkes Gegengewicht bezüglich der Coursentwicklung bildet, deren Ursache gewöhnlich in der gleichzeitigen Zunahme der Gewinnstchance liegt.

Demzufolge besteht in der Steigerung des qualitativen Risicos ein natürliches Hemmniss für die Entwicklung des Coursstandes und somit auch für den übermässigen Wachsthum des quantitativen Risicos. Immerhin kann dieser Wachsthum wieder durch andere Umstände gefördert werden, doch wird stets der mit der Courssteigerung verbundene gleichzeitige Zuwachs des eventuellen Coursverlustes dessen Begrenzung bedingen. Resumiren wir dies, so ergibt sich folgendes Ergebniss: Während der einzelnen Stadien der Verlosung wirkt die Beschaffenheit des Verlosungsplanes einerseits und der Umfang der Loscirculation andererseits bestimmend auf das veränderliche Wesen sowohl des qualitativen als auch des quantitativen Risikos, während das Letztere überdies noch von der Securität, guten Classirung und sonstigen finanztechnischen Qualification des Losanlehens abhängt. Mit der Abnahme der vorhandenen Losanzahl steigt sowohl die Verlust- als auch die Gewinnstchance, welch' letztere eine entsprechende Zunahme des Coursstandes bedingt und in Folge dessen eine Steigerung der quantitativen Risicos hervorruft. Dieser Wirkung ist jedoch gleichzeitig jene der zunehmenden Verlustchance gegenüber, wel-

den Coursstand ungünstig beeinflussend, diese Steigerung hemmt und derselben eine Grenze setzt, zugleich aber auch den Wachsthum des qualitativen Risicos fördert.

Bezeichnet a das qualitative Risico, also die Wahrscheinlichkeit des kleinsten Treffers, b hingegen die Höhe des Coursverlustes im Falle des Gezogenwerdens mit dem kleinsten Treffer, resp. das quantitative Risico, dann ergibt das Product dieser beiden Factoren $(a\ b)$ den Ausdruck des Gesammtrisicos also den Massstab für die effective Schadengefahr. Da nun aber in $a \cdot b$ die entsprechende Assecuranz-Netto-Prämie zum Ausdrucke gelangt, so lässt sich in dieser jener Massstab erblicken, nach welchem die Beschaffenheit der Einzelrisken mit Rücksicht auf die Qualität des Versicherungsstockes zu beurtheilen ist.

Kommen nun in einem Versicherungsstocke mehrere Loskategorien in Betracht, so wird deren Frequenz bei der Versicherung im Verhältnisse ihrer jeweiligen Stücke-Circulation angenommen werden müssen. Wird nun erwogen, dass zwei verschiedene qualitative Risiken a und a_1 sich annähernd im umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden an der Verlosung theilnehmenden Stückezahlen befinden, so gelangt man zu der Conclusion, dass für die approximative Ausgleichung des Risicos zweier verschiedenen Loskategorien, das Verhältniss der quantitativen Risken allein massgebend wird in dem Momente, wo die Steigerung der Wahrscheinlichkeit des Coursverlustes aus der Abnahme der mitspielenden Lose entspringt. Wohl wird diese Annahme nicht in allen Fällen den Umständen vollends Rechnung zu tragen geeignet sein, doch dürfte sie stets annähernd dem Zwecke entsprechen, umsomehr, als in der Praxis auf eine genaue Ausgleichung nicht reflectirt werden kann.

Besondere Bedeutung erlangt die Riskenbelastung des Versicherungsstockes durch jene Loskategorien, deren Verlosung sich ihrem Ende nähert. In dieser Periode erlangt sowohl die Wahrscheinlichkeit des Gezogenwerdens, also das qualitative Risiko, wie auch der eventuelle Coursverlust als quantitatives Risiko, den höchsten Stand. Aus diesem Grunde wird nun die Versicherungs-Gelegenheit relativ in bedeutend höherem Masse in Anspruch genommen werden als dies während der vorhergehenden gesammten Ziehungsepoche der Fall war. Immerhin wird jedoch selbst diese höhere Frequenz in ausgiebiger Weise durch die natürliche Abnahme der Stücke beschränkt, so dass selbst in diesem Falle eine Ausgleichung in qualitativem Sinne möglich erscheint. Wird ferner erwogen, dass auch das Wesen des quantitativen Risikos hier den Ramen des Normalen übersteigt und dementsprechend das Riskenverhältniss beeinflusst, so kann man auch bei dieser Sachlage jene Regel gelten lassen. Unter allen Umständen ist aber diese Form ihrer Einfachheit halber jeder anderen Ausgleichungsmethode vorzuziehen.

Auf dem Ergebnisse dieser Ausgleichung beruht die Ermittlung des durchschnittlichen Risicos eines aus mehreren Loskategorien zusammengesetzten Versicherungsstockes wie auch die mit demselben verbundene zulässige eventuelle Belastung durch Serienantheile.

---

empirische Approbation unserer Hypothese, betreffend die ematisch-physiologische Ableitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze.

uf allen Gebieten der Wissenschaft gibt es Fragen, deren Beantwortung rectem deductivem Wege theils aus Gründen unzureichender wissen- icher Behelfe, theils wegen des abstracten Wesens ihres Gegenstandes ossen Schwierigkeiten verbunden ist. In diesem Falle wird zur Hypothese en, einem Auskunftsmittel, welches eine Art methodischer Annäherung ahrheit auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Forschung bildend, die Wahrscheinlichkeit entsprechender Suppositionen eine Lösung vor- t. Findet nun eine derartige Hypothese auf dem Wege deductiver ung oder wissenschaftlicher Erfahrung ihre Bestätigung, indem ihre ate mit der Wirklichkeit thatsächlich nach allen Richtungen hin über- men, dann tritt sie aus dem Rahmen des Wahrscheinlichen in den- des Positiven und wird zum wissenschaftlichen Grundsatze.

m Jahre 1887*) unternahmen wir in diesem Werke einen Versuch, aus rümmungsverhältnissen jener Curve, welche den Sterblichkeitsverlauf lt, Anhaltspunkte zu schaffen, mittelst deren man zu einer hypothe- Darstellung der durchschnittlichen Validitätsverhältnisse beim Menschen en könnte. Die Anregung zu dieser Idee gaben verschiedene Umstände, in dem Wesen des Sterblichkeitsverlaufes liegend, unsere besondere rksamkeit erregten und bei denen wir uns des Eindruckes einer merk- gen Uebereinstimmung mit bekannten physiologischen Erscheinungen im fe des menschlichen Lebens nicht entschlagen konnten.

o nahm in erster Linie unsere Aufmerksamkeit die interessante Ent- g in Anspruch, dass der Wendepunkt der vorerst concav und dann con- ur Abscissenaxe verlaufenden Curve der ferneren Lebensdauer-Wahr- lichkeiten mit seiner Abscisse in dasjenige Alter fiel, welches nach logischen Erfahrungen als mittlerer Höhepunkt der Entwicklung licher Lebenskraft angesehen wird.

ie nächste Folge hievon war, dass wir auch der sonstigen Beschaffenheit etreffenden Curve gegenüber nicht gleichgiltig blieben und dieselbe äheren Untersuchung unterzogen. Hier kam uns der bekannte Umstand ei zunehmendem Alter consequent steigenden Wahrscheinlichkeit einer n Gesammtlebensdauer zur Hilfe, auf dessen Grundlage fussend, wir Licht in die Sache bringen konnten. Weitere Untersuchungen ergaben hatsächlich, dass zwischen der Krümmung der Curve der ferneren sdauer - Wahrscheinlichkeiten und dem Verlaufe der menschlichen ät ein gewisser Conex bestehe und so war denn auch die Richtung

*) Siehe „Eine technische Basis für die Alters- und Invaliditäts-Versicherung" f. Seite *61—64 und 69—76.*

vorgezeichnet, nach welcher hin sich unsere ferneren Reflexionen zu beweg hatten. Solchermassen ist es uns endlich gelungen, System in die Sache bringen, indem wir den natürlichen Verlauf der Validität in seinen urs lichen Bedingungen wissenschaftlich darzustellen und mit demselben geometrischen Wahrnehmungen ihrer jeweiligen Bedeutung gemäss in Einkla zu bringen uns bestrebten.

Die Resultate, zu denen wir auf diesem Wege gelangten, waren v überraschender Tragweite für das Wesen der Untersuchung, indem sie einem förmlichen mathematischen Systeme der im Verlaufe des menschlich Lebens geltenden Validitätsbedingungen gipfelten.

Es stellte sich heraus, dass das Wesen der theils concaven, theils co vexen Stellung der Curve der ferneren Lebensdauer-Wahrscheinlichkeiten Abscissen-Axe in dem zunehmenden, bezw. abnehmenden Verlaufe der Lebe kraft, resp. deren Verhältnisszahlen in zwei verschiedenen Altersabschnitt des menschlichen Lebens begründet ist, während der Wendepunkt dieses V laufes zugleich den Höhepunkt der mittleren Lebenskraft bedeutet.

Ferner liess sich die merkwürdige Thatsache constatiren, dass Erscheinung des mit dem Alter zunehmenden mittleren wahrscheinlich erreichenden Lebensalters mit einer im geraden Verhältnisse zu dem stehenden Steigerung der Lebenszähigkeit in innigem Zusammenhange und infolge dessen sich auch dieser Umstand durch entsprechende Verhält zahlen, welche in den Differenzen der einander ablösenden Lebensalter-Wa scheinlichkeiten zum Ausdrucke gelangen, mathematisch kennzeichnen

Auf Grundlage dieser interessanten Ergebnisse war es nicht schwer, organischen Zusammenhang dieser beiden durch Verhältnisszahlen mat matisch darstellbaren Elemente der menschlichen Wiederstandsfähigkeit f zustellen und so gelangten wir zu dem merkwürdigen Resultate, einer mathematische Formen gekleideten Theorie des Validitäts-Verlaufes.

So gelangte die Lebensenergie des Menschen allgemein durch den Q tienten des Verhältnisses der Lebenskraft zur Lebenszähigkeit, resp. de Verhältnisszahlen zum Ausdrucke, während das Wesen der Resistenz d die Differenz der beiden ihre rechnungsmässige Darstellung erfuhr.

Eine weitere Untersuchung führte zu dem wichtigen Ergebnisse der wis schaftlichen Feststellung eines constanten Werthes der Summe jener mit Alter an und für sich veränderlichen Verhältnisszahlen der Lebenskraft Lebenszähigkeit, innerhalb gleich grosser Lebensintervalle, so dass nun eine feste Grundlage für eine mathematische Darstellung des Werthes für mittleren Validitäts-Coëfficienten in den einzelnen Lebensstadien gegeben w

Hiemit war auch die Grundlage für ein entsprechendes theoreti Princip geschaffen, welches durch folgende von uns aufgestellte grundleg Sätze repräsentirt erscheint:

1. *Der Validitäts-Coëfficient V ist das Product d Lebensenergie E und der Verhältnisszahl k der frei v fügbaren Lebenskraft.*

2. Der Validitäts-Coëfficient V ist das Product der bensenergie E und der körperlichen Widerstandshigkeit (Resistenz) R, dividirt durch die für gleiche bensintervalle constante Summe der Verhältnisshlen der Lebenskraft K und Lebenszähigkeit Z.

3. Die mittleren Validitäten in den einzelnen Lebensadien verhalten sich zu einander wie die Producte der tsprechenden Lebensenergien und frei verfügbaren benskräfte oder wie die Producte der entsprechenden bensenergien und körperlichen Widerstandsfähigiten.

Auf Basis dieser Normen konnte nun eine tabellarische Zusammenstellung r Validitätscoëfficienten für die einzelnen Alter durchgeführt werden, deren here Betrachtung zu interessanten Folgerungen führte. Es ergab sich mlich, dass die Validität das Menschen bis etwa zum 43. Lebensjahre, also zu dem bekannten Wendepunkte sich in aufsteigender Richtung bewegt, von da ab eine continuirliche Abnahme zu erleiden; so dass dieselbe vischen dem 66. und 67. Lebensjahre vollständig schwindet, um sodann den rad der Validität im negativen Sinne, d. h. der Invalidität des Menschen den ferneren Lebensstadien zu kennzeichnen.

Mit Hilfe dieser Validitätscoëfficienten sollte nun ein versicherungstechches System geschaffen werden, welches sich dem Principe der Versichegsidee unterordnet. Dem Wesen dieser Coëfficienten gemäss, musste in denben der Massstab der jeweiligen Durchschnitts-Validität des Individuums den einzelnen Altersstadien erblickt werden, so dass sich im Producte derben mit der Zahl der Ueberlebenden in den entsprechenden Lebensaltern, beziehungsweise relative Lebenspotenz der betreffenden Altersclassen in sseinheiten äusserte. Wir gelangten daher mittelst Multiplication der Zahlen Lebenden in den einzelnen Altern mit den entsprechenden Validitätsëfficienten zu einer Tafel, welche die Anzahl der Validitäts-Einheiten in den zelnen Altersclassen darstellte und auf diese Weise die Grundlage für die mittlung der wahrscheinlichen Rüstigkeitsdauer des Menschen lieferte.

Nunmehr konnte es nicht schwer sein, zu einem geeigneten Modus zu angen, mittelst dessen für die jeweilig erforderlichen Baarwerthe der validenrente, die versicherungstechnische Grundlage geschaffen werden unte. Es musste sofort klar sein, dass in der Differenz zwischen der ferneren hrscheinlichen Lebensdauer und der ferneren wahrscheinlichen Rüstigkeitsaer diejenige Periode liege, innerhalb welcher der Versicherte in dem nusse der Invaliditäts-Rente verbleiben muss und so konnte diese wahreinliche Validitäts-Ueberlebensdauer als Grundlage für die Berechnung der arwerthe der Invaliditätsrente dienen. Zu besserem Verständnisse mag die zügliche Tafel*) hier nochmals zur Anschauung gelangen:

*) Siehe: „Die Prämienberechnung für die Alters- und Invaliditätsrente" [illegible] ite 31.)

Tabelle I.

Lebensalter x	Lebende L_x	Validitäts-Coëficient V_x	Validitäts-Einheiten $L_x \cdot V_x$	Summe der Validitäts-Einheiten $\Sigma(L_x \cdot V_x)$	Wahrscheinli[illegible] fernere Rüsti[illegible]keitsdauer $v_x = \frac{\Sigma(L_{x+1} \cdot V_{[illegible]})}{L_x \cdot V_x}$
18	94620	+0·89263	84460·66	3,100.304·27	35·70708
19	93945	+0·91069	85554·77	3,015.843·62	34·25044
20	93268	+0·92461	86236 53	2,930.288·85	32·97977
21	92588	+0·93936	86973·46	2,844.052·32	31·70023
22	91905	+0·95504	87772·95	2,757.078·86	30·41149
23	91219	+0·96737	88242·52	2,669.305·91	29·24966
24	90529	+0·98094	88803·52	2,581.063·39	28·06487
25	89835	+0·99512	89396·61	2,492.259·87	26·87866
26	89137	+1·00652	89718·17	2,402.863·26	25·78235
27	88434	+1·01882	90098·33	2,313.145·09	24·67456
28	87726	+1·02788	90171·80	2,223.046·76	23·65346
29	87012	+1·03850	90361·96	2,132.874·96	22·60368
30	86292	+1·04581	90245·04	2,042.513·00	21·63205
31	85565	+1·05477	90251·11	1,952.267 96	20·63150
32	84831	+1·06076	89985·33	1,862.016·82	19·69240
33	84089	+1·06799	89806·21	1,772.031·49	18·7317[illegible]
34	83339	+1·07671	89731 93	1,682.225·28	17·747[illegible]
35	82581	+1·06024	87555·68	1,592.493·35	17·188[illegible]
36	81814	+1·04983	85190·79	1,504.937·67	16·62717
37	81038	+1·06677	86448·91	1,419.746·88	15·42296
38	80253	+1·08550	87014·63	1,333.297·97	14·32268
39	79458	+1·10503	87803·47	1,246.283·34	13·19401
40	78653	+1·12670	88618·34	1,158.479 87	12·04493
41	77838	+1·13617	88437·20	1,069.861·53	11·10071
42	77012	+1·14093	87865·30	981.424·33	10·17078
43	76173	+ 1·12917	86012·27	893.659·03	9·38990
44	75316	+1·10146	82957·56	807.646 76	8·73567
45	74435	+1·06187	79040·29	724.689·20	8·16861
46	73526	+1·00594	73962·74	645.648·91	7·72938
47	72582	+0·94972	68932·58	571.686·17	7·29341
48	71601	+0·89132	63819·40	502.753·59	6 87776
49	70580	+0·83361	58836·19	438.934·19	6·43060
50	69517	+0·77483	53863·86	380.098 00	6·05664
51	68409	+0·70358	48131·20	326.234·14	5·77802
52	67253	+0·65822	44267·27	278.102·94	5·28236
53	66046	+0·59665	39406·35	233.835·67	4·93396
54	64785	+0·54152	35082·37	194.429·32	4·54208
55	63469	+0·49084	31153·12	159.346·95	4 11496
56	62094	+0·43167	26804·12	128.193·83	3·78262
57	60658	+0·38263	23209·57	101.389·71	3·36844
58	59161	+0·33732	19956·19	78180·14	2 91759
59	57600	+0·28461	16393·54	58223·95	2·55164
60	55973	+0·23957	12409·45	41830·41	2·37085
61	54275	+0·19415	10537·49	29420·96	1·79[illegible]
62	52505	+0·15037	7895·18	18883·47	1 39177
63	50661	+0·11000	5572·71	10988·29	0·97189
64	48744	+0·07178	3498·84	5415·58	[illegible]
65	46754	+0·03658	1710·26	1916·74	[illegible]
66	44693	+0·00462	206·48	206·48	[illegible]

Tabelle II.

Lebensalter x	Wahrscheinliche fernere Lebensdauer w_x	Wahrscheinliche fernere Rüstigkeitsdauer v_x	Wahrscheinliche Validitäts-Ueberlebensdauer $w_x - v_x = d_x$	Baarwerth B_x für die Jahresrente 1, während der mittleren Validitäts-Ueberlebensdauer
18	42·37112	35·70708	6·66404	5·98005
19	41·67567	34·25044	7·42523	6·57788
20	40·97818	32·97977	7·99841	7·00081
21	40·27914	31·70023	8·57891	7·42857
22	39·57848	30·41149	9·16699	7·85195
23	38·87612	29·24966	9·62646	8·17616
24	38·17244	28·06487	10·10757	8·50907
25	37·46732	26·87866	10·58866	8·83625
26	36·76072	25·78235	10·97837	9·11347
27	36·05294	24·67356	11·37938	9·36032
28	35·34390	23·65346	11·69044	9·56209
29	34·63394	22·60368	12·03026	9·77969
30	33·92291	21·63203	12·29088	9·94477
31	33·21115	20·63150	12·57965	10·12555
32	32·49850	19·69240	12·80610	10·26584
33	31·78526	18·73172	13·05354	10·41779
34	31·07131	17·74726	13·32405	10·58226
35	30·35651	17·18835	13·16816	10·46359
36	29·64332	16·62717	13·01615	10·39494
37	28·93116	15·42296	13·50820	10·69320
38	28·21733	14·32268	13·89465	10·92346
39	27·50168	13·19401	14·30767	11·16572
40	26·78417	12·04493	14·73924	11·41467
41	26·06461	11·10071	14·96390	11·54265
42	25·34417	10·17078	15·16339	11·65534
43	24·62329	9·38990	15·23339	11·69471
44	23·90350	8·73567	15·16783	11·65784
45	23·18462	8·16861	14·91781	11·51650
46	22·47307	7·72938	14·74369	11·43402
47	21·76535	7·29341	14·47194	11·26098
48	20·06356	6·87776	14·18580	11·09465
49	19·36826	6·43060	13·93766	10·94887
50	19·67972	6·05663	13·62308	10·76103
51	18·99846	5·77802	13·22044	10·51948
52	18·32526	5·28236	13·04290	10·41130
53	17·65992	4·93396	12·72596	10·21631
54	17·00366	4·54208	12·46158	10·05179
55	16·35622	4·11496	12·24126	9·91340
56	15·71744	3·78262	11·93482	9·71890
57	15·08953	3·36844	11·72109	9·58184
58	14·47136	2·91759	11·55377	9·47374
59	13·86285	2·55164	11·31121	9·31576
60	13·26652	2·37085	10·89567	9·04163
61	12·68157	1·79203	10·88954	9·02480
62	12·10908	1·39177	10·71731	8·90206
63	11·54983	0·97180	10·57803	8·82903
64	11·00406	0·54782	10·45624	8·74683
65	10·47244	0·12073	10·35171	8·67595

In einer in letzterer Zeit erschienenen Abhandlung über Invaliditä Versicherung*) finden wir nun folgende Ausführungen:

Zur Feststellung der jährlichen Beiträge der Invaliditäts-Versicherung bekanntlich der Baarwerth der Invalidenrente eines Activen (gegen Invalid Versicherten), zahlbar während der Dauer der Invalidität, erforderlich. Die Baarwerth lässt sich auf statistischer Grundlage unter Anwendung der Form

$$E_{(x)} = \frac{J_{(x+1)}{}^iR_{(x+1)}\,\rho + J_{(x+2)}\,{}^iR_{(x+2)}\,\rho^2 + J_{(x+3)}\,{}^iR_{(x+3)}\,\rho^3 + \ldots}{A_{(x)}}$$

berechnen. Der Capitalswerth der Invalidenrente ${}^iR_{(x)}$, der natürlich von d Sterblichkeit der Invaliden abhängig ist, ist hier durch

$${}^iR_{(x)} = \frac{J_{(x)} + J_{(x+1)}\,\rho + J_{(x+2)}\,\rho^2 + \ldots}{J_{(x)}}$$

bestimmt worden. Will man bei Berechnung des Werthes $E_{(x)}$ mit Hilfe d gegenwärtigen Werthe der Leibrente $R_{(x)}$, der Activitätsrente ${}^aR_{(x)}$, sow der Invalidenrente ${}^iR_{(x)}$ vornehmen, so empfiehlt sich folgendes Verfahren:

Bezeichnen wir die Zahl der vorhandenen Invaliden am Schlusse d 1., 2., 3. Versicherungsjahres durch $P_{(x+1)}$, $P_{(x+2)}$, $P_{(x+3)}$, so ergibt sich:

$$E_{(x)} = \frac{P_{(x+1)}\,\rho + P_{(x+2)}\,\rho^2 + P_{(x+3)}\,\rho^3 + \ldots}{A_{(x)}}$$

Ist die Anzahl der Lebenden $L_{(x)}$ gleich der Anzahl der Activen $A_{(x)}$, s

$$P_{(x)} = O$$
$$P_{(x+1)} = A_{(x)} - A_{(x+1)} - (L_{(x)} - L_{(x+1)})$$
$$P_{(x+2)} = A_{(x+1)} - A_{(x+2)} - (L_{(x+1)} - L_{(x+2)})$$

Es ist demnach: $P_{(x+1)} = L_{(x+1)} - A_{(x+1)}$ und $P_{(x+2)} = L_{(x+2)} - A_{(x+2)}$

Ist $L_{(x)} > A_{(x)}$ und folglich $\frac{L_{(x)}}{A_{(x)}} = 1 + \frac{P_{(x)}}{A_{(x)}}$,

so ist bei Ermittlung des Baarwerthes $E_{(x)}$ noch der Werth $P_{(x)}\,({}^iR_{(x)} - 1)$ z berücksichtigen. Aus der Gleichung:

$$\frac{P_{(x+1)}\,\rho + P_{(x+2)}\,\rho^2 + P_{(x+3)}\,\rho^3 + \ldots + P_{(x)}\,({}^iR_{(x)} - 1)}{A_{(x)}} =$$

$$= \frac{(L_{(x+1)} - A_{(x+1)})\,\rho + (L_{(x+2)} - A_{(x+2)})\,\rho^2 + (L_{(x+3)} - A_{(x+3)})\,\rho^3 + \ldots}{A_{(x)}}$$

ergibt sich:

$$E_{(x)} + \frac{P_{(x)}}{A_{(x)}}\,({}^iR_{(x)} - 1) = R_{(x)} - {}^aR_{(x)} + \frac{P_{(x)}}{A_{(x)}}\,(R_{(x)} - 1)$$

$$E_{(x)} = R_{(x)} - {}^aR_{(x)} + \frac{P_{(x)}}{A_{(x)}}\,(R_{(x)} - {}^iR_{(x)})$$

Aus der folgenden Uebersicht gehen die Baarwerthe der in jährliche Terminen zahlbaren Leibrente $R_{(x)}$, der Activitätsrente ${}^aR_{(x)}$, der Invalidenrente ${}^iR_{(x)}$, sowie die Anzahl der Invaliden und Activen jeder Altersclasse hervor.

Unter Zugrundelegung der von Behm und Zimmermann auf gestellten Invaliditäts und Sterbetafel für Invalide,**) sowie der deutschen Sterbetafel ergeben sich die Werthe:

*) Siehe „Oesterreichische Versicherungs-Zeitung" vom 30. Juni 1894.

**) Im Jahre 1893 erschienen, als erste statistische Tafel dieser Art.

…arwerth der		Anzahl der	
Activitätsrente ${}^{a}R_{(x)}$	Invalidenrente ${}^{i}R_{(x)}$	Invaliden $P_{(x)}$	Activen $A_{(x)}$
20·1127	8·1085	—	60,657
19·8734	8·3435	6	60,377
19·6400	8·5794	12	60,051
19·4133	8·8142	19	59,677
19·1919	9·0466	27	59,260
18·9733	9·2742	35	58,808
18·7561	9·4953	43	58,326
18·5390	9·7081	53	57,818
18·3125	9·9097	64	57,314
18·0758	10·0981	77	56,815
17·8291	10·2700	91	56,319
17·5742	10·4231	108	55,819
17·3103	10·5517	126	55,316
17·0392	10·6530	148	54,803
16·7601	10·7255	173	54,281
16·4738	10·7726	202	53,747
16·1801	10·8062	234	53,200
15·8794	10·8434	271	52,637
15·5718	10·8845	312	52,057
15·2579	10·9288	359	51,456
14·9381	10·9778	412	50,832
14·6122	11·0320	472	50,184
14·2804	11·0919	539	49,510
13·9434	11·1581	616	48,806
13·6007	11·2241	702	48,073
13·2520	11·2838	800	47,310
12·8976	11·3219	913	46,515
12·5369	11·3446	1041	45,688
12·1714	11·3394	1188	44,822
11·8004	11·3193	1354	43,918
11·4255	11·2782	1543	42,968
11·0461	11·2274	1755	41,973
10·6634	11·1570	1992	40,927
10·2776	11·0844	2258	39,828
9·8889	11·0006	2554	38,674
9·4981	10·9069	2883	37,460
9·1056	10·7967	3249	36,184
8·7125	10·6687	3655	34,842
8·3198	10·5183	4105	33,429
7·9277	10·3536	4598	31,946
7·5373	10·1693	5134	30,390
7·1495	9·9761	5714	28,760
6·7657	9·7679	6337	27,055
6·3867	9·5474	6997	25,279
6·0147	9·3131	7692	23,432

Vergleichende Tafel.

Alter (x)	Hypothetisch aus den Krümmungsverhältnissen der Sterblichkeitscurve (Sterbetafel der 17 englischen Gesellschaften) abgeleiteter Baarwerth der Invalidenrente B_x	Auf statistischer Grundlage nach der Invaliditäts- und Sterbetafel für Invalide, sowie der deutschen Sterbetafel abgeleiteter Baarwerth der Invalidenrente ${}^{i}R_x$
18	5·98005	8·5794
19	6·57788	8·8142
20	7·00081	9·0466
21	7·42857	9·2742
22	7·85195	9·4953
23	8·17616	9·7081
24	8·50907	9·9097
25	8·83625	10·0981
26	9·11347	10·2700
27	9·36032	10·4231
28	9·56209	10·5517
29	9·77969	10·6530
30	9·94477	10·7255
31	10·12555	10·7726
32	10·26584	10·8062
33	10·41779	10·8434
34	10·58226	10·8845
35	10·46359	10·9288
36	10·39494	10·9778
37	10·69320	11·0320
38	10·92346	11·0919
39	11·16572	11·1581
40	11·41467	11·2241
41	11·54265	11·2838
42	11·65534	11·3219
43	11·69471	11·3446
44	11·65784	11·3394
45	11·51650	11·3193
46	11·43402	11·2782
47	11·26098	11·2274
48	11·09465	11·1570
49	10·94887	11·0844
50	10·76103	11·0006
51	10·51948	10·9069
52	10·41130	10·7967
53	10·21631	10·6687
54	10·05179	10·5183
55	9·91340	10·3536
56	9·71890	10·1693
57	9·58184	9·9761
58	9·47374	9·7679
59	9·31576	9·5474
60	9·04163	9·3131

Für uns sind hier die Baarwerthe der Invalidenrente ${}^{i}R_x$ (in un Rechnung mit B_x bezeichnet) insbesondere von grossem Belang, da sich denselben eine frappante Uebereinstimmung mit den hypothetischen R taten unseres Systemes constatiren lässt. Die auf statistischen Erfahru beruhenden Invaliditätstafeln von Behm und Zimmermann liefern nahezu gleiche Ergebniss, wie unsere aus den Krümmungsverhältnissen der Curve ferneren wahrscheinlichen Lebensdauer abgeleiteten Resultate.

Abgesehen von dem Umstande, dass der von uns auf mathematisc Wege gekennzeichnete Wendepunkt der Absterbe-Curve, welcher etwa in 43. Lebensjahr fällt und nach unserer Tabelle für die Baarwerthe der validenrente das Maximum bildet, auch in der auf statistischem Wege ab leiteten Tafel von Behm und Zimmermann die gleiche Eigenschaft zeigt, l auch der sonstige Verlauf der Baarwerthe in den übrigen Jahren eine fallende Uebereinstimmung mit den hypothetischen Resultaten uns Systemes, welches einer statistischen Grundlage bezüglich der Invalidit verhältnisse beim Menschen vollständig entbehrt, erkennen.

Die zwischen unseren auf rein hypothetischer Grundlage ermittelten jenen auf statistischer Basis berechneten Baarwerthen der Invalidenrente äussernden Ungleichheiten sind, soweit hier nicht eine statistische Besch kung auf einzelne Berufskategorien die Ursache bildet*), auf die Versch heit der zugrundegelegten Sterblichkeitstafeln zurückzuführen. Während lich unsere hypothetischen Resultate auf Grundlage der Mortalitätstafeln 17 englischen Gesellschaften aufgebaut sind, ist die nach den statistisc Daten von Behm und Zimmermann aufgestellte Tabelle auf die deuts Sterbetafel basirt. Ausserdem muss gegenwärtig auch noch die Un kommenheit statistischer Daten auf dem Gebiete der Invaliditäts-Versicher überhaupt in Betracht gezogen werden, was insbesondere für die jüng Altersclassen gilt, deren Validitätsverlauf ein hinreichendes Urtheil derzeit ü haupt noch nicht zulässt. Infolge dessen sind besonders für die jüngeren Alt classen belangreichere Abweichungen der beiderseitigen Zahlen wahrzuneh Die auf der vorhergehenden Seite angeführte vergleichende Tafel mag die fallende Uebereinstimmung der correspondirenden Baarwerthe und ihres laufes illustriren.

Resumiren wir das Ganze, so gelangen wir zu der Conclusion, dass un auf hypothetischer Grundlage aufgebaute Darstellung des Validitätsverla in ihren Resultaten hier auf empirischem Wege eine Bestätigung ihrer Rich keit und Verlässlichkeit findet, was umso höher anzuschlagen ist, als Gedanke, das Absterbegesetz zur Grundlage eines die Validitätsverhältn des Menschen charakterisirenden Systemes zu machen, ein anschein absurder ist.

*) Die Absterbe-Curve, auf welcher unser System aufgebaut ist, umfasst im Ge satze zur Invaliditäts-Statistik einerseits ausgewählte Leben, andererseits aber aus *Menschenmateriale* aus den verschiedensten Berufsarten, sowie beider Geschlechte

eflexionen über Zweck und versicherungstechnische Anwendung er Methode, betreffend die mathematisch-physiologische Abitung des Validitätsverlaufes beim Menschen aus dem Absterbegesetze.

Die vorige Abhandlung über dieses Thema betraf den Gegenstand der pirischen Approbation unserer seinerzeit aufgestellten diesbezüglichen Hypoese und deren wissenschaftliche Begründung auf dem Wege vergleichsweiser duction. Die merkwürdige Uebereinstimmung der mit Hilfe unserer Methode mittelten Resultate mit jenen auf statistischer Grundlage beruhenden, setzte s in die Lage, dieser Anforderung in vollem Masse Genüge zu leisten und wissenschaftliche Berechtigung unserer Methode endgiltig nachzuweisen. es gibt uns nunmehr das Mittel an die Hand, unsere ursprünglich hypoetisch aufgestellten Normen als wissenschaftliche Wahrheiten zu behandeln d aus denselben weitere, in ihrem Wesen begründete Conclusionen zu ziehen. solange es an einer Handhabe mangelte, unseren diesbezüglichen Ergebssen den Nachdruck der überzeugenden Verlässlichkeit zu verschaffen, mussten h jene Ausführungen in den Grenzen vager Annahmen bewegen, und so langreich auch die aus unseren Untersuchungen sich ergebenden Anhaltsnkte, die Richtigkeit sämmtlicher Folgerungen kennzeichnen, so mussten wir nnoch die Wahrnehmung machen, dass dieselben für einen vollgiltigen weis der Verlässlichkeit unserer Methode unzureichend seien und erst deren bereinstimmung mit analogen statistischen Resultaten den diesbezüglichen forderungen gerecht zu werden vermag. Unsere Erläuterungen, auf so hwierigen Gebieten wissenschaftlicher Forschung sie sich auch bewegten, nnten wohl geeignet sein, um die gemachten Wahrnehmungen auf ihre sachen zu prüfen und ihren vermuthlichen Zusammenhang mit physiologischen scheinungen zu erklären, doch reichten sie nicht hin, um jenen Darstelgen die erforderliche Beweiskraft zu geben. Der Stempel des wissenschafthen Erfolges wurde unserer Methode erst durch den empirischen Nachweis er Richtigkeit aufgeprägt. Dessenungeachtet lässt sich nicht bestreiten, dass dem Wesen unserer Ableitungen die Handhabe für den Aufbau eines neuen ysiologischen Systemes der körperlichen Entwicklungsbedingungen des enschen gegeben ist, und gerade unsere diesbezüglichen Untersuchungen einen von nicht zu unterschätzendem Werthe für die Forschung zu sein, da eselben den organischen Zusammenhang des Absterbegesetzes mit dem natürhen Kräfteverfall des Menschen zu statuiren berufen sind. Hiezu haben die folge unserer mathematisch-analytischen Untersuchungen wesentlich betragen.

Insbesondere unsere zu jener Zeit auf dem Gebiete der Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung schon ziemlich weit vorgeschrittenen Forschungen, deren Zusammenhang mit dem Wesen der diesbezüglichen versicherungstechnischen Relationen sich immer intensiver zu äussern begann, hatten nicht geringen Antheil an jenen Erfolgen.

Wohl konnte hier nur von einem langsamen schrittweisen Eindringen in die Sache die Rede sein, weil die versicherungstechnische Bedeutung der verschiedenen mathematisch-analytischen Wahrnehmungen erst wissenschaftlich festgestellt und auf ihre Richtigkeit geprüft werden musste und sodann im Rahmen der Untersuchungen in geeigneter Weise zur Nutzanwendung gebracht, die Verlässlichkeit des Resultates zu verbürgen vermochte. Doch war es nur auf diese Weise möglich, den hier auf dem Wege mathematisch-physiologischer Combination zur Darstellung gelangten Principien jenen logischen Zusammenhang zu geben, welcher in der präcisen wissenschaftlichen Forschung bedingt ist und solchermassen die richtige Anordnung aller Factoren gestattet, die ihrem theoretischen Ursprunge und ihrer Beschaffenheit gemäss thatsächlich den natürlichen Verlauf der Widerstandsfähigkeit des Menschen in den einzelnen Lebensstadien zu bestimmen geeignet erscheinen.

Sollte daher den diesbezüglichen Anforderungen Genüge geleistet werden, so war die Anlehnung an gewisse Analogien der Lebensversicherungstechnik geboten, deren Wesen sich in Relationen äussert, die in der Beschaffenheit der Diffentialgleichungen zweiter Ordnung ihren Ausdruck finden. In erster Linie musste die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer und derjenigen der Rüstigen (Activen) in den einzelnen Lebensstadien eine mathematische Analogie in ihrer Function mit der Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer und der Curve der Lebenden, aufweisen, wie auch die hieraus resultirenden Eigenthümlichkeiten dieses Verhältnisses in ihren Consequenzen theoretisch hier zur Geltung kommen mussten und auf diese Art die Richtung kennzeichnen, in welcher sich unsere Untersuchungen zu bewegen haben und wie deren technische Anordnung zu bewerkstelligen sei. Aus der weiteren Thatsache, dass die wahrscheinliche fernere Lebensdauer in jedem weiter zurückgelegten Lebensjahre sich im absoluten Sinne im Abnehmen befindet, hingegen unter Berücksichtigung des jeweilig zurückgelegten Lebensalters eine relative Steigerung der wahrscheinlich zu erreichenden Gesammtlebensdauer involvirt, liess sich der interessante Schluss ziehen, dass sich hier ein Kräfteersparungs-Process vollziehen muss. Demnach lag der Schwerpunkt unserer Reflexionen in dem Umstande, dass wir die Differentialquotienten der Curve der wahrscheinlichen ferneren Lebensdauer einerseits und der Gesammtlebensdauer andererseits in richtiger Würdigung ihrer Bedeutung als grundlegende Elemente unseres Systemes auffassten und dieselben in der Form von Verhältnisszahlen als Handhabe der mathematischen Entwicklung dieses Systemes zur Anwendung brachten, wodurch die Grundbedingung für weitere mathematische Beobachtungen gegeben war.

Diese in den verschiedenen Altern sich ergebenden Verhältnisszahlen der ebenskraft und der Lebenszähigkeit liessen eine directe rechnungsmässige rmittlung der die Validität des Menschen bedingenden Factoren der Lebensnergie und Resistenz zu, so dass deren mathematischer Werth sich auf kurzem Vege darstellen liess.

Nachdem noch festgestellt worden war, dass in dem Verhältnisse der esistenz und des constanten Werthes der Summe der Verhältnisszahlen er Lebenskraft und Lebenszähigkeit die Verhältnisszahl der frei verfügbaren ebenskraft ihren Ausdruck findet, gelangten wir auf dem Wege eines deductiven erfahrens zu dem Schlusse, dass in dem Producte der Lebensenergie und der esistenz, dividirt durch die constante Summe der Verhältnisszahlen der ebenskraft und der Lebenszähigkeit, der Massstab für die Validität des Menschen egeben ist.

Auf dieser Grundlage fanden nun auch jene aus der Analogie der Formen ch ergebenden Factoren ihre Anwendung und solchermassen ihre rechnungsässige Ermittlung. Nach dem Vorbilde derjenigen der wahrscheinlichen rneren Lebensdauer, wurden die Summen der Validitäts-Einheiten aller nacholgenden Jahre durch die Validitäts-Einheiten des entsprechenden Alters dividirt nd so gelangten wir zu einer Tafel, mittelst welcher die wahrscheinliche rnere Rüstigkeitsdauer für die verschiedenen Alter bis zur rechnungsmässigen alidität-Grenze bestimmt wurde.

Aus der Anwendung dieses Ergebnisses erfolgten sodann jene Resultate, uf deren Grundlage die Leistung des Versicherten mit der Gegenleistung er Versicherungsbank in Einklang gebracht werden sollte.

Es ist selbstverständlich, dass wir zur Zeit unserer diesbezüglichen Unterchungen, wo eine eigentliche Invalidenstatistik noch gar nicht oder in ganz zureichendem Masse vorhanden war, den Zweck verfolgten, auf diese Weise nen Ersatz für eine solche zu schaffen. Es sollte in dieser Methode eine asis für den versicherungstechnischen Aufbau der Invaliditäts-Versicherung atuirt werden, welche den Anforderungen in dieser Beziehung nach Möglhkeit zu entsprechen die Aufgabe hätte. Insbesondere die damals von uns Vorschlag gebrachte und versicherungstechnisch begründete Combination r Lebens- und Invaliditäts-Versicherung, welche die Befreiung von der istung der Lebensversicherungsprämie im Falle der Invalidität bezweckte,*) usste in den Resultaten dieser Methode, welche auf der Sterbetafel fussend, e der Lebensversicherung zugänglichen Berufsarten berücksichtigt, eine willmmene technische Grundlage erhalten.**) Freilich stand uns damals noch cht der Beweis der Uebereinstimmung unserer hypothetischen Resultate mit nen der Empirik zu Gebote, wenn auch die gegebenen Anhaltspunkte auf die ichtigkeit unserer Methode schliessen liessen. Dessenungeachtet fanden unsere esbezüglichen tabellarischen Aufstellungen praktische Anwendung und wurde

*) Siehe „Combination der Lebens- und Invaliditäts-Versicherung." V. Lief., S. [illegible]

**) Die Invalidentafel von Behm und Zimmermann beschränkt sich bekannt[illegible] auf Beamte und Bedienstete der Eisenbahnen.

die Zuversicht in deren Verlässlichkeit nicht nur in keiner Weise getäus
sondern dieselbe fand vielmehr ihre Bekräftigung in dem Umstande, dass jene
Statistik beruhenden Daten wohl eine Uebereinstimmung mit unseren Erg
nissen aufweisen, doch hinter diesen in der Beschaffenheit ihres zugrun
gelegten Materiales zurückbleiben.

Angesichts dessen dürfte auch mit der weiteren Entwicklung der In
liden-Statistik, der Werth unserer Methode sich in dem Masse steigern,
die Invaliditätsverhältnisse auch der anderen Berufs-Kategorien eine em
rische Berücksichtigung erfahren werden.

Man könnte wohl einwenden, dass eine Methode, insoweit ihre praktis
Anwendung in Frage kommt, blos von ephemerer Bedeutung sein kann, we
deren Ergebnisse, mögen dieselben noch so sehr mit den empirischen üb
einstimmen, nach und nach durch die Erfolge der Statistik entbehrlich werd
Wird jedoch der Umstand in Betracht gezogen, dass der Schwerpunkt d
Bedeutung unserer Methode hauptsächlich im wissenschaftlichen Aufbau ei
organischen Zusammenhanges der Mortalität und Invalidität des Menschen
suchen ist und erst in zweiter Linie deren Aufgabe im vorläufigen Ersat
der Invaliden-Statistik besteht, welche noch auf Jahrzehnte hinaus einer Au
gestaltung bedürfen wird, so gelangt man zu der Erkenntniss, dass die Zie
welche mit den wissenschaftlichen Ergebnissen dieser Methode verfolgt werd
unsere Bestrebungen rechtfertigen.

Nachdem wir nun den Zweck und die technische Anwendung unsere
Methode einer Erörterung unterzogen haben, wollen wir nunmehr dere
Ergebnisse vom physiologischen Gesichtspunkte, soweit dieselben auf di
Beschaffenheit des Conservirungs-Zustandes des Menschen und dessen Selecti
Schlüsse zulassen, näher in Betracht ziehen.

Diesbezüglich ist hier der Umstand von Bedeutung, dass hinsichtlich de
Ursachen der Abnahme der menschlichen Validität der natürliche Kräfteve
fall in erster Linie in Betracht kommt, während jene durch körperliche Unfäl
hervorgebrachte Decadence nur mit dazu beiträgt, im Durchschnitte de
Process zu beschleunigen. Deshalb werden auch einzelne Berufskategorien, be
welchen Unfälle sich in stärkerem Masse ereignen, einen rascheren Verfal
der Durchschnittsvalidität aufweisen. Diese Erscheinung tritt auch bei der vo
uns in Betracht gezogenen Invalidentafel für Eisenbahnbeamte und Bedienstet
besonders hervor, indem namentlich die jüngeren Altersclassen eine verhält
nissmässig höhere Invaliditätsfrequenz aufweisen, als dies beim Durchschnitts
materiale anderer Berufsarten überhaupt der Fall ist. Bei den einzelne
Berufskategorien wird es daher von hohem Interesse sein, das Verhältnis
kennen zu lernen, in welchem natürlicher Kräfteverfall einerseits und körper
licher Unfall andererseits als Ursachen der sich äusserden Invaliditätsfrequen
zu betrachten seien. Hieraus müsste auch die bisher versicherungstechnisc
so stiefmütterlich bedachte Unfallversicherung praktischen Nutzen ziehen, wo
chem Uebelstande hinsichtlich der Beurtheilung der diesbezüglichen
eholfen werden könnte.

raus ergibt sich, dass in dem Wesen unserer Methode die Beant- noch mancher interessanten und wichtigen Frage sich birgt, deren lichkeit vom versicherungstechnischen Standpunkte ausser Zweifel er auch an jenen mit dem Validitätsverlauf des Menschen zusammen- en und dessen Wesen bedingenden Begriffen der Lebenskraft, Lebens-, Lebensenergie etc. besitzt die Versicherungstechnik ein hohes, und zwar insofern, als in diesen Elementen der Physiologie des n, dessen mit dem zunehmenden Alter einer stetigen Veränderung fener physischer Durchschnittszustand gekennzeichnet ist. Insbesondere ich der Selection der Leben dürften sich hieraus manche werthvolle unkte ergeben, welche auf den Charakter der ärztlichen Untersuchung luss sein könnten. Ueberhaupt bietet dieser physiologische Aufbau he Quelle interessanter Reflexionen auf manchem einschlägigen Gebiete ographischen Forschung.

r wollen nun versuchen, die Ergebnisse unserer Methode, soweit die- ihrem Wesen fernere berücksichtigungswerthe Conclusionen zu- iner weiteren Betrachtung zu unterziehen. Diesbezüglich drängt sich Linie die Eigenthümlichkeit des Verlaufes des Validitäts-Coëffi- auf, indem hier manche Abweichungen von der sonstigen Regelmäs- u constatiren sind, in denen sich die Merkmale interessanter Erschei- vermuthen lassen. Neben der bekannten successiven Steigerung des s-Coëfficienten bis zum 42. Lebensjahre, auf welche eine ähnlich sich e Abnahme desselben für die weiteren Alter folgt, im 67. Lebens- n Uebergang von der Validität zur Invalidität bewirkend, ist näm- merkwürdige Erscheinung einer temporären Unterbrechung dieses s in zwei verschiedenen Altersstadien wahrzunehmen. Dieselbe äussert schen dem 34. und 38. Lebensjahre durch eine vorübergehende De- des Validitäts-Niveaus, welche sich dadurch erklären lässt, dass viele en infolge von Ausschweifungen in den jüngeren Jahren innerhalb itischen Periode dem Siechthum verfallen und das Validitäts-Durch- nass ihrer Altersclasse ungünstig beeinflussen, während nach Ablauf eriode durch langsames Aussterben derselben wieder der normale Zu- tritt. Eine ähnliche Störung des Verlaufes macht sich im Stadium lidität geltend, indem hier das 81. Lebensjahr sich dadurch bemerk- it, dass in diesem die Steigerung der Invalidität einer mässigen Ab- eicht, welche bis zum höchsten Lebensalter anhält. Hier kann im in ähnlicher Zustand als Ursache gelten. Bis zum 80. Lebensjahre mlich das Menschenmateriale in seiner physischen Beschaffenheit e grosse Anzahl dahinsiechender Individuen beeinflusst, was eine össere Steigerung des Invaliditäts-Durchschnittsmasses zur Folge enigen Individuen aber, welche die Eignung besitzen, dieses hohe dium zu überleben, müssen mit einem besonderen Grade von Wi- igkeit ausgerüstet sein, welcher sich mit jedem weiteren Le- mer *mehr geltend* macht, wohingegen die Siechen in den sel

Fällen über das 80. Lebensjahr hinauskommen. Daraus lässt sich der inte-
essante Schluss ziehen, dass bis zum 80. Lebensjahre das Siechthum in we
höherem Maasse vertreten ist, als in den höheren Altersstadien, in denen a
diese Weise eine gewisse Immunität diesbezüglich vorwaltet. Nur so lässt si
die zunehmend günstigere Gestaltung des Invaliditäts-Zustandes vom 81. Leben
jahre angefangen erklären, und muss daher in diesem Altersstadium auf ei
bessere Lebensdisposition im Durchschnitte des Menschenmateriales gefolg
werden. Zur besseren Erläuterung mag die bezügliche Tabelle diesen Umsta
hier zur Anschauung bringen.

Tabelle

der Validität des Menschen in den einzelnen Lebensstadien
auf Grundlage des Absterbegesetzes ermittelt. (Sterblichkeitstafel der 17 englischen
Gesellschaften.)

Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E . k$	Differenzen in je zwei aufeinander folgenden Jahren	Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E . k$	Differenzen in je zwei aufeinander folgenden Jahren	Lebensalter x	Mittlerer Validitäts-Coëfficient $V_x = E . k$	Differen[z]en in je zw[ei] aufeinand[er] folgenden Jahren
18	+0 89263	—	45	+1 06194	—0 03959	72	—0·12440	+0·015
19	+0·91069	+0·01806	46	+1·00587	—0·05593	73	—0·13690	+0·012
20	+0 92461	+0·01392	47	+0·94972	—0·05622	74	—0·14541	+0·008
21	+0·93936	+0·01475	48	+0·89132	—0·05840	75	—0·15376	+0·008
22	+0·95504	+0·01568	49	+0·83361	—0·05771	76	—0·15986	+0·006
23	+0·96737	+0·01233	50	+0 77483	—0·05878	77	—0·16474	+0 004
24	+0·98094	+0·01357	51	+0·71358	—0·06125	78	—0·16818	+0·003
25	+0 99512	+0·01418	52	+0·65822	—0·05536	79	—0 17031	+0·002
26	+1·00652	+0·01140	53	+0·59665	—0·06157	80	—0·17136	+0·001
27	+1 01882	+0·01230	54	+0 54152	—0·05513	81	—0·17156	+0·000
28	+1·02788	+0 00906	55	+0·49084	—0·05068	82	—0·17123	—0 000
29	+1·03850	+0·01062	56	+0·43167	—0·05917	83	—0·17054	—0·000
30	+1 04581	+0·00731	57	+0·38263	—0 04904	84	—0·16981	—0·000
31	+1·05477	+0·00896	58	+0 33732	—0·05531	85	—0·16892	—0·000
32	+1·06076	+0·00599	59	+0·28461	—0 05271	86	—0·16790	—0·001
33	+1·06799	+0 00723	60	+0·23957	—0·04504	87	—0·16679	—0 001
34	+1,07671	+0 00872	61	+0 19415	—0·04542	88	—0·16520	—0·001
35	+1·06024	—0·01647	62	+0·15037	—0·04378	89	—0·16307	—0 002
36	+1·04983	—0 01041	63	+0·11000	—0·04037	90	—0·16045	—0·002
37	+1·06677	+0·01694	64	+0·07178	—0·03822	91	—0·15674	—0·003
38	+1·08550	+0 01873	65	+0 03658	—0·03520	92	—0·15209	—0·004
39	+1·10503	+0·01953	66	+0·00462	—0·03196	93	—0·14180	—0·010
40	+1·12670	+0·02167	67	—0·02576	—0·03038	94	—0 13217	—0·009
41	+1·13617	+0 00947	68	—0·04936	+0·02360	95	—0·12159	—0·010
42	+1·14093	+0·00476	69	—0·07241	+0·02305	96	—0 11031	—0 011
43	+1·12917	—0 01176	70	—0·09204	+0·01963	97	—0·09951	—0 010
44	+1·10146	—0·02771	71	—0·10888	+0·01684	98	—0·08888	—0 010

Solchermassen stimmen die Reflexionen über den Verlauf der Validit
mit jenen des menschlichen Entwicklungsganges auffallend überein. Währen
der Pubertät des Menschen trägt die angeborene, resp. vererbte Lebens
disposition zum Wachsthum der Lebenskraft bis zu einem gewissen Alter be

mit diesem Processe geht aber ein ähnlicher wieder im umgekehrten
r sich, indem die freie, von den Lebensfunctionen nicht gebundene
aft, zum Theile wieder in Lebenszähigkeit umgesetzt wird. Solange
aus der angeborenen Lebensdisposition sich entwickelnde Lebenskraft
mgekehrten Processe verbrauchte übersteigt, lässt sich ein Wachsthum
constatiren, was bis zum 42. Lebensjahre anhält. Von da ab wird
n selben Maasse, als ein Umsatz der Lebenskraft in Lebenszähigkeit
uch eine Abnahme der ersteren sich geltend machen. Es findet daher
der gesammten Lebensdauer eine stetige Zunahme der Lebenszähigkeit
ren Ursache darin zu suchen ist, dass der Mensch gegen die Folgen
ill und Strapatzen durch Gewohnheit immer widerstandsfähiger wird.
ugend ist in Folge dessen mit viel überschüssiger Lebenskraft ein
ssmässig geringer Grad von Lebenszähigkeit verbunden, welches Ver-
sich bis zur Erreichung der natürlichen Validitätsgrenze immer mehr
t. Im Alter hingegen ist bei bedeutend entwickelter Lebenszähigkeit
reichendes Maass von Lebenskraft vorhanden, welcher Zustand eigent-
Invalidität hervorruft.

r auch das Wesen der menschlichen Rüstigkeitsdauer bietet Anhalts-
für wissenschaftlich wichtige Schlussfolgerungen. Wenn wir nämlich
auf der wahrscheinlichen ferneren Rüstigkeitsdauer in den einzelnen
dien in Betracht ziehen und unter Berücksichtigung der jeweilig
legten Lebensperiode die wahrscheinliche Gesammtrüstigkeitsdauer
, so gelangen wir zu folgenden Resultaten:

Tabelle

rscheinlichen Rüstigkeit des Menschen auf Grundlage des Absterbegesetzes ermittelt.

ahr- inliche rnere igkeits- auer	Wahr- scheinliche Gesammt- rüstigkeits- dauer	Lebensalter x	Wahr- scheinliche fernere Rüstigkeits- dauer	Wahr- scheinliche Gesammt- rüstigkeits- dauer	Lebensalter x	Wahr- scheinliche fernere Rüstigkeits- dauer	Wahr- scheinliche Gesammt- rüstigkeits- dauer
70708	53·70708	35	17·18835	52·18835	51	5·77802	56·77802
25044	53·25044	36	16·62717	52·62717	52	5·28236	57·28236
97977	52·97977	37	15·42296	52·42296	53	4·93396	57·93396
70023	52·70023	38	14·32268	52·32268	54	4·54208	58·54208
41149	52·41149	39	13·19401	52·19401	55	4·11496	59·11496
24966	52·24966	40	12·04493	52·04493	56	3·78262	59·78262
06487	52·06487	41	11·10071	52·10071	57	3·36844	60·36844
87866	51·87866	42	10·17078	52·17078	58	2·91759	60·91759
78235	51·78235	43	9·38990	52·38990	59	2·55164	61·55164
67456	51·67456	44	8·73567	52·73567	60	2·37085	62·37085
65346	51·65346	45	8·16861	53·16861	61	1·79203	62·79203
60368	51·60368	46	7·72938	53·72938	62	1·39177	63·39177
63203	51·63203	47	7·29341	54·29341	63	0·97180	63·97180
63150	51·63150	48	6·87776	54·87776	64	0·54782	64·54782
69240	51·69240	49	6·43060	55·43060	65	0·12073	65·12077
73172	51·73172	50	6·05664	56·05664	66	0·00000	66·00[illegible]
74726	51·74726						

Hieraus ist zu entnehmen, dass zwischen dem 18. und 46. Lebensjah
die wahrscheinliche Gesammtrüstigkeitsdauer nahezu stationär bleibt und
einer langsamen Abnahme bis zum 29. Lebensjahre unterworfen ist, um
da ab wieder ebenso langsam aufzusteigen und ihr ursprüngliches Niveau
erreichen. Dagegen beginnt vom 46. Lebensjahre an die Steigerung
rapide zu werden, mit dem 66. Lebensjahre den Höhepunkt der mittler
Rüstigkeit bewirkend. Aus diesen Anhaltspunkten lässt sich der wahrschei
liche Schluss ziehen, dass der Mensch während seiner Entwicklungsperio
bis zur vollständigen Pubertät verderblichen Einflüssen auf seine Gesundh
am meisten ausgesetzt ist und erst vom 30. Lebensjahre an eine gewi
höhere Wiederstandsfähigkeit erlangt, die mit dem Masse an erworbe
Lebenszähigkeit immer mehr zur Geltung kommt. Die vom 46. Lebensjah
an sich äussernde, rapide Steigerung mag dem Umstande zuzuschreiben se
dass jene Individuen, welche dieses Alter erreichten, ihre Widerstandsfähi
keit bereits documentirt haben, während das physisch schwache Mensche
materiale nach und nach durch Tod und eingetretene Invalidität ausgeschied
wird. Diese Wahrnehmungen müssen offenbar, soweit sie mit den empirisch
Beobachtungen übereinstimmen, für die Lebensversicherung von besonder
Nutzen sein, da sie geeignet sind, auf das Wesen der Selection in erspries
licher Weise einzuwirken.

Auch hinsichtlich der sonstigen praktischen Verwendung unserer Erge
nisse vom rein statistischen Gesichtspunkte, ist eine weitere Ausgestaltung de
Wesens derselben zu erwarten. Der Umstand, dass mittelst unserer Method
auf Grund des Absterbegesetzes der Validitätsverlauf des Menschen bestimm
werden kann, dürfte bald zu der Consequenz führen, die Sterblichkeitsve
hältnisse nach den jeweiligen Berufsarten abgesondert festzustellen und si
unserer Methode zur Aufstellung einer nach Berufen eingetheilten künstlich
Invalidenstatistik zu bedienen; wozu besonders der Mangel an empirisch
Hilfsmitteln in dieser Beziehung, welcher sich dauernd fühlbar zu mache
droht, beizutragen geeignet ist.

Mit dem successiven Aufbau einer allgemeinen Invaliden-Statistik ab
wird die Zuverlässigkeit unserer Methode ihre Bestätigung noch in viel höhere
Masse finden, als dies durch den Vergleich mit der Statistik der Eisenbah
beamten und Bediensteten allein möglich war. Denn so frappant auch d
Aehnlichkeit der beiderseitigen Resultate sich gestaltet, muss dennoch d
Unterschiedlichkeit des zugrunde gelegten Materiales eine gewisse Abweichun
rechtfertigen, welche in dem Momente schwinden muss, als ein statistis
vollkommen gleichwerthiges Materiale in Parallele gezogen wird.

So bietet uns auf diese Art die angewandte mathematische Wissensch
Gelegenheit, die Spur der verborgensten Feinheiten deductiver Forschung
verfolgen, wodurch ein stetiges Weiterschreiten auf neuen Bahnen des For
schrittes möglich wird.

